

Fourieranalysis

Prof. Dr. Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Vorlesungsbegleitendes Skript
Wintersemester 2024/25

Stand: 7. November 2024

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein Nachschlagewerk zur Vorlesung *Fourier-analysis*. Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:

`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Frau Christiane Scheld für die Erstellung der \LaTeX -Version des Skriptums und Herrn Patrick Josef Schäfer für seine Korrekturvorschläge.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	2
Einleitung	1
Kapitel 1. Fourierreihen	2
1.1. Fourierkoeffizienten	2
1.2. Beispiele	8
1.3. Faltung	11
1.4. Cesàro-Konvergenz	14
1.5. Summierbarkeit von Fourierreihen	19
1.6. Lokale Summierbarkeit von Fourierreihen	30
1.7. Konvergenz von Fourierreihen fast überall (Ausblick)	40
1.8. Integration der Fourierreihen	42
1.9. Konvergenz im quadratischen Mittel	45
1.10. Die Wiener-Algebra und der Satz von Bernstein	48
1.11. Das Gibbsche Phänomen	55
Kapitel 2. Anwendungen der Fourierreihen	60
2.1. Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen	60
2.2. Gleichverteilung	61
Kapitel 3. Das Fourier-Integral	65
3.1. Die inverse Fourier-Transformation	73
3.2. Die inverse Fourier-Transformation II	76
3.3. Summationskerne	81
3.4. Lokale Umkehrung der Fouriertransformation	85
3.5. Funktionen von beschränkter Variation	89
Kapitel 4. Fourier-Transformation in $L^p, p > 1$	96
4.1. Die Youngsche Ungleichung	96
4.2. Die L^2 -Theorie	100
4.3. Die Fouriertransformation von L^p -Funktionen	106

Einleitung

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

oder durch Fourier-Integrale

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{its} g(s) ds.$$

Sie besitzt unzählige Anwendungen in fast allen Gebieten der Mathematik sowie in der Physik und den Ingenieurwissenschaften. In der Vorlesung wird die Theorie der Fourierreihen entwickelt. Auch einige Anwendungen dieser Theorie werden besprochen, unter Anderem in einem parallel zur Vorlesung angebotenen gleichnamigen Seminar.

KAPITEL 1

Fourierreihen

1.1. Fourierkoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion, d.h. $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit genügt es die Funktion f auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ zu betrachten (oder $[0, 2\pi)$). Wegen der Periodizität von f ist es ganz natürlich, das Intervall $(-\pi, \pi]$ als Kreis aufzufassen:

$$\mathbb{T} := \{(x, y) | x = \cos t, y = \sin t, t \in (-\pi, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2$$

oder

$$= \{x + iy | x = \cos t, y = \sin t, t \in (-\pi, \pi]\} \subset \mathbb{C}$$

und die Funktion f als Abbildung von \mathbb{T} nach \mathbb{C} zu betrachten. Offenbar ist auf \mathbb{T} das Lebesgue-Maß definiert. \mathbb{T} ist ein metrischer Raum mit $d(z, z') = \min\{|t - t'|, 2\pi - |t - t'|\}$. Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

DEFINITION 1.1. Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ heißt

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$$

der n -ter Fourierkoeffizient von f . Die Reihe $\mathcal{S}[f] := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ heißt Fourierreihe von f .

BEMERKUNG. Hier machen wir keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe.

BEISPIEL. Das trigonometrische Polynom

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$$

hat Fourierkoeffizienten

$$\widehat{P}(n) = \begin{cases} a_n, & |n| \leq N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

SATZ 1.2. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{T}$ beliebig. Dann gilt

(a) $\widehat{f + g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ (Linearität)

$$\widehat{cf}(n) = c\widehat{f}(n)$$

(b) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ (Konjugation)

- (c) $\widehat{f(\cdot - \tau)}(n) = e^{-in\tau} \widehat{f}(n)$
 (d) $\widehat{f(t)e^{imt}}(n) = \widehat{f}(n - m)$
 (e) die Abbildung $\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ ist beschränkt mit der Operatornorm $\|\widehat{\cdot}\| = 1$
 (f) Aus $f_m \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T})$ folgt $\widehat{f}_m(n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \widehat{f}(n)$ gleichmäßig in $n \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. (e) $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \Rightarrow \|\widehat{\cdot}\| \leq 1$. Aus $\widehat{1}(0) = 1$ folgt $\|\widehat{\cdot}\| = 1$.
 (f)

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_m(n) - \widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f_m(t) - f(t)) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f_m(t) - f(t)| dt = \|f_m - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

LEMMA 1.3 (Differenzformel). Für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \pi/n)) e^{-int} dt$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} e^{-i\pi} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-in(t+\pi/n)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \pi/n) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2}(\widehat{f}(n) + \widehat{f}(n)) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \pi/n)) e^{-int} dt.$$

□

LEMMA 1.4 (Stetigkeit der Translation). Sei $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, beliebig. Die Abbildung

$$\phi : \mathbb{T} \rightarrow L^p(\mathbb{T}), \quad \tau \mapsto f_\tau := f(\cdot - \tau)$$

ist stetig.

BEMERKUNG. $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ für alle $p \in [1, \infty]$, denn

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \cdot 1 dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{T}} 1 dt \right)^{1/q}.$$

BEWEIS VON LEMMA 1.4. Für den Beweis brauchen wir das folgende Hilfsmittel:

BEHAUPTUNG. $C(\mathbb{T})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{T})$, d.h. zu jedem $f \in L^p(\mathbb{T})$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in C(\mathbb{T})$, so dass $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} < \varepsilon$ ist.

Sei $\tau_0 \in \mathbb{T}$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle ein $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} < \varepsilon$.
Betrachte

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} + \\ &+ \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} = 2 \underbrace{\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})}}_{< \varepsilon} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})}^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t - \tau) - g(t - \tau_0)|^p dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{T}} |g(t - \tau) - g(t - \tau_0)|^p \end{aligned}$$

Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. Daher ist g gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(t - \tau) - g(t - \tau_0)| < \varepsilon'$ für alle τ mit

$$d(\tau, \tau_0) = d(t - \tau, t - \tau_0) < \delta.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \sup_{t \in \mathbb{T}} |g(t - \tau) - g(t - \tau_0)|^p &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq 2\varepsilon \\ \stackrel{\varepsilon \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} &= 0. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 1.5 (Lemma von Riemann-Lebesgue). Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\widehat{f}(n) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |n| \rightarrow \infty.$$

BEWEIS. Nach Lemma 1.3 gilt $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \|f - f_{\pi/n}\|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Lemma 1.4}} 0$ □

Das Lemma von Riemann-Lebesgue kann nicht verbessert werden: Die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(n)$ können beliebig langsam fallen (später!). Ist f glatt, so kann die Abfallrate abgeschätzt werden.

DEFINITION 1.6. $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$ bezeichne die Menge aller α -Hölder-stetigen Funktionen, d.h.

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq C d(t_1, t_2)^\alpha$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

SATZ 1.7. Für $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$, ist

$$\widehat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha}), \text{ d.h. } \limsup_{|n| \rightarrow \infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{|n|^{-\alpha}} < \infty.$$

BEWEIS. Nach Lemma 1.3 (Differenzformel) gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \pi/n)) e^{-int} dt.$$

Also ist

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi} C \left| \frac{\pi}{n} \right|^\alpha 2\pi = \frac{\text{const}}{|n|^\alpha}.$$

□

BEMERKUNG. Ist $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ mit $1/2 < \alpha \leq 1$, so gilt $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (Satz von Bernstein, später!). Aus dem Satz von Bernstein folgt nicht, dass Satz 1.7 für $\alpha > 1/2$ verbessert werden kann. Dazu betrachte die Folge

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n = 2^k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent wegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$. Es gilt jedoch $|a_n| = O(|n|^{-1})$, d.h.

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|n|^{-1}} = 1$$

SATZ 1.8. Ist f k -mal stetig differenzierbar, $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ und $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|^k}$.

BEWEIS. Für $k = 1$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} f(t)e^{-int} &= f(-\pi)e^{in\pi} + \int_{-\pi}^t \frac{d}{ds} (e^{-ins} f(s)) ds \\ &\stackrel{t=\pi}{\Rightarrow} f(\pi)e^{-in\pi} = f(-\pi)e^{in\pi} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d}{ds} (e^{-ins} f(s)) ds. \end{aligned}$$

Somit ist

$$in \int_{\mathbb{T}} f(s)e^{-ins} ds = \int_{\mathbb{T}} f'(s)e^{-ins} ds,$$

d.h.

$$(1.1) \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi in} \int_{\mathbb{T}} f'(s)e^{-ins} ds = \frac{1}{in} \widehat{f'}(n).$$

Nach Lemma von Riemann-Lebesgue ist

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right) \quad \text{und} \quad |\widehat{f}(n)| \leq \frac{\|f'\|_{L^1(\mathbb{T})}}{n}.$$

Für $k > 1$ durch rekursive Anwendung von (1.1) erhält man die Identität

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi(in)^k} \int_{\mathbb{T}} f^{(k)}(t)e^{-int} dt = \frac{1}{(in)^k} \widehat{f^{(k)}}(n),$$

die wieder mit Lemma von Riemann-Lebesgue die Aussage des Satzes liefert. □

AUFGABE 1.9. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ mit $\sup_{t \in \mathbb{T}} |f^{(k)}(t)| \leq Ck^{\alpha k}$ für ein $C > 0$, ein $0 < \alpha < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$|\widehat{f}(m)| \leq K \exp\left(-\frac{\alpha}{e}|m|^{1/\alpha}\right)$$

für eine Konstante K .

HINWEIS. Die Stirlingsche Formel

$$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}.$$

AUFGABE 1.10. Sei $C^{k,\alpha}(\mathbb{T}) := \{f \in C^k(\mathbb{T}) \mid f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})\}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$. Untersuchen Sie das Verhalten der Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(m)$ für $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T})$, $|m| \rightarrow \infty$.

DEFINITION 1.11.

$$\text{Var}(f) := \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_n) - f(t_0)|$$

heißt die Variation der Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $\text{Var}(f) < \infty$ so heißt f von beschränkter Variation, $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$.

BEMERKUNGEN. (1) Für alle $\tau \in \mathbb{T}$ gilt $\text{Var}(f) = \text{Var}(f_\tau)$.

(2) Funktionen beschränkter Variation brauchen nicht stetig zu sein. Zum Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-\pi, 0] \\ 1, & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

ist nicht stetig, aber $\text{Var}(f) = 4$.

(3) Es gibt stetige Funktionen mit unbeschränkter Variation, z.B. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{für } x \in (0, 2] \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(4) Lipschitzstetige Funktionen haben beschränkte Variation.

(5) Ist $f \in C^1(\mathbb{T})$, so gilt

$$\text{Var}(f) = \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| dt.$$

BEWEIS VON BEMERKUNG (5) FÜR DAS INTERVALL $(-\pi, \pi]$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(f) &= \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

für $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Offenbar gilt die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^n \inf_{\tau \in [t_{i-1}, t_i]} |f'(\tau)|(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 (R) \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| dt &= \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \sum_{i=1}^n \inf_{\tau \in [t_{i-1}, t_i]} |f'(\tau)| (t_i - t_{i-1}) \\
 &\leq \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| (t_i - t_{i-1}) \\
 &= \text{Var}(f).
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_n} |f'(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\text{Var}(f) \leq \sup_{-\pi < t_0 < \dots < t_n = \pi} \int_{t_0}^{t_n} |f'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| dt.$$

□

SATZ 1.12. Ist $f \in BV(\mathbb{T})$, so gilt

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{\text{Var}(f)}{|n|} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

BEWEIS. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beliebig. Sei $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ die stückweise konstante Funktion so, dass

$$g(t) := f\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right)$$

für

$$t \in \left(-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}, -\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right] \quad \text{und} \quad k = 0, 1, \dots, |n| - 1.$$

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}} e^{-int} dt &= -\frac{1}{in} e^{-int} \Big|_{t=-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}}^{t=-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}} \\
 &= -\frac{1}{in} \left(e^{+in\pi} e^{-\frac{2\pi in(k+1)}{|n|}} - e^{in\pi} e^{-\frac{2\pi in k}{|n|}} \right) \\
 &= -\frac{e^{in\pi}}{in} e^{-\frac{2\pi in k}{|n|}} \left(e^{-\frac{2\pi in}{|n|}} - 1 \right) \stackrel{|n| \geq 1}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = 0.$$

Nun betrachten wir

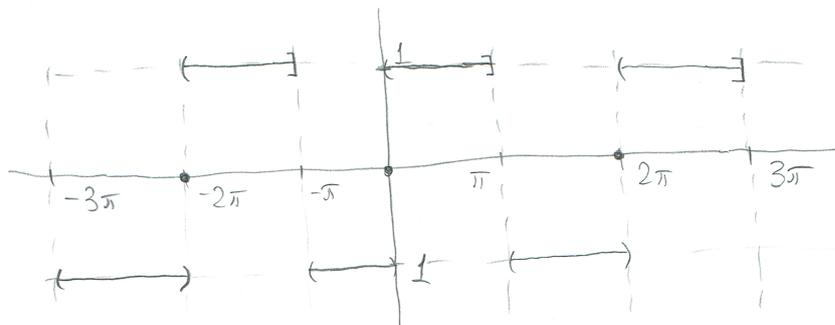
$$\begin{aligned}
 |\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t)) e^{-int} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{|n|-1} \int_{-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}} (f(t) - g(t)) e^{-int} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{|n|-1} \int_{-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}} \left(f(t) - f\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right) \right) e^{-int} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{|n|-1} \int_{-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}} \left| f(t) - f\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right) \right| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{|n|-1} \sup_{t \in \left(-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}, -\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right]} \left| f(t) - f\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right) \right| \frac{2\pi}{|n|} \\
 &\leq \frac{\text{Var}(f)}{|n|}.
 \end{aligned}$$

□

1.2. Beispiele

(1) Wir betrachten die periodische Stufenfunktion

$$f(t) := \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad t \in (-\pi, \pi].$$



Zunächst berechnen wir die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(n)$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi in} e^{-int} \Big|_{t=-\pi}^{t=0} \\ &- \frac{1}{2\pi in} e^{-int} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi in} (1 - e^{i\pi n}) \\ &- \frac{1}{2\pi in} (e^{-i\pi n} - 1) \\ &= \frac{1}{2\pi in} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{2\pi in} (1 - (-1)^n) \\ &= \frac{1}{\pi in} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi in}, & n \text{ ungerade} \end{cases}\end{aligned}$$

Sei $n = 0$:

$$\widehat{f}(0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

Also ist

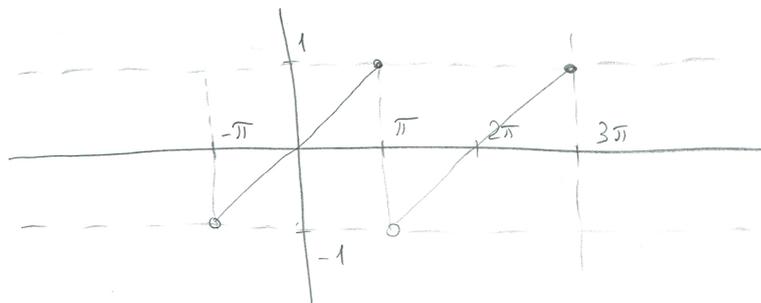
$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z} \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi in}, & n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$$

BEMERKUNGEN. (1) $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ mit $\text{Var}(f) = 4$. Nach Satz 1.12 gilt $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{4}{|n|}$.

(2) Da $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-1})$ ist, können wir a priori keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe erzielen.

(2) Nun betrachten wir die Sägezahnfunktion

$$f(t) = \frac{t}{\pi}, \quad t \in (-\pi, \pi].$$



Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} dt = \frac{1}{2\pi^2} \frac{t^2}{2} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ haben wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 in} t e^{-int} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} e^{-int} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 in} (\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) = -\frac{(-1)^n}{\pi in}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{\pi in}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

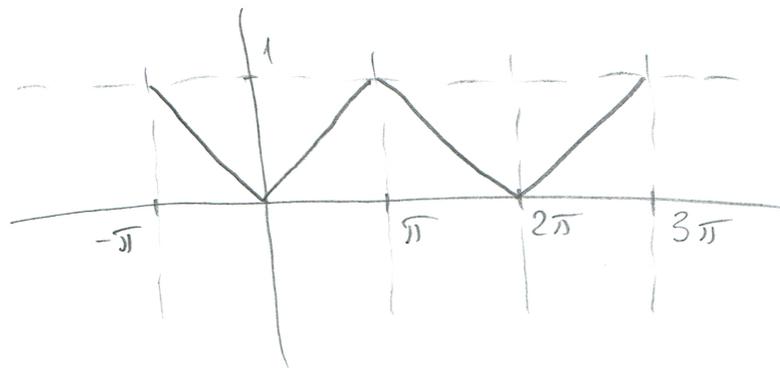
BEMERKUNGEN. (1) $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ mit $\text{Var}(f) = 4$. Nach Satz 1.12 gilt $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{4}{|n|}$.

(2) $f \notin C(\mathbb{T})$, denn $\lim_{t \rightarrow -\pi^+} f(t) = -1$ und $f(\pi) = +1$.

(3) Da $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-1})$ ist, können wir a priori keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe erzielen.

(3) Die Dreiecksfunktion

$$f(t) := \frac{|t|}{\pi}, \quad t \in (-\pi, \pi].$$



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{\pi} dt = \frac{2}{2\pi^2} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi^2} \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} t e^{-int} dt \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^0 t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} t e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} t e^{int} dt \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2 i n} t e^{-int} \Big|_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} e^{-int} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2 i n} t e^{int} \Big|_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} e^{int} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2}, & n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$$

BEMERKUNGEN. (1) $f \in C^{0,1}(\mathbb{T})$. Nach Satz 1.7 gilt $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-1})$. Andererseits ist $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ mit $\text{Var}(f) = 2$. Nach Satz 1.12 gilt $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{2}{|n|}$. Die beiden Abschätzungen sind sehr grob.

(2) Wegen $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-2})$ ist die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Über den Grenzwert dieser Reihe können wir noch nichts sagen.

1.3. Faltung

DEFINITION 1.13. Für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ heißt

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-s) g(s) ds \\
 &\stackrel{\tau=t-s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{T}
 \end{aligned}$$

die Faltung von f und g .

A priori ist es nicht klar, ob das Integral auf der rechten Seite existiert. Der folgende Satz liefert die positive Antwort auf diese Frage.

SATZ 1.14 (Youngsche Ungleichung). Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$ so, dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$, so gilt $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ mit

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$$

und

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ferner ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $g \in L^1(\mathbb{T})$, so gilt $f * g \in C(\mathbb{T})$.

BEMERKUNG.

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \text{ess-sup}_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| < \infty\}$$

mit

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \text{ess-sup}_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| := \inf_{\substack{N \subset \mathbb{T} \\ |N|=0}} \sup_{t \in \mathbb{T} \setminus N} |f(t)|$$

ist ein Banachraum.

BEWEIS. (1) Ist $q = \infty$, so gilt $p = 1$ und $r = \infty$

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{2\pi} \text{ess-sup}_{t \in \mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t - \tau)| |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{2\pi} \text{ess-sup}_{t \in \mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t - \tau)| d\tau \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\tau)| d\tau = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

(2) Ist $p = \infty$, so gilt $q = 1$ und $r = \infty$

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

analog.

(3) Sei nun $p, q < \infty$. Setze

$$p' := \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

und

$$q' := \frac{q}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} \\ &= 2 + \frac{1}{r} - \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{1 + \frac{1}{r}} = 1 \end{aligned}$$

und

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = \frac{p}{r} + p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{p}{r} + p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Analog zeigt man

$$\frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
 & |(f * g)(t)| \\
 & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\tau)| \cdot |g(t - \tau)| d\tau \\
 (1.2) \quad & = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|^{\frac{p}{q'}} \left(|f(\tau)|^{\frac{p}{r}} |g(t - \tau)|^{\frac{q}{r}} \right) |g(t - \tau)|^{\frac{q}{p'}} d\tau \\
 & = \int_{\mathbb{T}} (|f(\tau)|^p)^{1/q'} (|f(\tau)|^p |g(t - \tau)|^q)^{1/r} (|g(t - \tau)|^q)^{1/p'} \frac{d\tau}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Hölder-Ungleichung: Für alle $u \in L^{s_1}(\mathbb{T})$ und $v \in L^{s_2}(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$, $1 < s_1, s_2 < \infty$ gilt

$$\left| \int_{\mathbb{T}} u(\tau)v(\tau)d\tau \right| \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\tau)|^{s_1} d\tau \right)^{1/s_1} \left(\int_{\mathbb{T}} |v(\tau)|^{s_2} d\tau \right)^{1/s_2}.$$

AUFGABE 1.15. Leiten Sie aus der Hölder-Ungleichung die folgende Ungleichung (iterierte Hölder-Ungleichung) her:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{T}} u(\tau)v(\tau)w(\tau)d\tau \right| \leq \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\tau)|^{s_1} d\tau \right)^{1/s_1} \left(\int_{\mathbb{T}} |v(\tau)|^{s_2} d\tau \right)^{1/s_2} \left(\int_{\mathbb{T}} |w(\tau)|^{s_3} d\tau \right)^{1/s_3}
 \end{aligned}$$

für $u \in L^{s_1}(\mathbb{T})$, $v \in L^{s_2}(\mathbb{T})$, $w \in L^{s_3}(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1$, $1 < s_1, s_2, s_3 < \infty$.

Wir setzen

$$\begin{aligned}
 u & := (|f|^p)^{1/q'} \xrightarrow{f \in L^p} u \in L^{q'}(\mathbb{T}), \\
 w & := (|g(t - \cdot)|^q)^{1/p'} \xrightarrow{g \in L^q} w \in L^{p'}(\mathbb{T}), \\
 v_t & := (|f|^p |g(t - \cdot)|^q)^{1/r}.
 \end{aligned}$$

Wir können aber nicht behaupten, dass $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Jedoch lässt sich beweisen, dass $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für fast alle $t \in \mathbb{T}$.

BEHAUPTUNG. $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für fast alle $t \in \mathbb{T}$.

BEWEIS. Wir betrachten das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}} \|v_t\|_{L^r(\mathbb{T})}^r \frac{dt}{2\pi} & = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |v_t(\tau)|^r \frac{d\tau}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
 & = \int_{\mathbb{T}^2} |f(\tau)|^p |g(t - \tau)|^q \frac{d\tau}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \\
 & = \int_{\mathbb{T}^2} |f(\tau)|^p |g(s)|^q \frac{d\tau}{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \\
 & = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^q.
 \end{aligned}$$

B

Mit Hilfe der iterierten Hölder-Ungleichung erhält man aus (1.2) für fast alle $t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \|u\|_{L^{q'}(\mathbb{T})} \|w\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \|v_t\|_{L^r(\mathbb{T})} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|^p |g(t-\tau)|^q \frac{d\tau}{2\pi} \right)^{1/r} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{T}} |(f * g)(t)|^r \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/r} &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'} \\ &\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{T}^2} |f(\tau)|^p |g(t-\tau)|^q \frac{d\tau}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/r} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/r} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/r} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

(4) Die Fourierkoeffizienten der Faltung:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} dt \right) g(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

(5) Seien $f \in C(\mathbb{T})$ und $g \in L^1(\mathbb{T})$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} |(f * g)(t + \delta) - (f * g)(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t - \tau + \delta) - f(t - \tau)| \cdot |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathbb{T}} |f(t - \tau + \delta) - f(t - \tau)| \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

□

BEMERKUNGEN. (1) Ist f ein trigonometrisches Polynom, $g \in L^1(\mathbb{T})$, so ist $f * g$ ebenfalls ein trigonometrisches Polynom.

BEWEIS. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so gilt $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|n| \geq N$. Also gilt

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|n| \geq N$, d.h. $f * h$ ist ein trigonometrisches Polynom.

(2) Seien $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Nach Satz 1.14 ist $f * g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Es lässt sich jedoch mehr zeigen: $f * g \in C(\mathbb{T})$.

1.4. Cesàro-Konvergenz

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Man definiert die Mittelwerte

$$\sigma_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Die Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Folge der Cesàro-Mittelwerte.

BEISPIELE. (1) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^{n+1}$ konvergiert nicht. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte $\sigma_{2k} = 0$, $\sigma_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, ist konvergent mit Grenzwert Null.

(2) Die Folge $(1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots)$ konvergiert nicht. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte

$$\sigma_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}, \quad \sigma_{3k+2} = \frac{1}{3k+2}, \quad \sigma_{3k+3} = 0, k \in \mathbb{N}_0,$$

ist konvergent mit Grenzwert Null.

SATZ 1.16. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Dann konvergiert die Folge der Cesàro-Mittelwerte $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k (a_n - a) = 0$$

gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k (a_n - a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \geq M$. Sei nun $n > \max\{N, M\}$ beliebig. Betrachte nun

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N (a_j - a) + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^n (a_j - a) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N (a_j - a) \right| + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^n |a_j - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ferner wird uns die Reihenkonvergenz interessieren. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ Partialsummen. Man definiert die Mittelwerte der Partialsummen:

$$\sigma_n := \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}.$$

BEISPIELE. (1) Seien $a_n = (-1)^{n+1}$. Die Folge der entsprechenden Partialsummen

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}$$

ist nicht konvergent. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (1 + (-1)^{j+1}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ Cesàro-summierbar ist und schreibt

$$C - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2}.$$

(2) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots)$. Die Folge der entsprechenden Partialsummen

$$s_{3k+1} = 1, \quad s_{3k+2} = 1, \quad s_{3k+3} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

ist nicht konvergent. Für Cesàro-Mittelwerte gilt

$$\begin{aligned}\sigma_{3k+1} &= \frac{1}{3k+1} \sum_{j=1}^{3k+1} s_j = \frac{2k+1}{3k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3}, \\ \sigma_{3k+2} &= \frac{1}{3k+2} \sum_{j=1}^{3k+2} s_j = \frac{2k+2}{3k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3}, \\ \sigma_{3k+3} &= \frac{1}{3k+3} \sum_{j=1}^{3k+3} s_j = \frac{2k}{3k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$C - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

AUFGABE 1.17. Untersuchen Sie die Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ auf Cesàro-Konvergenz.

Nach Satz 1.16 gilt für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$C - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Für Reihen mit nichtnegativen Reihengliedern sind die Konvergenz und die Cesàro-summierbarkeit äquivalent.

SATZ 1.18. Seien $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann Cesàro-summierbar, wenn sie konvergent ist.

BEWEIS. „ \Leftarrow “ ist klar.

„ \Rightarrow “ Sei die Folge der Cesàro-Mittelwerte $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j$ konvergent.

Angenommen, die Folge der Partialsummen $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wäre nicht konvergent, d.h. $s_j \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$. Sei $\alpha > 0$ beliebig groß. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $s_j \geq \alpha$ für alle $j > N$. Für jedes $n > N$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N s_j + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^n s_j \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N s_j + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^n \alpha \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N s_j + \alpha \frac{n-N}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha. \end{aligned}$$

Also gilt $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Widerspruch! \square

Wir betrachten wieder allgemeine Reihen, deren Reihenglieder beliebiges Vorzeichen haben können.

SATZ 1.19. Sei $t_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$.

(a) $\sum a_n$ ist Cesàro-summierbar genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)}$$

konvergiert.

(b) Sei $\sum a_n$ Cesàro-summierbar. Dann ist $\sum a_n$ konvergent genau dann, wenn $t_n = o(n)$ ist.

BEMERKUNG. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)}$ folgt nicht, dass

$\frac{t_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow t_n = o(n)$, z.B. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ oder $\sum b_n$ mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = k^2, \\ \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2. \end{cases}$$

Umgekehrt, aus $t_n = o(n)$ folgt nicht, dass $\sum \frac{t_n}{n(n+1)}$ konvergent ist, z.B. $t_n = \frac{n}{\log(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{t_n}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ divergent.

BEWEIS VON SATZ 1.19. (a) BEHAUPTUNG 1. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^N \frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1} \sigma_N$$

BEWEIS mit der vollständigen Induktion:

$$\frac{t_1}{2} = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} a_1.$$

Ferner lässt sich t_{N+1} schreiben als

$$\begin{aligned} t_{N+1} &= a_1 + 2a_2 + \dots + (N+1)a_{N+1} \\ &= (N+1)s_{N+1} - s_N - \dots - s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{t_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{t_n}{n(n+1)} + \frac{t_{N+1}}{(N+1)(N+2)} \\
 &= \frac{N}{N+1} \sigma_N + \frac{(N+1)s_{N+1} - s_N - \dots - s_2 - s_1}{(N+1)(N+2)} \\
 &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_N}{N+1} + \frac{(N+1)s_{N+1} - s_N - \dots - s_2 - s_1}{(N+1)(N+2)} \\
 &= \frac{s_{N+1}}{N+2} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) s_j \\
 &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_N + s_{N+1}}{N+2} = \frac{N+1}{N+2} \sigma_{N+1}.
 \end{aligned}$$

□ B1

Aus Behauptung 1 folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N$$

und somit (a) bewiesen.

(b) BEHAUPTUNG 2. $t_n = (n+1)s_n + n\sigma_n$.

BEWEIS mit der vollständigen Induktion: $t_1 = a_1 = 2a_1 - a_1$. Ferner betrachte

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} &= t_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)s_n - n\sigma_n + (n+1)a_{n+1} \\
 &= (n+1)s_{n+1} - (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \\
 &= (n+2)s_{n+1} - s_{n+1}(s_1 + s_2 + \dots + s_n) \\
 &= (n+2)s_{n+1} - (n+1)\sigma_{n+1}.
 \end{aligned}$$

□ B2

„ \Rightarrow “ Sei $\sum a_n$ konvergent, d.h. die Folge (s_n) mit Grenzwert s . Dann ist nach Satz 1.16 die Folge (σ_n) ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert s . Aus Behauptung 2 folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0,$$

d.h. $t_n = o(n)$.

„ \Leftarrow “ Sei $t_n = o(n)$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = 0$. Nach Behauptung 2 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} s_n - \sigma_n \right) = 0,$$

d.h. die Folge (s_n) ist konvergent. □

BEMERKUNG. Es gibt auch andere Summationsformeln divergenter Reihen, wie z.B.:

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12},$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 1 + 1 + \dots = -1/2,$$

$$\zeta(-2) = 0 \Rightarrow 1 + 2^2 + 3^2 + \dots = 0.$$

1.5. Summierbarkeit von Fourierreihen

(a) Betrachte die n -te Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$S_n(f, t) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Sei $D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n q^k$ mit $q = e^{it}$. Sei zunächst $t \neq 0 \Leftrightarrow q \neq 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n q^k &= q^{-n} \sum_{k=0}^{2n} q^k = q^{-n} \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{q^{-n} - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{-it}} \\ &= \frac{e^{it/2} (e^{-int-it/2} - e^{int+it/2})}{e^{it/2} (e^{-it/2} - e^{+it/2})} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt $D_n(t) = 2n + 1$. Also ist $D_n(t)$ stetig, denn $\lim_{t \rightarrow 0} D_n(t) = 2n + 1$.

Die Funktion $D_n(t)$ heißt *Dirichlet-Kern*. Nach Satz 1.14 ist die Faltung $(D_n * f)(t)$ ein trigonometrisches Polynom mit Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{D}_n(k) \widehat{f}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & |k| \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$(D_n * f)(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} = S_n(f, t).$$

(b) Betrachte den Cesàro-Mittelwert

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, t) &:= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, t) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \widehat{f}(l) e^{ilt} \end{aligned}$$

Für $t \neq 0 \Leftrightarrow q := e^{ikt} \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \sin(k + 1/2)t &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n (q^{k+1/2} - q^{-k-1/2}) \\
&= \frac{1}{2i} q^{1/2} \sum_{k=0}^n (q^k - q^{-k-1}) \\
&= \frac{q^{1/2}}{2i} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{q^{-1/2}}{2i} \frac{1 - q^{-n-1}}{1 - q^{-1}} \\
&= \frac{q^{1/2}}{2i} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{q^{1/2}}{2i} \frac{1 - q^{-n-1}}{q - 1} \\
&= \frac{q^{1/2}}{2i} \frac{1 - q^{n+1} + 1 - q^{-n-1}}{1 - q} \\
&= \frac{q^{1/2}}{2i} \frac{(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}})^2}{q^{1/2}(q^{-1/2} - q^{1/2})} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}})^2}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{(-4) \left(\frac{q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}}}{2i} \right)^2}{2i \frac{q^{1/2} - q^{-1/2}}{2i}} \\
&= \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin t/2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2 t/2}$$

für $t \neq 0$. Für $t = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

und somit $F_n(0) = n+1$. Also ist $F_n(t)$ stetig, denn $\lim_{t \rightarrow 0} F_n(t) = F_n(0)$. Die Funktion $F_n(t)$ heißt *Fejer-Kern*, die Faltung $(F_n * f)(t)$ ist ein trigonometrisches Polynom mit Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{F}_n(k) \widehat{f}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right), & |k| \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$(F_n * f)(t) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) = \sigma_n(f, t).$$

(c)

DEFINITION 1.20. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt summierbar im Sinne von Abel, falls für alle $r \in [0, 1)$ die Reihe

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

konvergiert und $\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r)$ existiert.

BEISPIEL. Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \frac{1}{1+r}$$

für alle $0 \leq r < 1$. Der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = 1/2$.

Der Abel-Mittelwert

$$A_r(f, t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}$$

konvergiert für alle $0 \leq r < 1$, denn $\widehat{f} \in \ell^\infty$. Die Funktion

$$\begin{aligned} P_r(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \\ &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n e^{int} + \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n e^{-int} \\ &= 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \\ &= 1 + \frac{2r \cos t - 2r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t} \end{aligned}$$

heißt *Poisson-Kern*. Es gilt

$$A_r(f, t) = (P_r * f)(t).$$

Anschließend betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r(f, t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}.$$

(d) Der Gauß-Mittelwert

$$G_s(f, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 s} \widehat{f}(n) e^{int}, \quad s > 0.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} \Gamma_s(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 s} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(t+2\pi n)^2 / 4s} \end{aligned}$$

heißt *Gauß-Kern*. Es gilt $G_s(f, t) = (\Gamma * f)(t)$.

DEFINITION 1.21. Eine Dirac-Folge auf \mathbb{T} ist eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{T})$ mit den Eigenschaften

- (a) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t) dt = 1,$
 (b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)| dt < \infty,$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} k_n(t) dt = 0$ für alle $\delta \in (0, \pi).$

Gilt $k_n(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Dirac-Folge positiv.

Bildet die Folge der Dirichlet-Kerne $D_n(t)$ eine Dirac-Folge? Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = 1.$$

Die Eigenschaft (b) gilt jedoch nicht!

PROPOSITION 1.22. Für gewisse Konstanten $c, d > 0$ gilt

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq c \log n + d.$$

Insbesondere ist (D_n) keine Dirac-Folge.

BEMERKUNG. Es lässt sich zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \\ &\stackrel{\tau=t/2}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin n\tau}{\sin \tau} \right| d\tau \end{aligned}$$

mit $m = 2n + 1$. Wir zerlegen das Intervall $[0, \pi]$ in Teilintervalle

$$\begin{aligned} &\left[0, \frac{\pi}{2m}\right], \left[\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{2m}\right], \dots \\ &\dots \left[\frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{(2m-1)\pi}{2m}\right], \left[\frac{(2m-1)\pi}{2m}, \pi\right]. \end{aligned}$$

Die Funktion $\tau \mapsto |\sin m\tau|$ ist monoton wachsend auf Intervallen

$$\left[0, \frac{\pi}{2m}\right], \left[\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{2m}\right], \dots \left[\frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{(2m-1)\pi}{2m}\right]$$

und monoton fallend auf Intervallen

$$\left[\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{3\pi}{2m}, \frac{2\pi}{m}\right], \dots \left[\frac{(2m-1)\pi}{2m}, \pi\right].$$

Wir entfernen alle Intervalle, wo $\tau \mapsto |\sin m\tau|$ monoton fallend ist und erhalten somit eine untere Schranke

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2m}} \left| \frac{\sin(m\tau)}{\sin \tau} \right| d\tau \\ &\stackrel{s=\tau-k\pi/m}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \left| \frac{\sin(ms+k\pi)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)} \right| ds \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \left| \frac{\sin(ms)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)} \right| ds. \end{aligned}$$

Wir notieren die folgenden Eigenschaften:

- (1) $\sin(ms) \geq 0$ für alle $s \in \left[0, \frac{\pi}{2m}\right]$,
- (2) Ist $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2m}$, so gilt

$$s + \frac{k\pi}{m} \in \left[\frac{k\pi}{m}, \frac{(k+1)\pi}{m} \right] \subset [0, \pi].$$

Somit gilt $\sin\left(s + \frac{k\pi}{m}\right) \geq 0$.

- (3) $\sin\left(s + \frac{k\pi}{m}\right) \leq s + \frac{k\pi}{m}$,
- (4) $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

Mit diesen Eigenschaften erhalten wir die folgende untere Schranke:

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \frac{\sin(ms)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)} ds \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \frac{\frac{2ms}{\pi}}{s+\frac{k\pi}{m}} ds \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \frac{\frac{2ms}{\pi}}{\frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m}} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \frac{ms}{\frac{\pi^2}{4m}(2k+1)} ds \\ &= \frac{4m^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)^{-1} \int_0^{\pi/2m} s ds \\ &= \frac{4m^2}{\pi^3} \frac{\pi^2}{8m^2} \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)^{-1} \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{m-1} \frac{dx}{2x+1} \geq \frac{1}{4\pi} \log(2m-1) = \frac{1}{4\pi} \log(4n+1) \\ &\geq \frac{1}{4\pi} \log(4n) = \frac{1}{4\pi} \log n + \frac{1}{4\pi} \log 4. \end{aligned}$$

□

LEMMA 1.23. (F_n) ist eine positive Dirac-Folge.

BEWEIS. (a)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} dt = 1.$$

(b) klar wegen $F_n \geq 0$.

(c)

$$\begin{aligned} \sup_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sup_{\delta < |t| < \pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

AUFGABE 1.24. Sei (r_n) eine Folge mit $0 < r_n < 1$, $r_n \rightarrow 1$. Dann ist (P_{r_n}) mit

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}$$

eine positive Dirac-Folge.

BEMERKUNG. Der Gauß-Kern (Γ_{s_n}) für $s_n \rightarrow 0$, $s_n > 0$, bildet ebenfalls eine positive Dirac-Folge.

SATZ 1.25. Sei (k_n) eine Dirac-Folge. Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so gilt

$$k_n * f \rightarrow f \text{ in } C(\mathbb{T}).$$

BEWEIS. Setze $f_\tau := f(\cdot - \tau)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\max_{|\tau| \leq \delta} \|f_\tau - f\|_\infty \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} (k_n * f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f(t - \tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} f(t) \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) (f(t - \tau) - f(t)) d\tau. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} |(k_n * f)(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| |(f(t - \tau) - f(t))| d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \sup_{s \in \mathbb{T}} |f(s - \tau) - f(s)| d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \|f_\tau - f\|_\infty d\tau. \end{aligned}$$

Wir zerlegen das Integral auf der rechten Seite in zwei Teile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)| \|f_\tau - f\|_\infty d\tau \\ &\leq \max_{|\tau| \leq \delta} \|f_\tau - f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| d\tau < \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |k_n(\tau)| \|f_\tau - f\|_\infty d\tau \\ &\leq \max_{|\tau| \leq \pi} \|f_\tau - f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |k_n(\tau)| d\tau \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_\infty = 0.$$

□

KOROLLAR 1.26. Für $f \in C(\mathbb{T})$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, \cdot) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ in } C(\mathbb{T}), \\ A_r(f, \cdot) &\xrightarrow{r \rightarrow 1} f \text{ in } C(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Später beweisen wir auch punktweise Konvergenz für $\sigma_n(f, \cdot)$ und $A_r(f, \cdot)$ für nicht stetige Funktionen.

KOROLLAR 1.27 (Trigonometrischer Approximationssatz). *Trigonometrische Polynome sind dicht in $C(\mathbb{T})$.*

BEWEIS. $\sigma_n(f, \cdot)$ ist ein trigonometrisches Polynom. □

Weiterhin untersuchen wir die Konvergenz von $\sigma_n(f, \cdot)$ und $A_r(f, \cdot)$ in $L^p(\mathbb{T})$ für $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Wir werden dabei einige Ergebnisse aus der Funktionalanalysis benutzen.

SATZ 1.28. Sei (k_n) eine Dirac-Folge. Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, so gilt

$$k_n * f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ in } L^p.$$

BEMERKUNG. Aus $k_n * f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in L^p folgt, dass es eine Teilfolge (n_i) gibt, so dass $k_{n_i} * f \xrightarrow{n_i \rightarrow \infty} f$ fast überall. Der Beweis findet sich im Vorlesungsskript zur Funktionalanalysis.

Für den Beweis des Satzes brauchen wir ein nützliches Lemma.

LEMMA 1.29. Sei $1 \leq p < \infty$. Sei $\int_{\mathbb{T}} |f(\cdot, s)| ds \in L^p(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(\cdot, s) ds \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{T})} ds.$$

BEMERKUNG. Das Lemma verallgemeinert die Dreiecksungleichung:

$$\left\| \sum_j f(\cdot, s_j) \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sum_j \|f(\cdot, s_j)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

BEWEIS. Sei $1 < q \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Sei $g \in L^q(\mathbb{T})$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t,s) ds \right) g(t) dt \right| &\leq \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t,s) ds \right| \cdot |g(t)| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)| ds \cdot |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung $\int_{\mathbb{T}} |f(\cdot, s)| ds \in L^p(\mathbb{T})$ mit Hilfe der Hölder-Ungleichung folgt, dass die Funktion $t \mapsto |g(t)| \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)| ds$ integrierbar ist. Mit dem Satz von Fubini können somit die Integrale vertauscht und anschließend mit der Hölder-Ungleichung abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)| ds \cdot |g(t)| dt &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)| \cdot |g(t)| dt ds \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} ds \\ &= \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \cdot \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{T})} ds. \end{aligned}$$

Wir zitieren zwei Fakten aus der Funktionalanalysis:

- (a) (Darstellungssatz von Riesz) Jedes lineare stetige Funktional auf $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ ist gegeben durch

$$\ell(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} g(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{T})$$

für ein $g \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für die (Operator-) Norm des Funktionals

$$\|\ell\| = \sup_{\substack{\varphi \in L^p(\mathbb{T}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\ell(\varphi)|}{\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}}$$

gilt $\|\ell\| = \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$.

- (b) (Eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{l \text{ lineare} \\ \text{stetige Funktionale auf } L^p}} \frac{|\ell(\varphi)|}{\|\ell\|}.$$

Mit (a) können wir die obige Abschätzung folgendermaßen interpretieren: Für alle linearen stetigen Funktionale ℓ auf $L^p(\mathbb{T})$ gilt:

$$\left| \ell \left(\int_{\mathbb{T}} f(\cdot, s) ds \right) \right| \leq \|\ell\| \cdot \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{T})} ds.$$

Mit (b) folgt daraus die Ungleichung

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(\cdot, s) ds \right\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{T})} ds.$$

□

BEWEIS VON SATZ 1.28. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0,$$

wobei $f_\tau := f(\cdot - \tau)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\sup_{|\tau| \leq \delta} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} (k_n * f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f(t - \tau) d\tau - f(t) \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) (f(t - \tau) - f(t)) d\tau. \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.29 folgt daraus

$$\begin{aligned} \|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|k_n(\tau) (f(\cdot - \tau) - f)\|_{L^p(\mathbb{T})} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \cdot \|f(\cdot - \tau) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} d\tau. \end{aligned}$$

Wir zerlegen das Integral auf der rechten Seite in zwei Teile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)| \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} d\tau \\ &\leq \sup_{|\tau| \leq \delta} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| d\tau < \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |k_n(\tau)| \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} d\tau \\ &\leq \sup_{|\tau| \leq \pi} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |k_n(\tau)| d\tau \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

□

KOROLLAR 1.30. Sei $1 \leq p < \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{T})$ gilt

$$\sigma_n(f, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ in } L^p(\mathbb{T}),$$

$$A_r(f, \cdot) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f \text{ in } L^p(\mathbb{T}).$$

KOROLLAR 1.31 (Trigonometrischer Approximationssatz). *Trigonometrische Polynome sind dicht in $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.*

KOROLLAR 1.32 (Eindeutigkeitssatz). *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Gilt $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist $f = g$ f.ü.*

BEWEIS. Aus $\widehat{f} = \widehat{g}$ folgt $\sigma_n(f, \cdot) = \sigma_n(g, \cdot)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$, d.h. $f = g$ fast überall. \square

KOROLLAR 1.33. Sei $X = C(\mathbb{T})$ oder $X = L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ v = g & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit $g \in X$ besitzt genau eine Lösung. Sie ist durch $v(r, t) = (P_r * g)(t)$ gegeben. Genauer: Zu jedem $g \in X$ existiert genau eine harmonische Funktion $v(r, t)$ mit $\|v(r, \cdot) - g\|_X \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$.

BEWEIS. (1) Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Wir wollen die Reihe

$$(P_r * g)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}, \quad r < 1$$

differenzieren. Dafür brauchen wir das folgende Kriterium: Wenn die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u'_j(x)$ gleichmäßig in (a, b) konvergiert, dann ist

$$\frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u'_j(x).$$

Berechne

$$\begin{aligned} \Delta r^{|n|} e^{int} &= |n|(|n| - 1) r^{|n|-2} e^{int} + \\ &+ |n| r^{|n|-2} e^{int} - n^2 r^{|n|-2} e^{int} = 0 \text{ für } |n| \geq 2. \end{aligned}$$

Für $|n| = 1$ gilt

$$\Delta r^{|n|} e^{int} = \Delta r e^{\pm it} = \frac{1}{r} e^{\pm it} - \frac{1}{r} e^{\pm it} = 0.$$

Für $n = 0$ ist $\Delta \text{const} = 0$. Also ist $P_r * g$ harmonisch in $B_1(0)$.

(2) Die Grenzwerteigenschaft ist bereits bewiesen (s. Korollare 1.26 und 1.30).

(3) Eindeutigkeit.

(a) $X = C(\mathbb{T})$. Definiere

$$\bar{v}(r, t) := \begin{cases} v(r, t), & r < 1, \\ \lim_{r \rightarrow 1} v(r, t) = g(t), & r = 1. \end{cases}$$

BEHAUPTUNG 1. Die Funktion \bar{v} ist stetig auf $\overline{B_1(0)}$.

BEWEIS. Sei $(r_n, t_n) \in B_1(0)$ eine Folge mit $r_n \rightarrow 1, t_n \rightarrow t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\bar{v}(r_n, t_n) - \bar{v}(1, t)| &\leq |\bar{v}(r_n, t_n) - \bar{v}(1, t_n)| + |\bar{v}(1, t_n) - \bar{v}(1, t)| \\ &= |\bar{v}(r_n, t_n) - \bar{v}(1, t_n)| + |g(t_n) - g(t)|. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite konvergiert gegen Null für $n \rightarrow \infty$ nach der Definition von \bar{v} . Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert gegen Null, denn g ist stetig. □ B1

Nun wollen die Eindeutigkeit der Lösung zeigen.

BEHAUPTUNG 2. Sei $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ harmonisch. Dann ist

$$u(r, t) = (P_r * \varphi)(t)$$

für ein $\varphi \in C(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Setze $\varphi(t) := u(1, t)$. Betrachte

$$w(r, t) := u(r, t) - (P_r * \varphi)(t).$$

Die Funktion w ist harmonisch und es gilt $w(1, t) = 0$. Mit dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen (s. Vorlesungsskript zu partiellen Differenzialgleichungen) ist $w(r, t) = 0$ für alle $0 \leq r < 1$. □ B2

(b) Für $X = L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, können wir die Aussage noch nicht beweisen. Mit solchen Fragestellungen beschäftigt sich Harmonische Analysis. □

AUFGABE 1.34. Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit $g(t) = \sin 2t$.

1.6. Lokale Summierbarkeit von Fourierreihen

SATZ 1.35. Sei (k_n) eine Dirac-Folge, $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Es gelte

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |k_n(t)| = 0 \quad \forall \delta \in (0, \pi)$$

oder

$$(2) \quad f \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

Dann gilt:

(a) Ist f stetig im Punkt t_0 , so ist $(k_n * f)(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t_0)$;

(b) Ist die Dirac-Folge (k_n) symmetrisch, d.h. $k_n(-t) = k_n(t)$, und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h)}{2} =: L \text{ existiert, so gilt } (k_n * f)(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L.$$

BEWEIS. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \max_{|\tau| \leq \delta} |f(t_0 - \tau) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} |(k_n * f)(t_0) - f(t_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - f(t_0)) \, d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau| \leq \delta} |k_n(\tau)| |f(t_0 - \tau) - f(t_0)| \, d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |\tau| < \pi} |k_n(\tau)| |f(t_0 - \tau) - f(t_0)| \, d\tau \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Für I_1 gilt

$$I_1 \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|\tau| \leq \delta} |f(t_0 - \tau) - f(t_0)| \int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \, d\tau < \varepsilon.$$

Unter Voraussetzung (1) gilt

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sup_{\delta < |t| < \pi} |k_n(t)| \frac{1}{2\pi} |f(t_0 - \tau) - f(t_0)| \, d\tau \\ &\leq \sup_{\delta < |t| < \pi} |k_n(t)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t_0 - \tau)| \, d\tau + |f(t_0)| \right) \\ &= \sup_{\delta < |t| < \pi} |k_n(t)| \left(\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + |f(t_0)| \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und unter Voraussetzung (2)

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |\tau| < \pi} |k_n(\tau)| \, d\tau \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + |f(t_0)| \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Wegen der Symmetrie des Integralkernes $k_n(t)$ ist

$$(k_n * f)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi k_n(t) (f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)) \, d\tau.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\frac{1}{2} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \sup_{0 < \tau \leq \delta} |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} |(k_n * f)(t_0) - L| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |k_n(t)| |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| \, d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta |k_n(t)| |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| \, d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi |k_n(t)| |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| \, d\tau \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Für I_1 gilt

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \tau \leq \delta} |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| \int_0^\pi |k_n(\tau)| \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \sup_{0 < \tau \leq \delta} |f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau) - 2L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Unter Voraussetzung (1) ist

$$I_2 \leq \sup_{\delta < \tau < \pi} |k_n(t)| \left(2\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + L \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und unter Voraussetzung (2)

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |k_n(\tau)| d\tau \left(2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2L \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

BEMERKUNG. Später beweisen wir, dass $k_n * f \rightarrow f$ fast überall für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Was ist mit der Konvergenz der Fourierreihe selbst? Also für $k_n(t) = D_n(t)$?

SATZ 1.36 (Dini-Kriterium). Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Gilt

$$\int_0^{\pi} |f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)| \frac{ds}{s} < \infty$$

für ein $t \in \mathbb{T}$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ gegen $f(t)$.

BEWEIS. Betrachte die Differenz

$$\begin{aligned} S_n(f, t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) (f(t+s) - f(t)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) (f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)) ds. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) s \frac{s}{\sin(s/2)} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{s} ds.$$

Hier ist die Funktion $\frac{s}{\sin(s/2)}$ beschränkt und $\frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{s}$ integrierbar. Nach Lemma von Riemann-Lebesgue strebt das Integral gegen Null für $n \rightarrow \infty$. □

SATZ 1.37 (Jordan-Kriterium). Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig. Ist $f \in \text{BV}(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$, so konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int_0}$ gegen $\frac{1}{2}(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0))$.

BEMERKUNG. Die Existenz der einseitigen Grenzwerte $f(t_0 \pm 0)$ folgt aus der Voraussetzung $f \in \text{BV}(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$. Wir diskutieren diese Aussage ausführlich.

BEHAUPTUNG. Eine Funktion ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie sich als Differenz zweier monoton steigender beschränkter Funktionen darstellen lässt.

BEWEIS. Sei $f \in \text{BV}([a, b])$. Setze $u(x) := \text{Var}_{[a, x]}(f)$. Offenbar ist u monoton wachsend. Setze $v(x) := u(x) - f(x)$. Seien $x, x' \in [a, b]$, $x < x'$, beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(x') - v(x) &= \text{Var}_{[a, x']}(f) - \text{Var}_{[a, x]}(f) \\ &- (f(x') - f(x)) = \text{Var}_{[x, x']}(f) - (f(x') - f(x)) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\text{Var}_{[x, x']}(f) \geq |f(x') - f(x)|$ und somit $v(x') - v(x) \geq 0$. Umgekehrt, sei $f(x) = u(x) - v(x)$ mit u, v monoton wachsend und beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |u(x_i) - v(x_i) - u(x_{i-1}) + v(x_{i-1})| \\ &\leq |u(x_i) - u(x_{i-1})| + |v(x_i) - v(x_{i-1})|. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(f) &= \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq |u(b) - u(a)| + |v(b) - v(a)|. \end{aligned}$$

□

BEHAUPTUNG. Jede monoton wachsende beschränkte Funktion besitzt einseitige Grenzwerte.

BEWEIS. Seien $x \in (a, b]$ und $\delta > 0$ beliebig. Die Menge $f((x - \delta, x))$ ist nach oben beschränkt, d.h. $A := \sup_{y \in (x - \delta, x)} f(y) < \infty$. Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in (x - \delta, x)$ mit $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq A$. Aufgrund der Monotonie folgt $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq A$ für alle $x \in (x_\varepsilon, x)$, d.h. der einseitige Grenzwert $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ existiert und gleich A ist. □

BEWEIS VON SATZ 1.37. O.B.d.A. sei $t_0 = 0$. O.B.d.A. sei f monoton wachsend auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Es genügt zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt = \frac{1}{2} (f(0+) + f(0-)).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \right) D_n(t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(t) + f(-t)) dt \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(t) f(t) dt = \frac{1}{2} f(0+)$$

O.B.d.A. sei f monoton wachsend mit $f(0+) = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $0 \leq f(t) < \varepsilon$ für alle $0 < t < \delta$. Wir zerlegen das Integral in zwei Teile:

$$\int_0^\pi D_n(t) f(t) dt = \int_0^\delta D_n(t) f(t) dt + \int_\delta^\pi D_n(t) f(t) dt.$$

BEHAUPTUNG 1. (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, f monoton und g stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = f(a) \int_a^\xi g(t) dt + f(b) \int_\xi^b g(t) dt.$$

BEWEIS. O.B.d.A. sei f monoton wachsend. Setze

$$G(s) := \int_a^s g(t) dt.$$

(1) Für $f \in C^1([a, b])$ ist der Beweis sehr einfach. Mit der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g(t) dt &= f(t) G(t) \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t) G(t) dt \\ &= f(b) G(b) - \int_a^b f'(t) G(t) dt, \end{aligned}$$

wobei $f'(t) \geq 0$. Mit dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt die Existenz eines $\xi \in [a, b]$ so, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g(t) dt &= f(b) G(b) - G(\xi) \int_a^b f'(t) dt \\ &= f(b) G(b) - G(\xi) f(b) + G(\xi) f(a) \\ &= f(a) \int_a^\xi g(t) dt + f(b) \int_\xi^b g(t) dt. \end{aligned}$$

(2) Im allgemeinen Fall genügt es zu zeigen, dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt mit

$$f(b) G(b) - f(a) G(a) - \int_a^b f(t) g(t) dt = (f(b) - f(a)) G(\xi).$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gilt dies dann, wenn

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a)) \min G &\leq f(b) G(b) - f(a) G(a) - \int_a^b f(t) g(t) dt \\ &\leq (f(b) - f(a)) \max G. \end{aligned}$$

Sei $[a, b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}]$ mit $t_k < t_{k+1}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} f(b)G(b) - f(a)G(a) &= \sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1})G(t_{k+1}) - f(t_k)G(t_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) G(t_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) (G(t_{k+1}) - G(t_k)). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a)) \min G &\leq \sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) G(t_{k+1}) \\ &\leq (f(b) - f(a)) \max G \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) (G(t_{k+1}) - G(t_k)) - \int_a^b f(t)g(t)dt \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t_k) - f(t)) g(t)dt \end{aligned}$$

beliebig klein gemacht werden kann.

Ist f stetig, so gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$. Für jede Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $|t_{k+1} - t_k| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t_k) - f(t)) g(t)dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)| |g(t)|dt \\ &\leq \varepsilon \int_a^b |g(t)|dt. \end{aligned}$$

Sei nun f nicht stetig. Dann besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Daher ist die Menge

$$X := \{t \in [a, b] \mid f(t+0) - f(t-0) > \mu\}$$

für jedes $\mu > 0$ endlich. Wähle ein

$$\mu < \frac{\varepsilon}{4 \int_a^b |g(x)|dx}.$$

Setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2|X|(f(b) - f(a)) \max_{s \in [a, b]} |g(s)|}.$$

Wähle eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $t_{k+1} - t_k < \delta$ für alle $k = 0, \dots, N-1$. Dann ist

$$\sum_{\substack{k=0 \\ [t_k, t_{k+1}] \cap X \neq \emptyset}}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)| |g(t)| dt \leq |X| \delta (f(b) - f(a)) \max_{s \in [a, b]} |g(s)| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Menge

$$S := [a, b] \setminus \bigcup_{[t_k, t_{k+1}] \cap X \neq \emptyset} (t_k, t_{k+1}) = \bigcup_{[t_k, t_{k+1}] \cap X = \emptyset} [t_k, t_{k+1}]$$

ist kompakt. Zu jedem $t \in S$ gibt es eine Zahl $r(t) > 0$, sodass

$$f(t + 2r(t)) - f(t - 2r(t)) \leq 2\mu,$$

denn $\lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) - f(t-h)) \leq \mu$. Folglich gibt es eine endliche Überdeckung von S mit offenen Intervallen

$$(t_l - 2r(t_l), t_l + 2r(t_l)), \quad l = 1, \dots, M.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass jedes Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ in einer der Überdeckungsmengen $(t_l - 2r(t_l), t_l + 2r(t_l))$ liegt, sonst kann die Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ verfeinert werden. Also ist

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) \leq 2\mu.$$

Folglich ist

$$\sum_{\substack{k=0 \\ [t_k, t_{k+1}] \cap X = \emptyset}}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)| |g(t)| dt \leq 2\mu \int_a^b |g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Wenn wir die Funktion f umdefinieren und setzen $f(a) = f(a+)$, $f(b) = f(b-)$, bleibt die Funktion f monoton wachsend. Mit dem zweiten Mittelwertsatz können wir schreiben

$$\int_0^\delta D_n(t) f(t) dt = \underbrace{f(0+)}_{=0} \int_0^\xi D_n(t) dt + f(\delta-) \int_\xi^\delta D_n(t) dt.$$

Also ist

$$\int_0^\pi D_n(t) f(t) dt = f(\delta-) \int_\xi^\delta D_n(t) dt + \int_\delta^\pi D_n(t) f(t) dt.$$

Das zweite Integral strebt gegen Null für $n \rightarrow \infty$ nach Lemma von Riemann-Lebesgue. Ferner ist $f(\delta-) < \varepsilon$. Somit genügt es zu beweisen, dass $\int_\xi^\delta D_n(t) dt$ gleichmäßig bezüglich ξ, δ und n beschränkt ist.

BEHAUPTUNG 2. $\int_0^\delta D_n(t) dt$ ist gleichmäßig beschränkt bezüglich $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$.

BEWEIS. Betrachte zunächst

$$\int_0^\delta \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt \stackrel{s=(n+1/2)t}{=} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin s}{s} ds = \text{Si}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\delta\right),$$

wobei die Funktion

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin s}{s} ds$$

wird als *Integralsinus* bezeichnet. Wegen

$$\frac{d}{dx} \text{Si}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} \text{Si}(x) \right|_{x=k\pi} = \left. \frac{\cos x}{x} \right|_{x=k\pi} - \left. \frac{\sin x}{x^2} \right|_{x=k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}$$

besitzt der Integralsinus lokale Minima an den Stellen $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ und lokale Maxima an den Stellen $x = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\text{Si}(\pi) > 0$. Betrachte

$$\begin{aligned} \text{Si}(2\pi) &= \text{Si}(\pi) + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin s}{s} ds \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} ds - \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s+\pi} ds > 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \text{Si}(3\pi) &= \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} ds - \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s+\pi} ds + \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s+2\pi} ds \\ &< \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} ds \end{aligned}$$

und

$$\text{Si}(3\pi) > \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} ds - \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} ds = 0.$$

Durch rekursives Anwenden dieser Analyse erhält man die zweiseitige Abschätzung

$$0 < \text{Si}(x) \leq \text{Si}(\pi) = 1,851937\dots$$

Nun betrachte das Integral

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_0^{\delta} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin t/2} dt &= 2 \int_0^{\delta} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt \\ &+ \int_0^{\delta} \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) \left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \right) = 0$$

und somit ist die Funktion $\left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right)$ integrierbar auf dem Intervall $(0, \pi)$. Nach Lemma von Riemann-Lebesgue konvergiert das zweite Integral in (*) gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Folglich ist dieses Integral ebenfalls gleichmäßig beschränkt. B2

Nach Behauptung 2 ist das Integral $\int_{\xi}^{\delta} D_n(t) dt$ gleichmäßig beschränkt bezüglich ξ, δ und n . Daher existiert ein $C > 0$ sodass

$$\left| f(\delta-) \int_{\xi}^{\delta} D_n(t) dt \right| \leq C\varepsilon,$$

d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\xi}^{\delta} D_n(t) f(t) dt \right| \leq C\varepsilon.$$

□

Die Konvergenzkriterien von Dini und von Jordan sind unabhängig voneinander. Um das zu sehen betrachten wir zwei Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|\log t/2\pi|}, & 0 < t \leq \pi \\ 0, & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

und

$$g(t) = \begin{cases} t^\alpha \sin \frac{1}{t}, & 0 < t \leq \pi \\ 0, & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

für ein $\alpha \in (0, 1)$. Die Funktion f ist beschränkt und monoton wachsend, somit erfüllt das Jordan-Kriterium. Jedoch erfüllt sie das Dini-Kriterium nicht, denn

$$\int_0^\pi \frac{|f(t) + f(-t) - 2f(0)|}{t} dt = \int_0^\pi \frac{dt}{t |\log \frac{t}{2\pi}|} = \infty.$$

Die Funktion g ist nicht von lokal beschränkter Variation in jeder Umgebung von $t = 0$, denn

$$\frac{d}{dt} t^\alpha \sin \frac{1}{t} = \alpha t^{\alpha-1} \sin \frac{1}{t} - t^{\alpha-2} \cos \frac{1}{t}$$

ist nicht absolut integrierbar. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{|g(t) + g(-t) - 2g(0)|}{t} dt &= \int_0^\pi \frac{|g(t)|}{t} dt = \int_0^\pi t^{\alpha-1} \left| \sin \frac{1}{t} \right| dt \\ &\stackrel{s=1/t}{=} \int_{1/\pi}^\infty s^{-\alpha-1} |\sin s| ds < \infty. \end{aligned}$$

Also erfüllt die Funktion g das Dini-Kriterium, aber nicht das Jordan-Kriterium.

Eine Verallgemeinerung von beiden Kriterien stellt das de la Vallée Poussin Kriterium dar.

SATZ 1.38 (de la Vallée Poussin Kriterium). Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig. Ist die Funktion

$$\varphi(t) := \frac{1}{t} \int_0^t (f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)) ds$$

von beschränkter Variation im Intervall $(0, \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$, so ist die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int_0}$ konvergent. Gilt $\varphi(0+) = 0$, so ist der Grenzwert $f(t_0)$.

Erfüllt eine Funktion die Voraussetzung des Jordan- oder des Dini-Kriteriums, so erfüllt sie auch die Voraussetzung des de la Vallée Poussin-Kriteriums. Für den Beweis diese Aussage brauchen wir folgendes Ergebnis.

BEHAUPTUNG. Sei g eine Funktion beschränkter Variation in einem Intervall $(0, \varepsilon_0)$. Dann ist auch $G(x) := \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ von beschränkter Variation in $(0, \varepsilon_0)$.

BEWEIS. O.B.d.A. sei g monoton steigend und beschränkt. Die Funktion G ist fast überall differenzierbar mit

$$G'(x) = \frac{g(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) dt.$$

Wegen der Monotonie von g gilt

$$\int_0^x g(t) dt \leq \int_0^x g(x) dt = xg(x).$$

Also ist

$$G'(x) \geq \frac{g(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0,$$

d.h. G ist monoton wachsend. □

Sei nun g eine Funktion beschränkter Variation in einem Intervall $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \subset \mathbb{T}$. Dann ist $s \mapsto f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)$ von beschränkter Variation. Nach der Behauptung ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)) ds$$

ebenfalls von beschränkter Variation. Also impliziert die Jordan-Bedingung die de la Vallée Poussin-Bedingung. Nun sei die Funktion

$$s \mapsto \frac{f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)}{s}$$

integrierbar. Dann ist

$$\psi(t) := \int_0^t \frac{f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)}{s} ds$$

von beschränkter Variation. Wegen der Identität

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s \psi'(t) ds = \psi(t) - \frac{1}{t} \int_0^t \psi(t) dt$$

folgt mit der Behauptung, dass φ auch von beschränkter Variation ist. Also impliziert auch die Jordan-Bedingung die de la Vallée Poussin-Bedingung.

KOROLLAR 1.39. Sei $f \in C(\mathbb{T}) \cap BV(\mathbb{T})$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f für alle $t \in \mathbb{T}$ gegen f .

AUFGABE 1.40. Sei $f \in C(\mathbb{T}) \cap BV(\mathbb{T})$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gegen f gleichmäßig.

SATZ 1.41. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

- (1) Ist f stetig im Punkt $t_0 \in \mathbb{T}$ und $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum \hat{f}(n) e^{int_0}$ gegen $f(t_0)$.
- (2) Ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum \hat{f}(n) e^{int}$ gegen $f(t)$ gleichmäßig.

BEWEIS.

- (1) Nach Satz 1.35 ist $\sigma_n(f, t_0) \rightarrow f(t_0)$.
 (2) Nach Satz 1.25 ist $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ gleichmäßig.

Dass auch die Partialsummen der Fourierreihe dieselbe Konvergenzeigenschaften wie ihre Cesàro-Mittelwerte haben, folgt aus dem folgenden Ergebnis:

AUFGABE 1.42. Ist die Reihe $\sum c_n$ Cesaro-summierbar mit Grenzwert s und $c_n = O(\frac{1}{n})$, so konvergiert die Reihe $\sum c_n$ gegen s .
 Hinweis: Benutze das Kriterium (Satz 1.19) für die Cesàro-Summierbarkeit.

□

1.7. Konvergenz von Fourierreihen fast überall (Ausblick)

SATZ 1.43 (Kolmogorov). Es gibt ein $f \in L^1(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe überall divergent ist, d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f, t)| = \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Der Beweis ist sehr lang und nicht konstruktiv (siehe z.B. Grafakos „Classical Fourier Analysis“).

SATZ 1.44 (du Bois Reymond). Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe im Punkt $t = 0$ divergent ist, d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f, 0)| = \infty.$$

- BEMERKUNG.** (1) Nach Satz 1.44 existiert ein $f \in C(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe in endlich vielen Punkten $t \in \mathbb{T}$ divergent ist.
 (2) (Katznelson) Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$ und eine dichte Nullmenge $N \subset \mathbb{T}$, so dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f, t)| = \infty \quad \text{für alle } t \in N.$$

Es gibt zwei prinzipiell verschiedene Beweise von Satz 1.44

- (1) Analytisch und konstruktiv (Fejer),
 (2) Funktionalanalytisch und nicht konstruktiv.

Wir diskutieren den funktionalanalytischen Beweis.

BEWEIS VON SATZ 1.44. Sei $T_n : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto S_n(f, 0)$. Die Operatoren T_n sind linear und beschränkt, denn

$$\begin{aligned} |T_n f| &= |S_n(f, 0)| = |(D_n * f)(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) f(0 - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \Rightarrow \|T_n\| \leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 1. $\|T_n\| = \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $I_n \subset \mathbb{T}$ die Vereinigung offener Intervalle mit Mittelpunkten

$$\{t \in \mathbb{T} | D_n(t) = 0\} = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{0\} | \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = 0\}$$

und Gesamtlänge kleiner als $\frac{\varepsilon}{2n+1}$. Sei $g_n \in C(\mathbb{T})$ beliebig mit

- (1) $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1$,
- (2) $g_n(t) = g_n(-t)$,
- (3) $g_n(t) = \begin{cases} 1, & D_n(t) > 0, t \notin I_n \\ -1, & D_n(t) < 0, t \notin I_n. \end{cases}$

Dann gilt

$$|T_n(g_n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau \right|.$$

Zunächst betrachte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau &= \int_{\mathbb{T} \setminus I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau + \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{T} \setminus I_n} |D_n(\tau)| d\tau + \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau \right| &\leq \int_{I_n} |D_n(\tau)| \cdot |g_n(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{I_n} |D_n(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

ist

$$\int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau \geq - \int_{I_n} |D_n(\tau)| d\tau$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau &\geq \int_{\mathbb{T} \setminus I_n} |D_n(\tau)| d\tau - \int_{I_n} |D_n(\tau)| d\tau \\ &= \int_{\mathbb{T}} |D_n(\tau)| d\tau - 2 \int_{I_n} |D_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung $|D_n(\tau)| \leq 2n+1$ folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) d\tau &\geq 2\pi \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - 2(2n+1) \frac{\varepsilon}{2n+1} \\ &= 2\pi \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - 2\varepsilon \\ &= 2\pi \left(\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$$

und somit

$$|T_n(g_n)| \geq \left(\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

d.h.

$$\|T_n\| \geq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$\|T_n\| \geq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Mit Proposition 1.22 folgt aus Behauptung 1 die Abschätzung $\|T_n\| \geq c \log n + d$ für gewisse Konstanten $c, d \geq 0$.

BEHAUPTUNG 2. Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| = \infty$$

BEWEIS. Angenommen, es gelte $\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$, d.h. $\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| < C_f$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (s. Funktionalanalysis) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Widerspruch! □

Existiert eine stetige Funktion mit der Fourierreihe, die auf einer Teilmenge von \mathbb{T} mit positivem Lebesgue-Maß divergiert? Nein! Das folgt aus dem Satz von Carleson-Hunt:

SATZ 1.45 (Carleson-Hunt). Sei $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Dann gilt

$$S_n(f, t) \longrightarrow f(t) \quad \text{fast überall.}$$

Dieser Satz galt lange Zeit als Lusinsche Vermutung (1913), wurde bewiesen von Carleson (1966) für $p = 2$ und Hunt (1967) für $1 < p < \infty$. Den Beweis findet man z.B. in Reyna „Pointwise Convergence of Fourier Series“.

1.8. Integration der Fourierreihen

Sei $f \in L^1(\mathbb{T}), \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ dessen Fourierreihe. Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f , so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) ds &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^t e^{ins} ds \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \begin{cases} \frac{1}{in} (e^{int} - 1), & n \neq 0 \\ t, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Für Fourierreihen gilt wesentlich mehr.

SATZ 1.46. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit der Fourierreihe $\sum c_n e^{int}$ (keine Voraussetzung bezüglich der Konvergenz). Dann gilt

$$\int_0^t f(s) ds = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^t e^{ins} ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

BEWEIS. Setze

$$F(t) = \int_0^t (f(s) - c_0) ds.$$

Dann ist $F(0) = 0$ und $F(2\pi) = 2\pi c_0 - 2\pi c_0 = 0$. Also ist $F \in C(\mathbb{T})$.

BEHAUPTUNG. $F \in BV(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Sei $g_+(s) := \max\{f(s) - c_0, 0\}$ und $g_-(s) := -\min\{f(s) - c_0, 0\}$. Dann sind g_{\pm} nichtnegativ und

$$f(s) - c_0 = g_+(s) - g_-(s)$$

und folglich

$$F(t) = \int_0^t g_+(s) ds - \int_0^t g_-(s) ds.$$

Die beiden Integrale sind monoton wachsend. \square

Nach Korollar 1.39 konvergiert die Fourierreihe von F gegen F für alle $t \in \mathbb{T}$. Nach Aufgabe 1.40 ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von F für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} d_n &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^t f(s) ds \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} F(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{t=-\pi}^{t=+\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt = \frac{1}{in} c_n. \end{aligned}$$

Also ist

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in} e^{int} + d_0.$$

Für $t = 0$ ist $F(0) = 0$ und somit

$$d_0 = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in} e^{int} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in} (e^{int} - 1), \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) ds &= c_0 t + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{in} (e^{int} - 1) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n \int_0^t e^{ins} ds. \end{aligned}$$

\square

Aus dem Beweis folgt, dass die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{n}$ konvergent ist. Mit dieser Beobachtung können wir trigonometrische Reihen konstruieren, die keine Fourierreihen sind. Zum Beispiel $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ ist keine Fourierreihe,

denn $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ist divergent.

BEHAUPTUNG 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{T}$.

BEWEIS. Für $t = 0$ ist die Konvergenz klar. Für $t \neq 0$ benutzen wir das Dirichlet-Kriterium:

- (1) Die Partialsummen $\sum_{k \leq N} a_k$ seien gleichmäßig beschränkt,
- (2) $b_n \rightarrow 0$ monoton fallend.

Dann ist die Reihe $\sum_n a_n b_n$ konvergent.

Wir betrachten die Partialsummen $\sum_{n=1}^N \sin(nt)$ statt $\sum_{n=2}^N \sin(nt)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sin(nt) &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N e^{int} = \operatorname{Im} \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(e^{it} - e^{i(N+1)t})(1 - e^{-it}) - (e^{-it} - e^{-i(N+1)t})(1 - e^{it})}{(1 - e^{it})(1 - e^{-it})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin t - \sin(N+1)t + \sin Nt}{1 - \cos t}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nt) \right| \leq \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \cos t}.$$

B1

BEHAUPTUNG 2. Die Funktion

$$f(t) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$$

ist nicht integrierbar.

BEWEIS. Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ konvergiert gleichmäßig für alle $t \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$, denn

$$\frac{1}{1 - \cos t} \leq C_\delta$$

für alle $t \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$. Dann gilt für jedes $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_t^\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(ns)}{\log n} ds &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_t^\pi \frac{\sin(ns)}{\log n} ds \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(ns)}{n \log n} \Big|_{s=t}^{s=\pi} \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n \log n}. \end{aligned}$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n \log n} = \infty.$$

B2

BEMERKUNG. Es besteht eine Verbindung zwischen Fourier- und Taylorreihen. Es gilt

$$\log\left(1 + \frac{z}{2}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{2^n n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$. Setze $z = e^{it}$:

$$\log\left(1 + \frac{e^{it}}{2}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{itn}}{2^n n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{itn}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n}{2^n n}, & n \geq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Koeffizienten c_n sind die Fourierkoeffizienten der Funktion $t \mapsto \log\left(1 + \frac{e^{it}}{2}\right)$.

1.9. Konvergenz im quadratischen Mittel

SATZ 1.47. (a) Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt \quad (\text{Parsevalsche Identität})$$

und

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int} \text{ bezüglich der } L^2\text{-Norm}$$

(b) Zu jeder Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ gibt es genau ein $f \in L^2(\mathbb{T})$, so dass $c_n = \widehat{f}(n)$.

(c) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(n)} \widehat{g}(n)$$

BEMERKUNG. (1) $L^2(\mathbb{T})$ und $l^2(\mathbb{Z})$ sind Hilberträume mit Skalarprodukten

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} g(t) dt, \\ \langle c, d \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} &:= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{c_j} d_j. \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt erfüllt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

(2) Nach Satz 1.47 ist die Abbildung $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen, d.h. $\widehat{\cdot}$ ist eine lineare isometrische Bijektion, die das Skalarprodukt erhält.

FUNKTIONALANALYTISCHE BEWEIS. Sei $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\{e_j | j \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Orthonormalsystem, d.h. $\langle e_j, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \delta_{jk}$ für alle $j, k \in \mathbb{Z}$. Es gelte $\langle e_j, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ für ein $f \in L^2(\mathbb{T})$. Dann sind alle Fourierkoeffizienten von f Null. Nach Korollar 1.32 gilt $f = 0$ fast überall. Also

ist $\{e_j | j \in \mathbb{Z}\}$ ein maximales Orthonormalsystem, d.h. eine Orthonormalbasis. Die Aussagen (a), (b), (c) folgen nun aus dem Entwicklungssatz für Hilberträume. \square

ANALYTISCHER BEWEIS. Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig, $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten von f . Setze

$$\varphi(t) := f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

und berechne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\varphi(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N c_n \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} e^{int} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N c_n \overline{c_n} - \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} c_n + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Also gilt die Ungleichung

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt, \quad (\text{Besselsche Ungleichung})$$

die impliziert, dass die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ konvergent ist mit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt.$$

(2) Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ beliebig. Setze $S_N(t) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$. Sei $M < N$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |S_N(t) - S_M(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{n=-N}^{-M-1} c_n e^{int} + \sum_{n=M+1}^N c_n e^{int} \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=-N}^{-M-1} |c_n|^2 + \sum_{n=M+1}^N |c_n|^2 \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also ist $(S_N(t))_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{T})$. Wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{T})$ ist diese Folge konvergent, d.h. $\|f - S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ für ein $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Wir berechnen nun die Fourierkoeffizienten der Funktion f :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt = \langle e_n, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

BEHAUPTUNG 1. $\langle e_n, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle e_n, S_N \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$.

BEWEIS. Mit der Cauchy-Schwarzchen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} |\langle e_n, f \rangle - \langle e_n, S_N \rangle| &= |\langle e_n, f - S_N \rangle| \\ &\leq \|e_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \|f - S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

B1

Also gilt

$$\widehat{f}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle e_n, S_N \rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} S_n(t) e^{-int} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} c_n, & |n| \leq N, \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

und daher $\widehat{f}(n) = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit ist die Aussage (b) bewiesen.

(3) Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Wegen (1) ist die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ konvergent. Nach (2) existiert eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$g(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int}$$

bezüglich der L^2 -Norm. Nach Korollar 1.32 gilt $f(t) = g(t)$ fast überall.

$$\text{Setze } S_N(t) := \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int}.$$

BEHAUPTUNG 2. Es gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$.

BEWEIS. Betrachte

$$\begin{aligned} \|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \langle S_N, S_N \rangle - \langle f, f \rangle \\ &= \langle S_N, S_N \rangle - \langle S_N, f \rangle + \langle S_N, f \rangle - \langle f, f \rangle \\ &= \langle S_N, S_N - f \rangle + \langle S_N - f, f \rangle. \end{aligned}$$

Nun erhalten wir mit der Cauchy-Schwarzchen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right| &\leq |\langle S_N, S_N - f \rangle| + |\langle S_N - f, f \rangle| \\ &\leq \|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\quad + \|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq 2 \|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Hier wurde in dem letzten Schritt die Abschätzung

$$\|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

benutzt.

B2

Also ist $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$. Die Aussage (a) ist somit bewiesen.

(4) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Analog zu Behauptung 2 lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N(f, \cdot), S_N(g, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Wegen

$$\langle S_N(f, \cdot), S_N(g, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=-N}^N \overline{\widehat{f}(n)} \widehat{g}(n)$$

ist somit die Aussage (c) bewiesen. \square

Mithilfe der Interpolationstheorie, genauer des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin, kann man zeigen, dass die Abbildung $\widehat{\cdot} : L^p(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^q(\mathbb{Z})$ für alle $p \in (1, 2)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wohldefiniert und stetig ist. Für alle $f \in L^p(\mathbb{T})$ gilt die Ungleichung von Hausdorff-Young:

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^p < \infty$ eine Funktion $f \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\widehat{f}(n) = c_n$ und

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^p \right)^{1/p}.$$

Der Satz von Hausdorff-Young gilt nicht für $p > 2$!

1.10. Die Wiener-Algebra und der Satz von Bernstein

DEFINITION 1.48. Sei

$$A(\mathbb{T}) := \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty\}.$$

Offensichtlich ist $A(\mathbb{T})$ ein Vektorraum.

LEMMA 1.49. Ist $f \in A(\mathbb{T})$, so ist f fast überall stetig. Genauer: Die Funktion f kann auf einer Nullmenge so abgeändert werden, dass sie stetig wird.

BEWEIS. Ist $f \in A(\mathbb{T})$, so ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ konvergent. Daher ist

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \left| \sum_{|n| > N} \widehat{f}(n) e^{int} \right| \leq \sum_{|n| > N} |\widehat{f}(n)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ gleichmäßig und folglich ist die Funktion

$$t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$$

stetig.

Andererseits folgt aus $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$, denn $x^2 \leq x$ für $x \in [0, 1]$. Nach Satz 1.47 ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ und mit Satz von Carleson-Hunt (Satz 1.45)

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} \quad \text{fast überall.}$$

\square

LEMMA 1.50. Die Abbildung $\widehat{\cdot} : A(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$ ist eine lineare Bijektion.

BEWEIS. Die Injektivität folgt aus dem Eindeutigkeitsatz (Korollar 1.32). Für den Beweis der Surjektivität sei $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine beliebige Folge in $\ell^1(\mathbb{Z})$. Betrachte

$$g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

Wie oben zeigt man, dass diese Reihe gleichmäßig konvergent ist und somit $g \in L^1(\mathbb{T})$. \square

LEMMA 1.51. *Das Funktional*

$$f \mapsto \|f\|_{A(\mathbb{T})} := \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$$

ist eine Norm auf $A(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Ist $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = 0$, so ist $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und somit $f = 0$ fast überall. Die anderen Normaxiome lassen sich einfach überprüfen. \square

LEMMA 1.52. $C^1(\mathbb{T}) \subset A(\mathbb{T})$ und für jedes $f \in C^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

BEWEIS. Sei $f \in C^1(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} f(t) e^{-int} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - (-in) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt = in \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Da f' stetig ist, ist $f' \in L^2(\mathbb{T})$ und

$$\|f'\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}'(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n \widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|n|} |n \widehat{f}(n)| + |\widehat{f}(0)| \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |n \widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} + |\widehat{f}(0)| \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f'(t)|^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

denn $\pi < 2\sqrt{3}$. \square

LEMMA 1.53. *Der normierte Raum $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})})$ ist vollständig.*

BEWEIS. Der normierte Raum $\ell^1(\mathbb{Z})$. Da $\widehat{\cdot} : A(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$ eine Bijektion ist, genügt es zu zeigen, dass $\widehat{\cdot}$ stetig ist. Das folgt aus der Definition der $A(\mathbb{T})$ -Norm: $\|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \|f\|_{A(\mathbb{T})}$, d.h. $\|\widehat{\cdot}\| = 1$. \square

Nun definieren wir die Faltung zweier Folgen $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ durch

$$(a * b)(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m)b(n-m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(n-m)b(m).$$

Die Faltung liegt wieder in $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \|a * b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m)b(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a(m)||b(n-m)| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(m)||b(k)| = \|a\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

AUFGABE. Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung für Folgen: Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Ist $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $b \in \ell^q(\mathbb{Z})$, so gilt $a * b \in \ell^r(\mathbb{Z})$ und

$$\|a * b\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|b\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

DEFINITION 1.54. Ein Banachraum X mit Multiplikation $X \times X \rightarrow X$ heißt Banachalgebra, falls gilt

- (1) $(X, +, \cdot)$ ist eine assoziative \mathbb{C} -Algebra, d.h. die Multiplikation ist bilinear $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha x \cdot z + \beta y \cdot z$, $z \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha z \cdot x + \beta z \cdot y$ und assoziativ;
- (2) $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$.

SATZ 1.55. $A(\mathbb{T})$ mit Punktweiser Multiplikation von Funktionen ist eine Banachalgebra. Sie heißt die Wiener-Algebra.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass $fg \in A(\mathbb{T})$ und $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \|g\|_{A(\mathbb{T})}$ für alle $f, g \in A(\mathbb{T})$. Seien $f, g \in A(\mathbb{T})$ beliebig. Dann ist das Produkt fg fast überall stetig und somit integrierbar. Wir berechnen seine Fourierkoeffizienten und benutzen dabei, dass $A(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{imt} \right) g(t)e^{-int} dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-i(n-m)t} dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \widehat{g}(n-m) = (\widehat{f} * \widehat{g})(n). \end{aligned}$$

Mit der Youngschen Ungleichung für Folgen erhalten wir

$$\|\widehat{fg}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \|\widehat{f} * \widehat{g}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|\widehat{g}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})},$$

d.h. $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \|g\|_{A(\mathbb{T})}$. □

SATZ 1.56 (Bernstein). Sei $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ mit $1/2 < \alpha \leq 1$. Dann ist $f \in A(\mathbb{T})$ mit

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq C_\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}.$$

Hier ist $C_\alpha > 0$ eine Konstante, die nur von α abhängt und

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \sup_{\substack{t,s \in \mathbb{T} \\ t \neq s}} \frac{|f(s) - f(t)|}{d(t,s)^\alpha}$$

die Norm im Hölder-Raum $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Wir brauchen die elementare Ungleichung

$$(1.3) \quad |e^{it} - 1| \geq \frac{2|t|}{\pi}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Wegen

$$|e^{it} - 1|^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

kann diese aus $|\sin x| \geq \frac{2|x|}{\pi}$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ gefolgert werden kann.

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $2^m \leq |n| < 2^{m+1}$ beliebig. Setze $h = \frac{2\pi}{4 \cdot 2^m}$. Dann ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4 \cdot 2^m} 2^m \leq |n|h < \frac{2\pi}{4 \cdot 2^m} 2^{m+1} = \pi.$$

Mit (1.3) folgt daraus, dass

$$|e^{it} - 1| \geq \frac{2|n|h}{\pi} \geq 1.$$

Nun betrachten wir

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{inh} - 1|^2 |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{inh} \widehat{f}(n) - \widehat{f}(n)|^2.$$

Nach Satz 1.2(c) ist $e^{inh} \widehat{f}(n)$ ist der n -te Fourierkoeffizient der Funktion $f_h(t) := f(t+h)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_h(n) - \widehat{f}(n)|^2 = \|f_h - f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq \|f_h - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2 \leq h^{2\alpha} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}^2 \\ &= \left(\frac{2\pi}{4 \cdot 2^m} \right)^{2\alpha} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \left(\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)| \right)^2 &\leq \left(\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} 1 \right) \left(\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \right) \\ &\leq 2^m \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq 2^m \left(\frac{2\pi}{4 \cdot 2^m} \right)^{2\alpha} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}^2 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)| \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}_0} 2^{m/2} \left(\frac{2\pi}{4 \cdot 2^m} \right)^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha \sum_{m \in \mathbb{N}_0} 2^{m(1/2-\alpha)} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \\ &= \frac{(\pi/2)^\alpha}{1 - 2^{1/2-\alpha}} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Wegen

$$|\widehat{f}(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) dt \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}$$

erhalten wir dann

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq C_\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \quad \text{mit} \quad C_\alpha = \frac{(\pi/2)^\alpha}{1 - 2^{1/2-\alpha}} + 1.$$

□

BEMERKUNG. (1) Die Voraussetzung $\alpha > 1/2$ kann nicht geschwächt werden. Dazu betrachte die Hardy-Littlewood-Funktion

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{in \log n}}{n} e^{int}.$$

Die Reihe konvergiert bezüglich der L^2 -Norm. Die Funktion f liegt nicht in $A(\mathbb{T})$, jedoch gilt $f \in C^{0,1/2}(\mathbb{T})$.

(2) Typische Pfade der Brownschen Bewegung liegen in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ mit $0 < \alpha < 1/2$.

Nun zeigen wir, dass Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion beliebig langsam abfallen können.

PROPOSITION 1.57. Sei (α_k) eine beliebige monoton fallende Folge mit $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \rightarrow 0$. Dann existiert eine stetige Funktion $f \in A(\mathbb{T})$ mit $\widehat{f}(n) = O(\alpha_n)$, d.h. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\alpha_n} = 1$.

BEWEIS. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ seien $n_k \in \mathbb{N}$ die kleinsten natürlichen Zahlen mit $1/\alpha_{n_k} \geq k^2$. Setze

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{n_k} e^{in_k t}.$$

Wegen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\widehat{f}(n_k)| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-2} < \infty$$

liegt die Funktion f in $A(\mathbb{T})$. Offenbar gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\alpha_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\widehat{f}(n_k)}{\alpha_{n_k}} = 1.$$

□

Man kann auch zeigen, dass die Partialsummen der Fourierreihen einer stetigen Funktion f stets langsamer als der Logarithmus wachsen, d.h. $S_n(f, t) = o(\log n)$.

SATZ 1.58. $f \in A(\mathbb{T})$ gilt genau dann, wenn $f = g * h$ fast überall für $g, h \in L^2(\mathbb{T})$.

BEWEIS. „ \Leftarrow “ Sind $g, h \in L^2(\mathbb{T})$, so sind $\widehat{g}, \widehat{h} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Somit gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{g * h}(n)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{g}(n)| |\widehat{h}(n)| \leq \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{Z})} \|\widehat{h}\|_{L^2(\mathbb{Z})},$$

also ist $g * h \in A(\mathbb{T})$.

„ \Rightarrow “ Sei $f \in A(\mathbb{T})$ beliebig. Dann ist $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Setze

$$c_n := |\widehat{f}(n)|^{1/2} \quad \text{und} \quad d_n := \text{sign} \widehat{f}(n) |\widehat{f}(n)|^{1/2},$$

sodass $c_n d_n = \widehat{f}(n)$. Dann sind die Folgen (c_n) und (d_n) quadratisch summierbar. Definiere

$$g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}, \quad h(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{int}.$$

Offenbar sind die Funktionen g und h quadratisch integrierbar. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{g * h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(s) h(t-s) ds \right) e^{-int} dt \\ &\stackrel{\tau=t-s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(s) e^{-ins} ds \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(\tau) e^{-in\tau} d\tau \\ &= \widehat{g}(n) \widehat{h}(n) = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit gilt $g * h = f$ fast überall. \square

SATZ 1.59 (Wiener). Ist $f \in A(\mathbb{T})$ und $f(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, dann ist $1/f \in A(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Für beliebiges $h \in A(\mathbb{T})$ gilt

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &= \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{h}(m) e^{imt} \right| \leq \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{h}(m)| = \|h\|_{A(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.51 gilt für beliebiges $g \in C^1(\mathbb{T})$

$$\|g\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|g'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

O.B.d.A. sei $|f(t)| \geq 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\|f - S_N(f, \cdot)\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{|m| \geq N} |\widehat{f}(m)| \leq \frac{1}{3}.$$

Dann ist

$$\|f - S_N(f, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{3}$$

und somit

$$|S_n(f, t)| \geq \underbrace{|f(t)|}_{\geq 1} - \underbrace{|S_N(f, t) - f(t)|}_{\leq 1/3} \geq \frac{2}{3}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| \frac{S_N(f, t) - f(t)}{S_N(f, t)} \right| &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{f(t)} &= \frac{1}{f(t) - S_N(f, t) + S_N(f, t)} = \frac{1}{S_N(f, t) \left(1 - \frac{S_N(f, t) - f(t)}{S_N(f, t)}\right)} \\ &= \frac{1}{S_N(f, t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_N(f, t) - f(t)}{S_N(f, t)} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_N(f, t) - f(t))^n}{S_N(f, t)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass diese Reihe auch bezüglich der $A(\mathbb{T})$ -Norm konvergiert. Dazu betrachte

$$\left\| \frac{(S_n(f, \cdot) - f)^n}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \leq \left\| \frac{1}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \|(S_n(f, \cdot) - f)^n\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Für den zweiten Faktor auf der rechten Seite dieser Ungleichung gilt

$$\|(S_n(f, \cdot) - f)^n\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|S_N(f, \cdot) - f\|_{A(\mathbb{T})}^n \leq \frac{1}{3^n}.$$

Der erste Faktor kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \\ &\leq_{S_N(f, \cdot) \in C^1} \left\| \frac{1}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2 \left\| \frac{(n+1)S'_N(f, \cdot)}{S_N(f, \cdot)^{n+2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\leq_{|S_N(f, t)| \geq \frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + 2(n+1) \left(\frac{3}{2} \right)^{n+2} \|S'_N(f, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{(S_n(f, \cdot) - f)^n}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \\ &\leq \frac{1}{3^n} \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + 2(n+1) \frac{1}{3^n} \left(\frac{3}{2} \right)^{n+2} \|S'_N(f, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &= \frac{3}{2^{n+1}} + 18(n+1) \frac{1}{2^{n+2}} \|S'_N(f, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(S_n(f, \cdot) - f)^n}{S_N(f, \cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})}$$

konvergent. Da der normierter Raum vollständig ist, konvergiert somit auch die Reihe

$$\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_N(f, \cdot) - f)^n}{S_N(f, \cdot)^{n+1}}$$

bezüglich der $A(\mathbb{T})$ -Norm. Also ist $1/f \in A(\mathbb{T})$. \square

1.11. Das Gibbsche Phänomen

Wir haben bereits die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

betrachtet. Ihre Fourierkoeffizienten lauten

$$\hat{f}(n) := \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z} \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi i n}, & n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nach Jordan-Kriterium konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$ gegen $f(t)$ für alle $t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ und gegen 0 für $t = 0$. Also konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$ gegen $f(t)$ punktweise in $(-\pi, \pi)$. In jedem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig! [Sonst wäre die Funktion $f(t)$ stetig]

Betrachte die partielle Summe

$$\begin{aligned} S_N(f, t) &= \sum_{\substack{n=-N \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{2e^{int}}{\pi i n} = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin(nt)}{n} \end{aligned}$$

Wir wollen diese Summe genauer untersuchen. Sei N ungerade. Betrachte

$$\begin{aligned}
 S'_N(f, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \cos(nt) \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N (e^{itn} + e^{-itn}) \\
 q + q^3 + \dots + q^N &= q(1 + q^2 + \dots + q^{N-1}) \\
 &= q \frac{1 - (q^2)^{\frac{N-1}{2}+1}}{1 - q^2} = q \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q^2} \\
 \Rightarrow S'_N(f, t) &= \frac{2}{\pi} \left(e^{it} \frac{1 - e^{it(N+1)}}{1 - e^{2it}} + e^{-it} \frac{1 - e^{it(N+1)}}{1 - e^{-2it}} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - e^{it(N+1)}}{e^{-it} - e^{it}} + \frac{1 - e^{-it(N+1)}}{e^{it} - e^{-it}} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{-1 + e^{it(N+1)} + 1 - e^{-it(N+1)}}{e^{it} - e^{-it}} \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin t(N+1)}{\sin t}
 \end{aligned}$$

Uns interessieren positive Nullstellen von $S'_N(f, t)$: in $(0, \pi]$:

$$t_k = \frac{\pi k}{N+1}, 1 \leq k \leq N+1$$

Untersuche nach Maximum/Minimum:

$$\begin{aligned}
 S''_N(f, t) \Big|_{t=t_k} &= \frac{2}{\pi} \frac{(N+1) \cos t(N+1)}{\sin t} \Big|_{t=t_k} - \\
 &- \frac{2 \sin t(N+1)}{\pi \sin^2 t} \cos \Big|_{t=t_k} = \\
 &= \frac{2}{\pi} (N+1) \frac{\overbrace{\cos(\pi k)}^{(-1)^k}}{\underbrace{\sin\left(\frac{\pi k}{N+1}\right)}_{\varepsilon(0, \pi)}} \quad \begin{array}{l} < 0 \text{ für } k \text{ gerade} \\ > 0 \text{ für } k \text{ ungerade} \\ k \neq N+1 \end{array}
 \end{aligned}$$

Berechne (für $k = 1$)

$$\begin{aligned}
 S_N(f, t_1) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{N+1}\right)}{n} \\
 &= 4 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)}{\frac{\pi n}{N+1}} \frac{1}{N+1} \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)}{\frac{\pi n}{N+1}} \frac{2\pi}{N+1} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \underbrace{S_i(\pi)}_{\substack{\parallel \\ 1.8519\dots \\ \parallel \\ 1.179\dots}}
 \end{aligned}$$

$\frac{2}{\pi} S_i(\pi) =$ (Wilbraham-) Gibbs-Konstante
Also gilt

$$S_N(f, t_1(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} S_i(\pi)$$

„Ausreißer“ um 9% (18% im Vergleich zu 2)
Nun berechne $S_N(f, t_k)$ für $k > 1$:

$$S_N(f, t_k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} S_i(k, \pi)$$

Wir betrachten noch eine Funktion:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t}{\pi}, t \in (-\pi, \pi] \text{ (Sägezahn) (bereits untersucht)} \\
\widehat{f}(n) &= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{\pi i n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \\
S_N(f, t) &= \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{(-1)^{n+1}}{\pi i n} e^{int} = - \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{in(t-\pi)}}{n} \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin n(t-\pi)}{n} \\
S'_N(f, t) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos n(t-\pi) \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left(e^{in(t-\pi)} + e^{-in(t-\pi)} \right) \\
\sum_{n=1}^N q^n &= q \sum_{n=0}^{N-1} q^n = q \frac{1-q^N}{1-q} \\
\Rightarrow S'_N(f, t) &= -\frac{1}{\pi} \left(e^{i(t-\pi)} \frac{1-e^{iN(t-\pi)}}{1-e^{i(t-\pi)}} + e^{-i(t-\pi)} \frac{1-e^{-iN(t-\pi)}}{1-e^{-i(t-\pi)}} \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(e^{i\frac{t-\pi}{2}} \frac{1-e^{iN(t-\pi)}}{e^{-i\frac{t-\pi}{2}} - e^{i\frac{t-\pi}{2}}} + e^{-i\frac{t-\pi}{2}} \frac{1-e^{-iN(t-\pi)}}{e^{i\frac{t-\pi}{2}} - e^{-i\frac{t-\pi}{2}}} \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\frac{t-\pi}{2}}(1-e^{-iN(t-\pi)}) - e^{i\frac{t-\pi}{2}}(1-e^{iN(t-\pi)})}{e^{i\frac{t-\pi}{2}} - e^{-i\frac{t-\pi}{2}}} \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right) + \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(t-\pi)}{\sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right) - \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(t-\pi)}{\sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right)} \\
S'_N(f, t) = 0 &\Rightarrow \left(N + \frac{1}{2}\right)(t-\pi) = \frac{t-\pi}{2} - 2\pi k \\
\Leftrightarrow t_k - \pi &= -\frac{2\pi k}{N}
\end{aligned}$$

Uns interessieren die Werte $k \in \mathbb{N}$

Betrachte

$$\begin{aligned}
 S_N(f, t_1(N)) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(-\frac{2\pi n}{N}\right)}{n} \\
 &= +\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{n} \\
 &= 4 \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{\frac{2\pi n}{N}} \frac{1}{N} \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{\frac{2\pi n}{N}} \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt
 \end{aligned}$$

KAPITEL 2

Anwendungen der Fourierreihen

2.1. Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen

$$-\frac{d^2u}{dt^2} = \lambda u + g(t) \quad t \in (-\pi, \pi], \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$g \in C(\mathbb{T}) \quad u \in C^2(\mathbb{T})$ (periodische Randbedingungen)

BEMERKUNG. *Klassische Theorie der Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen (Coddington, Levinson oder Walter) erfordert keine Fourier-Theorie.*

Die Idee: Multipliziere die Gleichung mit $\frac{e^{-itm}}{2\pi}$ und integriere bezüglich t :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u''(t) e^{-itm} dt &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-itm} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-itm} dt \\ n^2 \hat{u}(n) - \lambda \hat{u}(n) &= \hat{g}(n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{u}(n) &= \frac{\hat{g}(n)}{n^2 - \lambda} \quad \text{falls } n^2 \neq \lambda \end{aligned}$$

Sei λ keine Quadratzahl, d.h. $\lambda \neq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \hat{u}(n) = \frac{\hat{g}(n)}{n^2 - \lambda} = 0 \quad \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Definiere

$$u(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{g}(n)}{n^2 - \lambda} e^{int}$$

Die Fourierreihe konvergiert absolut und gleichmäßig $\Rightarrow u \in C(\mathbb{T})$
Ist $g \in A(\mathbb{T})$, so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\hat{u}(n)| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{n^2}{n^2 - \lambda} \right| |\hat{g}(n)| \\ &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n)| = C \|g\|_{A(\mathbb{T})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u'' \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

Sei nun $\lambda = m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann funktioniert unsere Vorgehensweise genau dann, wenn $\hat{g}(m) = \hat{g}(-m) = 0$. In diesem Fall sind $\hat{u}(m)$ und $\hat{u}(-m)$ beliebig. Somit ist die Lösung nicht eindeutig, der Lösungsraum

ist zweidimensional:

$$u(t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n^2 \neq m^2}} \frac{\hat{g}(n)}{n^2 - \lambda} e^{int} + C_+ e^{imt} + C_- e^{-imt}$$

Kann man andere als periodische Randbedingungen betrachten?

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} = \lambda u + g(t) \quad t \in [0, \pi]$$

mit $u(0) = u(\pi) = 0$ (Dirichlet)

Bemerkung: $\sin(nt)$ erfüllt die Randbedingungen $\forall n \in \mathbb{N}$. Wir werden diese Eigenschaft folgendermaßen benutzen.

Definiere

$$\tilde{g}(t) := \begin{cases} g(t), & t \in (0, \pi] \\ 0, & t = 0 \\ -g(t), & t \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Also ist \tilde{g} ungerade \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tilde{g}(t) e^{-int} dt \stackrel{t \rightarrow -t}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \hat{g}(-t) e^{int} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tilde{g}(t) e^{int} dt \\ &= -\hat{g}(-n) \\ \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{g}(n) e^{int} &= \underbrace{\hat{g}(0)}_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{g}(n) e^{int} \\ &- \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{g}(n) e^{-int} = 2i \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{g}(n) \sin(nt) \end{aligned}$$

Suche die Lösung mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \sin(nt) \\ \Rightarrow -u''(t) - \lambda u &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (n^2 - \lambda) C_n \sin(nt) \\ \Rightarrow C_n &= \frac{2i \hat{g}(n)}{n^2 - \lambda} \end{aligned}$$

2.2. Gleichverteilung

Sei $\gamma > 0$, $\{\gamma\} := \gamma - \lfloor \gamma \rfloor \geq 0$.

Sei zunächst $\gamma \in \mathbb{Q}$, d.h. $\gamma = \frac{p}{q}$. Betrachte die Folge $(\{k\gamma\})_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\left\{ \frac{p}{q} \right\}, \left\{ \frac{2p}{q} \right\}, \dots, \left\{ \frac{(q-1)p}{q} \right\}, \underbrace{\left\{ \frac{qp}{q} \right\}}_{\{p\}=0}, \underbrace{\left\{ \frac{(q+1)p}{q} \right\}}_{\left\{ p + \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \right\}}, \dots$$

Also ist die Folge periodisch.

Was passiert, wenn γ irrational ist?

BEHAUPTUNG. Alle Zahlen der Folge $(\{k\gamma\})_{k \in \mathbb{N}}$ sind paarweise verschieden.

BEWEIS. Angenommen, $\{k\gamma\} = \{l\gamma\}$ für $k \neq l \Rightarrow \Rightarrow \{(k-l)\gamma\} = 0 \Rightarrow (k-l)\gamma \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma \in \mathbb{Q}$ \square

DEFINITION 2.1. Eine Folge (ζ_k) der Zahlen in $[0,1)$ heißt gleichverteilt, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{1 \leq n \leq N \mid \zeta_n \in (a, b)\}| = b - a$$

für jedes Teilintervall $(a, b) \subset [0, 1)$.

Insbesondere liegt jede gleich verteilte Folge dicht in $[0, 1)$.

SATZ 2.2. Ist $\gamma > 0$ irrational, so ist die Folge $(\{k\gamma\})_{k \in \mathbb{N}}$ gleichverteilt in $[0, 1)$.

Sei $\tilde{\chi}_{(a,b)}$ die 1-periodische Fortsetzung der charakteristischen Funktion $\chi_{(a,b)}$, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{(a,b)}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \chi_{(a+k, b+k)}(t) \\ \Rightarrow |\{1 \leq k \leq N \mid \{k\gamma\} \in (a, b)\}| &= \\ &= \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}_{(a,b)}(k\gamma) \end{aligned}$$

Der Satz ist äquivalent zur Aussage:

$$\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \tilde{\chi}_{(a,b)}(k\gamma) \longrightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t) dt$$

Wir beginnen den Beweis mit dem folgenden Lemma:

LEMMA 2.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und 1-periodisch. Sei γ irrational. Dann gilt

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(t) dt.$$

BEWEIS. (1) Sei $f(t) = e^{2\pi i n t}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Für $f = 1$ gilt:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k\gamma) = \frac{1}{N} \cdot N = 1 = \int_0^1 f(t) dt$$

Sei nun $n \neq 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = 0$$

γ ist irrational

$$\Rightarrow e^{2\pi i n \gamma} \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i n k \gamma} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{2\pi i n \gamma} \frac{1 - e^{2\pi i n N \gamma}}{1 - e^{2\pi i n \gamma}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

- (2) Die Aussage gilt für beliebige trigonometrische Polynome.
 (3) Sei f stetig und 1-periodisch. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein trigonometrisches Polynom mit

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei N so groß, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(k\gamma) - \int_0^1 P(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k\gamma) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(k\gamma) - P(k\gamma)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(k\gamma) - \int_0^1 P(t) dt \right| \\ & + \int_0^1 \underbrace{|P(t) - f(t)|}_{< \varepsilon/3} dt < \varepsilon \end{aligned}$$

□

BEWEIS. VON SATZ 2.2

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig „hinreichend klein“. Sei $(a, b) \subset [0, 1)$ beliebig. Seien f_ε^\pm stetige 1-periodische Funktionen mit Eigenschaften:

(1)

$$f_\varepsilon^-(t) = f_\varepsilon^+(t) = \chi_{(a,b)}(t) \forall t \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$$

(2)

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^-(t) &\leq \chi_{(a,b)}(t) \\ f_\varepsilon^+(t) &\geq \chi_{(a,b)}(t) \end{aligned} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(3)

$$f_\varepsilon^+(t) = 0 \text{ für } \forall t \leq a - \varepsilon \text{ und } \forall t \geq b + \varepsilon$$

(2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow b - a &= \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t) dt = \int_a^{a+\varepsilon} \underbrace{\chi_{(a,b)}(t)}_{\parallel \chi_{(a,b)}(t) - f_\varepsilon^-(t) + f_\varepsilon^-(t)} dt + \\ &+ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \underbrace{\chi_{(a,b)}(t)}_{\parallel (1)}_{f_\varepsilon^-(t)} dt + \int_{b-\varepsilon}^b \underbrace{\chi_{(a,b)}(t)}_{\parallel \chi_{(a,b)}(t) - f_\varepsilon^-(t) + f_\varepsilon^-(t)} dt \\ &= \int_a^b f_\varepsilon^-(t) dt + \int_a^{a+\varepsilon} \underbrace{(\chi_{(a,b)}(t) - f_\varepsilon^-(t))}_{\leq 1} dt + \\ &+ \int_{b-\varepsilon}^b \underbrace{(\chi_{(a,b)}(t) - f_\varepsilon^-(t))}_{\leq 1} dt \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(t) dt + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\int_0^1 f_\varepsilon^+(t) dt \leq b - a + 2\varepsilon$$

$$\text{Sei } S_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}_{(a,b)}(k\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_\varepsilon^-(k\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_\varepsilon^+(k\gamma)$$

$$\Rightarrow \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_\varepsilon^-(k\gamma) \stackrel{\text{Lemma 2.3}}{=}$$

$$= \int_0^1 f_\varepsilon^-(t) dt \geq b - a - 2\varepsilon$$

und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} S_N \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_\varepsilon^+(k\gamma) \stackrel{\text{Lemma 2.3}}{=}$$

$$= \int_0^1 f_\varepsilon^+(t) dt \leq b - a + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow b - a - 2\varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} S_N \leq b - a + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = b - a$$

□

Theorie des mathematischen Billards: Einfallswinkel = Ausfallswinkel

SATZ 2.4. (Weylsches Kriterium) Eine Folge ζ_1, ζ_2, \dots in $[0, 1)$ ist gleichverteilt genau dann, wenn

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \zeta_n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

KAPITEL 3

Das Fourier-Integral

Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ mit Werten in \mathbb{C} . Definiere

$$\hat{u}(t) := \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-its} ds \forall t \in \mathbb{R}$$

Man schreibt auch $\mathcal{F}[u]$ statt \hat{u} .

SATZ 3.1. Seien $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt

(a) $\widehat{u+v}(t) = \hat{u}(t) + v(t)$

(Linearität)

$$\widehat{cu}(t) = c\hat{u}(t) \forall c \in \mathbb{C}$$

(b) $\widehat{\hat{u}}(t) = \hat{u}(-t)$

(Konjugation)

(c) Sei $u_\tau(s) := u(s - \tau), \tau \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\widehat{u_\tau}(t) = e^{-it\tau} \hat{u}(t)$$

(d) Sei $u^\tau(s) := u(s) e^{is\tau}, \tau \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\widehat{u^\tau}(t) = \hat{u}(t - \tau)$$

(e) Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig. Sei

$$\varphi(s) = \lambda u(\lambda s).$$

Dann ist

$$\widehat{\varphi}(t) = \hat{u}\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

BEWEIS. (a) ist klar

(b)

$$\widehat{\hat{u}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \overline{u(s)} e^{-its} ds = \overline{\int_{\mathbb{R}} u(s) e^{its} ds} = \overline{\hat{u}(-t)}$$

(c)

$$\begin{aligned} \hat{u}_\tau(t) &= \int_{\mathbb{R}} u_\tau(s) e^{-ist} ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(s - \tau) e^{-ist} ds \stackrel{\xi = s - \tau}{=} \int_{s = \xi + \tau} u(\xi) e^{-i(\xi + \tau)t} d\xi \\ &= e^{-it\tau} \hat{u}(t) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \widehat{u^\tau}(t) &= \int_{\mathbb{R}} u^\tau(s) e^{-its} ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(s) \underbrace{e^{is\tau} e^{-its}}_{e^{-i(t-\tau)s}} ds = \hat{u}(t - \tau) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-its} ds = \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}} u(\lambda s) e^{-its} ds \stackrel{\lambda s = \mathfrak{S}}{=} \int_{s = \frac{\mathfrak{S}}{\lambda}} u(\mathfrak{S}) e^{-i \frac{t}{\lambda} \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} = \hat{u}\left(\frac{t}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

□

BEISPIEL.

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\
u &\in L^1(\mathbb{R}) \text{ mit } \|u\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt = \\
&= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{M,N \rightarrow \infty} (\arctan N - \arctan(-M)) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \\
\hat{u}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-its}}{1+t^2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{-its}}{1+t^2} dt \\
\frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{t-i} \frac{1}{t+i} \\
&= -\frac{2\pi i}{-2i} e^{-|s|} = \pi e^{-|s|} \\
\int_{\gamma+(N)} \frac{e^{-its}}{1+t^2} dt &\stackrel{t=Ne^{-i\theta}}{\theta \in [0,\pi]} -i \int_0^\pi \frac{e^{-iNe^{-i\theta}s}}{1+N^2e^{-2i\theta}} Ne^{-i\theta} d\theta = \\
&= -i \int_0^\pi \frac{\overbrace{e^{-iN \cos \theta \cdot s} e^{-N \sin \theta \cdot s}}^{|\dots|=1}}{1+N^2e^{-2i\theta}} Ne^{-i\theta} d\theta \\
\left| \frac{Ne^{-i\theta}}{1+N^2e^{-2i\theta}} \right| &= \frac{N}{\sqrt{(1+N^2e^{-2i\theta})(1+N^2e^{2i\theta})}} = \\
&= \frac{N}{\sqrt{1+2N^2 \cos 2\theta + N^4}} \leq 1 \text{ für } N \geq 1
\end{aligned}$$

Insbesondere ist \hat{u} stetig und verschwindet im Unendlichen, $\hat{u} \in C_\infty(\mathbb{R})$. Wir werden zeigen, dass diese Eigenschaft universell ist.

SATZ 3.2. Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ beliebig. Dann ist \hat{u} gleichmäßig stetig.

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\hat{u}(s + \mathfrak{S}) - \hat{u}(s) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(e^{-it(s+\mathfrak{S})} - e^{-its} \right) dt \\ e^{-it(s+\mathfrak{S})} - e^{-its} &\xrightarrow[\mathfrak{S} \rightarrow 0]{} 0 \forall t \in \mathbb{R} \\ \left| u(t) \left(e^{-it(s+\mathfrak{S})} - e^{-its} \right) \right| &\leq 2|u(t)|\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist

$$\begin{aligned}\lim_{\mathfrak{S} \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(e^{-it(s+\mathfrak{S})} - e^{-its} \right) dt &= 0 \\ \Rightarrow \hat{u} \text{ ist stetig.}\end{aligned}$$

Zum Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit:

$$\begin{aligned}|\hat{u}(s + \mathfrak{S}) - \hat{u}(s)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(t)| \left| e^{-it(s+\mathfrak{S})} - e^{-its} \right| dt \\ \int_{\mathbb{R}} |u(t)| \left| e^{-it\mathfrak{S}} - 1 \right| dt &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Die rechte Seite hängt von s nicht ab! □

LEMMA 3.3. (Differenzformel) Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(u(s) - u\left(s - \frac{\pi}{t}\right) \right) e^{-ist} ds$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-ist} ds = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-ist} e^{-i\pi} ds = - \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-it\left(s + \frac{\pi}{t}\right)} ds \\ \stackrel{\substack{\mathfrak{S} = s + \frac{\pi}{t} \\ s = \mathfrak{S} - \frac{\pi}{t}}}{=} &- \int_{\mathbb{R}} u\left(\mathfrak{S} - \frac{\pi}{t}\right) e^{-it\mathfrak{S}} d\mathfrak{S} \\ \Rightarrow \hat{u}(t) &= \frac{1}{2} \hat{u}(t) + \frac{1}{2} \hat{u}(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(u(s) - u\left(s - \frac{\pi}{t}\right) \right) e^{-ist} ds\end{aligned}$$

□

LEMMA 3.4. (Stetigkeit der Translation) Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ beliebig. Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow L^1(\mathbb{R}), \mathfrak{S} \mapsto L^1(\mathbb{R}), \mathfrak{S} \mapsto u_{\tau} = u(\cdot - \tau)$ ist stetig, d.h.

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|u_{\tau} - u_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$$

BEWEIS. Für den Beweis brauchen wir das folgende Hilfsmittel:

BEHAUPTUNG. $C_0(\mathbb{R}) := \{v \in C(\mathbb{R}) \mid \text{supp } v \text{ kompakt}\}$ ist dicht in $L^1(\mathbb{R})$, d.h. zu jedem $u \in L^1(\mathbb{R})$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $v \in C_0(\mathbb{R})$, so dass $\|u - v\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$ ist.

Für den Beweis siehe FA

Seien $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $v \in C_0(\mathbb{R})$ mit $\|u - v\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$.
Betrachte

$$\begin{aligned} \|u_\tau - u_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|u_\tau - v_\tau\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|v_\tau - v_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &+ \|v_{\tau_0} - u_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2 \underbrace{\|u - v\|_{L^1(\mathbb{R})}}_{< \varepsilon} + \|v_\tau - v_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } \|v_\tau - v_{\tau_0}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |v(t - \tau) - v(t - \tau_0)| dt \\ &= \int_a^b |v(t - \tau) - v(t - \tau_0)| dt \text{ für gewisse } a, b \in \mathbb{R} \text{ falls } |\tau - \tau_0| \leq 1 \\ &\leq (b - a) \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t - \tau) - v(t - \tau_0)| \end{aligned}$$

v ist stetig $g \Rightarrow g$ ist gleichmäßig stetig \Rightarrow zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|v(t - \tau) - v(t - \tau_0)| < \varepsilon'$ für alle τ mit $|\tau - \tau_0| = |(t - \tau) - (t - \tau_0)| < \delta$

$$\Rightarrow \limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t - \tau) - v(t - \tau_0)| = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \|u_\tau - u_{\tau_0}\|_{L^1 \mathbb{R}} \leq 2\varepsilon$$

$$\stackrel{\varepsilon \text{ bel.}}{\Rightarrow} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|u_\tau - u_{\tau_0}\|_{L^1 \mathbb{R}} = 0$$

□

KOROLLAR 3.5. (Lemma von Riemann-Lebesgue)

Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{u}(s) = 0.$$

BEWEIS. Lemma 3.3 (Differenzformel)

$$\Rightarrow |\hat{u}(t)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| u(s) - u\left(s - \frac{\pi}{t}\right) \right| ds \stackrel{\text{Lemma 3.4}}{\underset{|t| \rightarrow \infty}{\rightarrow}} 0$$

□

Also haben wir gezeigt, dass

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}) := \{v \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|s| \rightarrow \infty} v(s) = 0\}$$

BEMERKUNG. (1) \mathcal{F} ist nicht surjektiv (ohne Beweis).

(2) Alle Funktionen in $C_\infty(\mathbb{R})$ sind gleichmäßig stetig (Beweisskizze!).

(3) Das Lemma von Riemann-Lebesgue kann nicht verbessert werden: Im Bild (\mathcal{F}) gibt es Funktionen, die beliebig langsam fallen.

SATZ 3.6. Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$. ist $u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, so ist $\hat{u}(s) = O(|s|^{-k})$, $|s| \rightarrow \infty$, d.h. $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\hat{u}(s)| |s|^k = 0$, und $|\hat{u}(s)| \leq \frac{\|u^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})}}{|s|^k}$.

Es gilt $\widehat{u^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{u}(s)$.

- (1) BEWEIS. Zunächst beweisen wir den Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung $u^{(l)} \in L^1(\mathbb{R})$ für $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Betrachte

$$\begin{aligned}
 s^k \hat{u}(s) &= s^k \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-ist} dt = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b u(t) s^k e^{-ist} dt = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} i \int_a^b u(t) s^{k-1} (-is) e^{-ist} dt \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} i \int_a^b u(t) s^{k-1} \frac{d}{dt} (e^{-ist}) dt \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Der Grenzwert existiert!}} \\
 &\stackrel{\text{partielle}}{=} \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} i s^{k-1} u(t) e^{-ist} \Big|_{t=a}^{t=b} - \\
 &\quad - i \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \underbrace{u'(t)}_{L^1(\mathbb{R})} s^{k-1} e^{-ist} dt
 \end{aligned}$$

□

BEHAUPTUNG. Es gibt Folgen (a_m) und (b_m) mit $a_m \rightarrow -\infty$, $b_m \rightarrow \infty$ und $u(a_m) \rightarrow 0$, $u(b_m) \rightarrow 0$.

BEWEIS. Es gelte $\liminf_{m \rightarrow \infty} |u(b_m)| =: c > 0$ für jede Folge (b_m) mit $b_m \rightarrow \infty \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} |u(b_m)| = c > 0$ für jede Folge (b_m) mit $b_m \rightarrow \infty \Rightarrow$ zu jedem $0 < \varepsilon < c$ existiert ein $M_{\varepsilon, (b_m)} > 0$, so dass $|u(b_m)| > c - \varepsilon \forall m \geq M_{\varepsilon, (b_m)}$ für jede Folge (b_m) mit $b_m \rightarrow \infty \Rightarrow$ es gibt ein $T_\varepsilon > 0$, so dass $|u(t)| > c - \varepsilon \forall t \geq T_\varepsilon$ [Beweis durch Widerspruch!] $\Rightarrow u \notin L^1(\mathbb{R})$.

Also gilt $\liminf_{m \rightarrow \infty} |u(b_m)| = 0$ für eine Folge (b_m) mit $b_m \rightarrow \infty \Rightarrow$ es gibt eine Teilfolge (b_{m_n}) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_n} = 0$ □

Berechne

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} u(t) e^{-ist} \Big|_{t=a}^{t=b} = \lim_{m \rightarrow \infty} u(t) e^{-ist} \Big|_{t=a_m}^{t=b_m} = 0$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
 s^k \hat{u}(s) &= -is^{k-1} \int_{\mathbb{R}} u'(t) e^{-ist} dt \\
 &= -is^{k-1} \hat{u}'(s)
 \end{aligned}$$

Durch rekursive Anwendung dieser Argumentation erhalten wir

$$\begin{aligned} s^k \hat{u}(s) &= (-i)^k \widehat{u^{(k)}}(s) \\ \Leftrightarrow \widehat{u^{(k)}}(s) &= (is)^k \hat{u}(s) \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} |s|^k |\hat{u}(s)| &= |s|^k \frac{|\widehat{u^{(k)}}(s)|}{|(is)^k|} = \underbrace{|\widehat{u^{(k)}}(s)|}_{\substack{\uparrow \\ L^1(\mathbb{R})}} \xrightarrow[|s| \rightarrow \infty]{\text{Riemann-Lebesgue}} 0 \\ \Leftrightarrow \hat{u}(s) &= 0 \left(|s|^{-k} \right), |s| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} |\hat{u}(s)| &= \frac{|\widehat{u^{(k)}}(s)|}{|s|^k} \leq \frac{1}{|s|^k} \int_{\mathbb{R}} |u^{(k)}(s)| \, ds \\ &= \frac{1}{|s|^k} \|u^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

(2)

BEHAUPTUNG. Aus $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$ und $u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ folgt

$$u^{(l)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ f\u00fcr } l \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

BEWEIS. Zun\u00e4chst sei $k = 2$. Sei $\alpha > 0$ beliebig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$u'(t) - u'(\tau) = \int_{\tau}^t u''(s) \, ds$$

Integriere die beiden Seiten \u00fcber $\tau \in (t - \alpha, t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha u'(t) &= \int_{t-\alpha}^t u'(\tau) \, d\tau + \int_{t-\alpha}^t \int_{\tau}^t u''(s) \, ds \, d\tau \\ \Rightarrow \alpha u'(t) &= u(t) - u(t - \alpha) + \int_{t-\alpha}^t \int_{\tau}^t u''(s) \, ds \, d\tau \\ \Rightarrow \alpha |u'(t)| &\leq |u(t)| + |u(t - \alpha)| + \int_{t-\alpha}^t \boxed{\int_{\tau}^t |u''(s)| \, ds} \, d\tau \\ &\quad \text{monoton fallend bzgl. } \tau \\ &\leq |u(t)| + |u(t - \alpha)| + \int_{t-\alpha}^t \int_{t-\alpha}^t |u''(s)| \, ds \, d\tau \\ &= |u(t)| + |u(t - \alpha)| + \alpha \int_{t-\alpha}^t |u''(s)| \, ds \end{aligned}$$

Nun integriere bezüglich $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt + \alpha \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{t-\alpha}^t |u''(s)| ds dt}_{\text{wir untersuchen dieses Integral}}$$

Grafik

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [s, s+\alpha], s \in \mathbb{R}\} \\ & \int_{\mathbb{R}} \int_{t-\alpha}^t |u''(s)| ds dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u''(s)| \int_s^{s+\alpha} dt ds \\ & = \alpha \int_{\mathbb{R}} |u''(s)| ds \end{aligned}$$

Also gilt

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt$$

Also ist $u' \in L^1(\mathbb{R})$. Man kann es schöner darstellen. Teile die beiden Seiten durch α und setze

$$\begin{aligned} \alpha & := \left(\frac{2 \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt}{\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt} \right)^{1/2} \\ & \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{1/2} \\ & \quad + \sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{1/2} \\ & = 2\sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Sei nun $k = 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta |u'(t)| & \leq |u(t)| + |u(t-\beta)| + \beta \int_{t-\beta}^t |u''(s)| ds \\ \alpha |u''(t)| & \leq |u'(t)| + |u'(t-\alpha)| + \alpha \int_{t-\alpha}^t |u'''(s)| ds \\ & \leq \frac{1}{\beta} |u(t)| + \frac{1}{\beta} |u(t-\beta)| + \int_{t-\beta}^t |u''(s)| ds \\ & \quad + \frac{1}{\beta} |u(t-\alpha)| + \frac{1}{\beta} |u(t-\alpha-\beta)| + \int_{t-\alpha-\beta}^{t-\alpha} |u''(s)| ds + \alpha \int_{t-\alpha}^t |u'''(s)| ds \end{aligned}$$

für beliebige $\alpha, \beta > 0$.

Integriere die zweite Ungleichung bezüglich $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt & \leq \frac{4}{\beta} \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt + 2\beta \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |u'''(s)| ds \\ & \Rightarrow (\alpha - 2\beta) \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \leq \frac{4}{\beta} \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |u'''(s)| ds \end{aligned}$$

Sei $\beta > 0$ beliebig und $\alpha > 2\beta \Rightarrow u'' \in L^1(\mathbb{R})$.

Integriere die erste Ungleichung:

$$\begin{aligned} \beta \int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt + \beta^3 \int_{\mathbb{R}} |u''(s)| ds \\ \Rightarrow u' &\in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Um eine Abschätzung für $\|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$ und $\|u''\|_{L^1(\mathbb{R})}$ zu gewinnen, betrachte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt &\leq 2\sqrt{2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt \right)^{1/2}}_{\leq (2\sqrt{2})^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{1/4}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u'''(t)| dt \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{3/4} &\leq (2\sqrt{2})^{3/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}} |u'''(t)| dt \right)^{1/4} \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt &\leq (2\sqrt{2})^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/3} \left(\int_{\mathbb{R}} |u'''(t)| dt \right)^{2/3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u'(t)| dt &\leq 2\sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u''(t)| dt \right)^{1/2} \\ &\leq (2\sqrt{2}) \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{1/2+1/6=\frac{2}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u'''(t)| dt \right)^{1/3} \end{aligned}$$

u.s.w. □

SATZ 3.7. Sei $(1 + |\cdot|)^k u \in L^1(\mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\hat{u} \in C^k(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\frac{d^k}{ds^k} \hat{u}(s) = (-i)^k \int_{\mathbb{R}} e^{-its} t^k u(t) dt.$$

BEWEIS. Es genügt, den Satz für $k = 1$ zu beweisen. Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}(s+h) - \hat{u}(s)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (e^{-its} e^{-ith} - e^{-its}) u(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-its} \frac{e^{-ith} - 1}{h} u(t) dt \end{aligned}$$

Beobachtung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-ith} - 1}{h} = -it \forall t \in \mathbb{R}$$

BEHAUPTUNG.

$$\left| \frac{e^{-ith} - 1}{h} \right| \leq |t| \forall t \in \mathbb{R}$$

BEWEIS. Betrachte

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ith} - 1}{h} \right|^2 &= \frac{(e^{-ith} - 1)(e^{-ith} - 1)}{h^2} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos(th)}{h^2} = 4 \frac{\sin^2\left(\frac{th}{2}\right)}{h^2} = (*) \\ \sin x \leq x, x \geq 0 &\Rightarrow \sin^2\left(\frac{th}{2}\right) \leq \left(\frac{th}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow (*) &\leq t^2 \end{aligned}$$

□

BEHAUPTUNG.

$$\Rightarrow \left| e^{-its} \frac{e^{-ith} - 1}{h} u(t) \right| \leq |t| \cdot |u(t)|$$

Nach der Voraussetzung ist die Funktion $|t| \cdot |u(t)|$ integrierbar. Mit dem Satz von Lebesgue existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-its} \frac{e^{-ith} - 1}{h} u(t) dt &= \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-its} t u(t) dt. \end{aligned}$$

□

Sätze 3.6 und 3.7:

u ist glatt $\Rightarrow \hat{u}$ fällt schnell ab

u fällt schnell ab $\Rightarrow \hat{u}$ ist glatt

3.1. Die inverse Fourier-Transformation

Im Allgemeinen ist die Fourier-transformierte \hat{u} eine integrierbare Funktion.

Wir betrachten zunächst den Fall, wenn $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$.

SATZ 3.8. Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Ist $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(s) e^{ist} ds. f.ü.$$

Für den Beweis brauchen wir ein Hilfsergebnis.

LEMMA 3.9.

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}](s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{s^2}{4\alpha}}, \alpha > 0$$

BEWEIS. Sei

$$h(s) = \mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}](s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-its} dt$$

Berechne

$$\begin{aligned}
 h'(s) &= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} t e^{-its} dt \\
 &= \frac{i}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t^2}) e^{-its} dt \\
 &\stackrel{\text{p.I.}}{=} -\frac{i}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} \underbrace{\frac{d}{dt} e^{-its}}_{-ise^{-its}} dt \\
 &= -\frac{s}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-its} ds = -\frac{s}{2\alpha} h(s)
 \end{aligned}$$

Berechne

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Nun haben wir die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} h'(s) = -\frac{s}{2\alpha} h(s) \\ h(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{cases} \\
 \frac{h'(s)}{h(s)} &= \frac{d}{ds} \log h(s) = -\frac{s}{2\alpha} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_0^s \frac{d}{d\mathfrak{S}} \log h(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} &= -\frac{s^2}{4\alpha} \\
 \Rightarrow \log h(s) - \log h(0) &= -\frac{s^2}{4\alpha} \\
 \Rightarrow \log \frac{h(s)}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} &= -\frac{s^2}{4\alpha} \\
 \Rightarrow h(s) &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{s^2}{4\alpha}}
 \end{aligned}$$

□

$L^1(\mathbb{R})$, so gibt es eine Teilfolge u_{n_k} , die punktweise gegen u fast überall konvergiert.

Wir wenden das Ergebnis folgendermaßen an:

- (1) Wir wissen, dass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(t)$ existiert $\forall t \in \mathbb{R}$.
- (2) Statt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ können wir $\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0}$ betrachten.
- (3) Nach dem Hilfsergebnis existiert eine Teilfolge $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$, für die $F_{\varepsilon_{n_k}}(t) \rightarrow u(t)$ fast überall gilt.
- (4) Wegen (1) folgt daraus, dass $F_\varepsilon(t) \rightarrow u(t)$ fast überall gilt.

□

3.2. Die inverse Fourier-Transformation II

Hier diskutieren wir den Fall, wenn $\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R})$.

3.2.1. Der Dirichlet-Kern. Die Idee ist $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$ statt $\int_{\mathbb{R}}$ bei der Konstruktion der inversen Fouriertransformation zu benutzen. Dass diese Idee a priori nicht unsinnig ist, zeigt das folgende Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

f ist nicht integrierbar, aber

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) = \pi$$

[Beweisidee: Man untersucht $\int_0^R f(t) dt$ als Funktion von R . Sie hat lokale Minima und Maxima.]

Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Wir betrachten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_R(s) \hat{u}(s) e^{ist} ds = (*)$$

$$\text{mit } \chi_R(s) := \begin{cases} 1, & s \in [-R, R] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_R(s) e^{ist} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) e^{-is\tau} d\tau ds$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \int_{\mathbb{R}} \chi_R(s) e^{is(t-\tau)} ds d\tau$$

Betrachte

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_R(s) e^{is(t-\tau)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{is(t-\tau)} ds$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i(t-\tau)} e^{is(t-\tau)} \Big|_{s=-R}^s=R & t \neq \tau \\ \frac{R}{\pi}, & t = \tau \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin R(t-\tau)}{t-\tau}, & t \neq \tau \\ \frac{R}{\pi}, & t = \tau \end{cases} =: D_R(t-\tau) \quad \text{Dirichlet-Kern}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) e^{ist} dt = \int_{\mathbb{R}} D_R(t-\tau) u(\tau) d\tau \\ = (D_R * u)(t) \quad \text{Faltung}$$

3.2.2. Cesàro-Mittelwert und der Fejer-Kern. Die Idee, das Integral $\int_0^\infty f(t) dt$ als $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds dt$ zu verstehen.

BEHAUPTUNG. Existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(s) ds < \infty$, so ist $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(s) ds$.

BEWEIS. Sei $F(R) := \int_0^R f(t) dt$, $A := \lim_{R \rightarrow \infty} F(R) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $R_1 > 0$ so groß, dass $|F(r) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \forall r > R_1$. Wegen $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{R_1} (F(s) - A) ds = 0$ gibt es ein $R_2 > 0$ mit

$$\left| \frac{1}{r} \int_0^{R_1} (F(s) - A) ds \right| < \frac{\varepsilon}{2} \forall r > R_2.$$

Sei nun $R \geq \max\{R_1, R_2\}$. Betrachte

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R} \int_0^R F(r) dr - A \right| &= \left| \frac{1}{R} \int_0^R (F(r) - A) dr \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \frac{1}{R} \int_0^{R_1} (F(r) - A) dr \right|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\left| \frac{1}{R} \int_{R_1}^R (F(r) - A) dr \right|}_{\leq \frac{1}{R} \int_{R_1}^R |F(r) - A| dr} \\ &\leq \frac{R - R_1}{R} \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{< \varepsilon/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

□

SATZ 3.10. Sei $f \geq 0$. $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds dt$ konvergiert genau dann, wenn $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(s) ds$ konvergiert, d.h. $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$

BEWEIS. (\Leftarrow) ist klar wegen der Behauptung (\Rightarrow). Sei $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds dt := A < \infty$. Angenommen, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(s) ds = \infty$. Sei $\alpha > 0$ beliebig groß. Dann existiert ein $R_1 > 0$ mit $\int_0^R f(s) ds \geq \alpha \forall R > R_1$

$$\begin{aligned} & \text{für } R > R_1 \quad \frac{1}{R} \int_0^{R_1} \int_0^t f(s) ds dt + \frac{1}{R} \int_{R_1}^R \int_0^t f(s) ds dt \\ & \geq \frac{1}{R} \int_0^{R_1} \int_0^t f(s) ds dt + \underbrace{\frac{1}{R} \int_{R_1}^R \alpha dt}_{\parallel \frac{\alpha(R-R_1)}{R}} \\ & \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \alpha \Rightarrow \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

□

BEISPIEL. (1)

$$\begin{aligned} f(s) = \sin s & \Rightarrow \int_0^t f(s) ds = -\cos s \Big|_{s=0}^{s=t} \\ & = -\cos t + 1 \Rightarrow \int_0^R (-\cos t + 1) dt = -\sin t \Big|_{t=0}^{t=R} + R \\ & = -\sin R + R \Rightarrow \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds = \frac{-\sin R + R}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(s) = \cos s & \Rightarrow \int_0^t f(s) ds = \sin s \Big|_{s=0}^{s=t} \\ & = \sin t \Rightarrow \int_0^R \sin t dt = (-\cos t) \Big|_{t=0}^{t=R} = \\ & = -\cos R + 1 \Rightarrow \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^t f(s) ds = \frac{-\cos R + 1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

SATZ 3.11.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_0^T f(s) ds dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left(1 - \frac{s}{R}\right) f(s) ds$$

BEWEIS. Wir zeigen die Formel

$$\int_0^R \int_0^t f(s) ds dt = \int_0^R (R-s) f(s) ds$$

Integrationsbereich

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^t f(s) \, ds \, dt &= \int_0^R \int_s^R f(s) \, dt \, ds \\ &= \int_0^R (R-s) f(s) \, ds \end{aligned}$$

□

Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-R}^R \int_{-R}^{\tau} \hat{u}(s) e^{ist} \, ds \, d\tau \\ &\stackrel{\text{Satz 3.11}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) \hat{u}(s) e^{ist} \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) e^{ist} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) e^{-is\tau} \, d\tau \, ds \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) e^{is(t-\tau)} \, ds \, d\tau \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) e^{is(t-\tau)} ds = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{s}{R}\right) e^{is(t-\tau)} ds + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^0 \left(1 + \frac{s}{R}\right) e^{is(t-\tau)} ds}_{\substack{\|s \rightarrow -s \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{s}{R}\right) e^{-is(t-\tau)} ds}} \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^R e^{is(t-\tau)} ds - \frac{1}{2\pi R} \int_0^R s e^{is(t-\tau)} ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^R e^{-is(t-\tau)} ds - \frac{1}{2\pi R} \int_0^R s e^{-is(t-\tau)} ds \\
 & \stackrel{t \neq \tau}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(t-\tau)} e^{is(t-\tau)} \Big|_{s=0}^{s=R} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(t-\tau)} e^{-is(t-\tau)} \Big|_{s=0}^{s=R} \\
 & \boxed{\int s e^{\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha} \left(s - \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha s}} \\
 & - \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{i(t-\tau)} \left(s - \frac{1}{i(t-\tau)}\right) e^{is(t-\tau)} \Big|_{s=0}^{s=R} \\
 & + \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{i(t-\tau)} \left(s - \frac{1}{i(t-\tau)}\right) e^{-is(t-\tau)} \Big|_{s=0}^{s=R} \\
 & = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iR(t-\tau)} - e^{-iR(t-\tau)}}{i(t-\tau)} \\
 & - \frac{1}{2\pi R} R \frac{e^{iR(t-\tau)} - e^{-iR(t-\tau)}}{i(t-\tau)} \\
 & - \frac{1}{2\pi R} \frac{e^{iR(t-\tau)} + e^{-iR(t-\tau)} - 2}{(t-\tau)^2} \\
 & = \frac{2}{2\pi R} \frac{1 - \cos R(t-\tau)}{(t-\tau)^2} = \frac{2}{\pi R} \frac{\sin^2 \frac{R(t-\tau)}{2}}{(t-\tau)^2} \\
 & = \frac{R}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{R(t-\tau)}{2}}{\left(\frac{R(t-\tau)}{2}\right)^2}, t \neq \tau
 \end{aligned}$$

Für $t = \tau$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) ds = \frac{2}{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{s}{R}\right) ds \\
 & = \frac{1}{\pi} \left(R - \frac{s^2}{2R} \Big|_{s=0}^{s=R}\right) = \frac{R}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Die Funktion

$$F_R(t-\tau) := \begin{cases} \frac{R}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{R(t-\tau)}{2}}{\left(\frac{R(t-\tau)}{2}\right)^2}, t \neq \tau \\ \frac{R}{2\pi}, t = \tau \end{cases}$$

heißt Fejer-Kern.

Wir haben gerade bewiesen, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi R} \int_{-R}^R \int_{\tau}^{\tau} \hat{u}(s) e^{ist} ds d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) \hat{u}(s) e^{ist} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_R(t - \tau) u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Ob der Grenzwert existiert, werden wir im nächsten Abschnitt klären.

3.3. Summationskerne

(=gute Kerne)

DEFINITION 3.12. *eine Funktionenfamilie $\{k\}_{R>0}, k_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, heißt Summationskern, wenn gilt:*

- i $\int_{\mathbb{R}} k_R(s) ds = 1 \forall R > 0$.
- ii es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass $\|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \forall R > 0$
- iii für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|s| > \delta} |k_\delta(s)| ds = 0.$$

SATZ 3.13. *Sei $\{k_R\}_{R>0}$ ein Summationskern.*

- (1) *Ist $u \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt*

$$\|u - k_R * u\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

- (2) *Ist $u \in C_{b,u}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), C_{b,u}(\mathbb{R}) := \{u \in C_b(\mathbb{R}) | u \text{ gleichmäßig stetig}\}$, so gilt*

$$(k_R * u)(t) \longrightarrow u(t)$$

gleichmäßig in \mathbb{R} .

BEWEIS. (1) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $\delta > 0$ so klein, dass

$$\sup_{|\tau| \leq \delta} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \sup_{R > 0} \|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} < \delta \text{ (nach Lemma 3.4).}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
(k_R * u)(t) - u(t) &= \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)u(t - \tau)d\tau - u(t) \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)(u(t - \tau) - u(t))d\tau \\
\Rightarrow \|k_R * u - u\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)(u(t - \tau) - u(t))d\tau \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| |u(t - \tau) - u(t)| d\tau dt \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| \int_{\mathbb{R}} |u(t - \tau) - u(t)| dt d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^1(\mathbb{R})} d\tau \\
&= \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \right) |k_R(\tau)| \cdot \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^1(\mathbb{R})} d\tau \\
&= I_1 + I_2 \\
I_1 &\leq \sup_{|\tau| \leq \delta} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon \forall R > C \\
I_2 &\leq \underbrace{\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^1(\mathbb{R})}}_{\leq 2\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |k_R(\tau)| d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\
&\Rightarrow \limsup_{R \rightarrow \infty} \|k_R * u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \|k_R * u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0
\end{aligned}$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\delta > 0$ so klein, dass

$$\sup_{|\tau| \leq \delta} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sup_{R > 0} \|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
|(k_R * u)(t) - u(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)(u(t - \tau) - u(t)) \, d\tau \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| |u(t - \tau) - u(t)| \, d\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| \sup_{s \in \mathbb{R}} |u(s - \tau) - u(s)| \, d\tau \\
&\Rightarrow \|k_R * u - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \, d\tau \\
&= \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \right) |k_R(\tau)| \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \, d\tau \\
&= I_1 + I_2 \\
I_1 &\leq \sup_{|\tau| \leq \delta} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |k_R(\tau)| \, d\tau < \varepsilon \\
I_2 &\leq \underbrace{\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|u(\cdot - \tau) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}_{\leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |k_R(\tau)| \, d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\
&\Rightarrow \limsup_{R \rightarrow \infty} \|k_R * u - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \|k_R * u - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0
\end{aligned}$$

□

BEISPIELE. (1) *Der Dirichlet-Kern*

$$D_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Rt}{t}, & t \neq 0 \\ \frac{R}{\pi}, & t = 0 \end{cases}$$

ist kein Summationskern, denn $D_R \notin L^1(\mathbb{R})$.
Es gilt jedoch $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} D_R(t) \, dt = 1 \quad \forall R > 0$.

(2) Der Fejer-Kern

$$F_R(t) = \begin{cases} \frac{R}{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{Rt}{2})}{(Rt/2)^2}, & t \neq 0 \\ \frac{R}{2\pi}, & t = 0 \end{cases}$$

$$(i) \int_{\mathbb{R}} F_R(t) dt = \frac{R}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{Rt}{2})}{(\frac{Rt}{2})^2} dt \stackrel{\tau = \frac{Rt}{2}}{=} \frac{R}{2\pi} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \sin^2 \tau \left(-\frac{1}{\tau}\right)' d\tau$$

$$\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\sin^2 \tau}{\tau} d\tau - \underbrace{\frac{1}{\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau} \Big|_{\tau = -\rho}^{\tau = \rho}}_{=0}$$

$$\stackrel{2\tau=t}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-2\rho}^{2\rho} \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

$$(ii) F_R \geq 0$$

$$(iii) \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} F_R(t) dt = \frac{R}{2\pi} \left(\int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \right) \frac{\sin^2(\frac{Rt}{2})}{(\frac{Rt}{2})^2} dt$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{Rt}{2})}{(\frac{Rt}{2})^2} dt \stackrel{\tau = \frac{Rt}{2}}{=} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{R\delta}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau} d\tau$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

(3) Der Poisson-Kern

$$P_R(t) = \frac{R}{\pi(1+t^2R^2)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} P_R(t) dt \stackrel{\tau=tR}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = 1$$

Bedeutung: $v(t, s) = (P_{1/s} * u)(t)$ ist die eindeutige Lösung der Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung

$$\Delta v = \left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta s^2} \right) v(t, s) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\text{mit } \lim_{s \rightarrow 0^+} v(t, s) = u(t) \text{ in } L^1(\mathbb{R})$$

(4) Der Gauß-Kern

$$G_R(t) = \frac{R}{\sqrt{\pi}} e^{-R^2 t^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} G_R(t) dt = \frac{R}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-R^2 t^2} dt \stackrel{Rt=\tau}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} d\tau = 1$$

Bedeutung $v(s, t) = (G_{\frac{1}{2\sqrt{s}}} * u)(t)$ ist die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\delta v}{\delta s} = \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

mit $\lim_{s \rightarrow 0^+} v(t, s) = u(t)$ in $L^1(\mathbb{R})$

KOROLLAR 3.14. Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) Dann konvergiert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) \hat{u}(s) e^{ist} ds$$

für $R \rightarrow \infty$ gegen u bezüglich der L^1 -Norm.

(2) Auch gilt

$$\|P_R * u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

$$\|G_R * u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

KOROLLAR 3.15. (Eindeutigkeit) Seien $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. Gilt $\hat{u}(s) = \hat{v}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, so ist $u(t) = v(t)$ fast überall.

BEWEIS. Sei $w(t) := u(t) - v(t)$. Dann ist $\hat{w}(s) = \hat{u}(s) - \hat{v}(s) = 0$. Nach Korollar 3.14 konvergiert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) \hat{w}(s) e^{ist} ds = 0$$

gegen $w(t)$ in $L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow w(t) = 0$ fast überall $\Rightarrow u(t) = v(t)$ fast überall. \square

Was ist mit der Konvergenz von $D_R * u$?

SATZ 3.16. (Kolmogorov) Es gibt ein $u \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\sup_{R>0} |(D_R * u)(t)| = \infty$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert $D_R * u$ gegen u punktweise. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

3.4. Lokale Umkehrung der Fouriertransformation

SATZ 3.17. Sei $\{k_R\}_{R>0}$ ein Summationskern, $u \in L^1(\mathbb{R})$. Es gelte entweder

$$(1) \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|t| > \delta} |k_R(t)| = 0 \quad \forall \delta > 0$$

oder

$$(2) u \in L^\infty(\mathbb{R})$$

Dann gilt:

(a) Ist u stetig im Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist

$$(k_R * u)(t_0) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} u(t_0)$$

(b) Ist der Summationskern symmetrisch, d.h. $k_R(-t) = k_R(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t_0+h) + u(t_0-h)}{2} =: L$ existiert im Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$(k_R * u)(t_0) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} L$$

BEWEIS. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $\delta > 0$ so klein, dass

$$\sup_{R > 0} \|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{|\tau| \leq \delta} |u(t_0 - \tau) - u(t_0)| < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |(k_R * u)(t_0) - u(t_0)| &= \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau) u(t_0 - \tau) d\tau - u(t_0) \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau) (u(t_0 - \tau) - u(t_0)) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{|\tau| \leq \delta} k_R(\tau) (u(t_0 - \tau) - u(t_0)) d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{|\tau| > \delta} k_R(\tau) u(t_0 - \tau) d\tau \right| + \left| \int_{|\tau| > \delta} k_R(\tau) d\tau \right| \cdot |u(t_0)| \\ &\leq \underbrace{\|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{|\tau| \leq \delta} |u(t_0 - \tau) - u(t_0)|}_{< \varepsilon} \\ &\quad + \int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| |u(t_0 - \tau)| d\tau + \underbrace{\int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| d\tau}_{\rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty} \cdot |u(t_0)| \end{aligned}$$

Es gelte (1):

$$\begin{aligned} \int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| |u(t_0 - \tau)| d\tau &\leq \\ &\leq \sup_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Es gelte (2):

$$\begin{aligned} \int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| \cdot |u(t_0 - \tau)| d\tau &\leq \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $\delta > 0$ so klein, dass

$$\sup_{R > 0} \|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{0 < \tau < \delta} |u(t_0 - \tau) + u(t_0 + \tau) - 2L| < \varepsilon$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& |(k_R * u)(t_0) - L| = \\
& = \left| \int_{\mathbb{R}} k_R(\tau)(u(t_0 - \tau) - L) d\tau \right| \\
& = \left| \int_0^\infty k_R(\tau)(u(t_0 - \tau) + u(t_0 + \tau) - 2L) d\tau \right| \\
& \leq \left| \int_0^\delta k_R(\tau)(u(t_0 - \tau) + u(t_0 + \tau) - 2L) d\tau \right| \\
& + \left| \int_\delta^\infty k_R(\tau)u(t_0 - \tau) d\tau \right| + \left| \int_\delta^\infty k_R(\tau)u(t_0 + \tau) d\tau \right| \\
& + 2L \left| \int_\delta^\infty k_R(\tau) d\tau \right| \\
& \leq \underbrace{\|k_R\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{0 < \tau < \delta} |u(t_0 - \tau) + u(t_0 + \tau) - 2L|}_{< \varepsilon} \\
& + \int_\delta^\infty |k_R(\tau)| |u(t_0 - \tau)| d\tau + \int_\delta^\infty |k_R(\tau)| |u(t_0 + \tau)| d\tau \\
& + 2L \underbrace{\int_\delta^\infty |k_R(\tau)| d\tau}_{\rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

Es gelte (1):

$$\begin{aligned}
& \int_\delta^\infty |k_R(\tau)| |u(t_{0F}) \tau| d\tau \leq \\
& \leq \sup_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| \int_{\mathbb{R}} |u(t)| d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Es gelte (2):

$$\begin{aligned}
& \int_\delta^\infty |k_R(\tau)| |u(t_{0F}) \tau| d\tau \leq \\
& \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|\tau| > \delta} |k_R(\tau)| d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

□

SATZ 3.18. (Dini) Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Gilt

$$\int_0^\delta |u(x_0 + t) + u(x_0 - t) - 2u(x_0)| \frac{dt}{t} < \infty$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\delta > 0$, so konvergiert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) e^{isx_0} ds \text{ gegen } u(x_0).$$

BEWEIS. Betrachte

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) e^{isx_0} ds - u(x_0) = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}} D_R(t) u(x_0 - t) dt - u(x_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N D_R(t) dt \right] \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $M_1 > 0$ so groß, dass

$$\begin{aligned} & \int_{|t| \geq M_1} |D_R(t)| |u(x_0 - t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq M_1} \frac{|\sin(Rt)|}{|t|} |u(x_0 - t)| dt \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq M_1} \frac{|u(x_0 - t)|}{|t|} dt < \varepsilon \forall R > 0 \end{aligned}$$

Nun bemerke:

$$\begin{aligned} \int_M^N D_R(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_M^N \frac{\sin Rt}{t} dt \stackrel{\tau=Rt}{=} \\ & \quad (*) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{RM}^{RN} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

Wähle ein $M \geq M_1$ so groß, dass

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{N \rightarrow \infty} u(x_0) \left(\int_{-N}^{-M} + \int_M^N \right) D_R(t) dt \right| < \varepsilon \forall R \geq 1 \\ & \text{[Solche Wahl ist wegen (*) immer möglich!]} \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}} D_R(t) u(x_0 - t) dt - u(x_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N D_R(t) dt \right] \right| \\ & \leq 2\varepsilon + \underbrace{\left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-M}^M D_R(t) (u(x_0 - t) - u(x_0)) dt \right|}_{(**)} \\ & \quad (**) \stackrel{D_R(t) = D_R(-t)}{=} \int_0^M D_R(t) (u(x_0 - t) + u(x_0 + t) - 2u(x_0)) dt \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sin(Rt) \underbrace{\frac{u(x_0 - t) + u(x_0 + t) - 2u(x_0)}{t}}_{\in L^1 \text{ nach Dini-Bedingung}} dt \\ & + \frac{1}{\pi} \int_\delta^M \sin(Rt) \underbrace{\frac{u(x_0 - t) + u(x_0 + t) - 2u(x_0)}{t}}_{\in L^1 \text{ wegen } \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\delta}} dt \\ & \stackrel{\text{Riemann-Lebesgue}}{\Rightarrow} (**) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 3.19. Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Ist u Lipschitz-stetig, d.h.

$$|u(x+t) - u(x)| \leq L|t| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für ein $L > 0$, so konvergiert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) e^{isx} ds \text{ gegen } u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} & |u(x+t) + u(x-t) - 2u(x)| \leq \\ & \leq |u(x+t) - u(x)| + |u(x-t) - u(x)| \\ & \leq 2Lt \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^\delta \frac{|u(x+t) + u(x-t) - 2u(x)|}{t} dt \leq 2L\delta \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG. Jede C^1 -Funktion mit $\sup_{t \in \mathbb{R}} |u'(t)| < \infty$ ist Lipschitz-stetig, denn

$$\begin{aligned} |u(x+t) - u(x)| &= \left| \int_x^{x+t} u'(\tau) d\tau \right| \leq \int_x^{x+t} |u'(\tau)| d\tau \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |u'(\tau)| \cdot t \end{aligned}$$

Aber nicht jede stetige Funktion ist Lipschitz-stetig.

3.5. Funktionen von beschränkter Variation

DEFINITION 3.20.

$$\text{Var}_{(a,b)}(u) := \sup_{a < t_0 < \dots < t_n < b} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

heißt die Variation der Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Intervall (a, b) .

Ist $\text{Var}_{(a,b)}(u) < \infty$, so heißt u von beschränkter Variation auf (a, b) , $u \in BV((a, b))$.

BEMERKUNG. (1) BV-Funktionen brauchen nicht stetig zu sein:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, aber $\text{Var}_{\mathbb{R}}(u) = 2$

(2) Ist $u \in C^1((a, b))$, so gilt

$$\text{Var}_{(a,b)}(u) = \int_a^b |u'(t)| dt$$

SATZ 3.21. Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$. Ist $u \in BV(\mathbb{R})$, so gilt $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t\hat{u}(t)| \leq 2\pi \text{Var}_{\mathbb{R}}(u) < \infty$, d.h. $\hat{u}(t) = o\left(\frac{1}{|t|}\right)$, $|t| \rightarrow \infty$.

BEMERKUNG. Nach Satz 3.18 ist $\hat{u}(t) = o\left(\frac{1}{|t|}\right)$, $|t| \rightarrow \infty$, falls $u \in C^1(\mathbb{R})$ mit $u' \in L^1(\mathbb{R})$.

BEWEIS. Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig. Schreibe

$$\int_{\mathbb{R}} u(s)e^{-ist} ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N u(s)e^{-ist} ds.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $N \in \mathbb{R}_+$ mit $\frac{|t|N}{\pi} \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(s)e^{-ist} ds - \int_{-N}^N u(s)e^{-ist} ds \right| < \varepsilon$$

Sei $v : (-N, N] \rightarrow \mathbb{C}$ die stückweise konstante Funktion mit

$$v(s) := u\left(-N + \frac{1\pi k}{|t|}\right) \forall s \in \left(-N + \frac{2\pi k}{|t|}, -N + \frac{2\pi(k+1)}{|t|}\right]$$

$$k = 0, \dots, \underbrace{\frac{|t|N}{\pi}}_{\in \mathbb{N}} - 1$$

Beachte:

$$-N + \frac{2\pi}{|t|} \frac{|t|N}{\pi} = -N + 2N = N$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \int_{-N + \frac{2\pi k}{|t|}}^{-N + \frac{2\pi(k+1)}{|t|}} e^{-ist} ds &= -\frac{1}{it} e^{-ist} \Big|_{s = -N + \frac{2\pi k}{|t|}}^{s = -N + \frac{2\pi(k+1)}{|t|}} \\ &= -\frac{1}{it} e^{itN} e^{-\frac{2\pi k t}{|t|}} \left(\underbrace{e^{-\frac{2\pi t}{|t|}}}_{= 1} - 1 \right) = 0 \\ \Rightarrow \int_{-N}^N v(s)e^{-ist} ds &= 0 \end{aligned}$$

Umgekehrt sei $u(s) = f(s) - g(s)$ mit f, g monoton wachsend und beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} |u(s_i) - u(s_{i-1})| &= |f(s_i) - g(s_i) - f(s_{i-1}) + g(s_{i-1})| \\ &\leq |f(s_i) - f(s_{i-1})| + |g(s_i) - g(s_{i-1})| \\ \Rightarrow \text{Var}_{[a,b]}(u) &= \sup_{a=s_0 < s_1 < \dots < s_n = b} \sum_{i=1}^n |u(s_i) - u(s_{i-1})| \\ &\leq (f(b) - f(a)) + (g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

□

BEHAUPTUNG. 2 Jede monoton wachsende beschränkte Funktion besitzt die einseitigen Grenzwerte.

BEWEIS. Sei $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $s_0 \in (a, b)$ nicht stetig. Die Menge

$$\{u(s) \mid a \leq s < s_0\}$$

ist nach oben beschränkt. Sei

$$A := \sup_{a \leq s < s_0} u(s).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} A - \varepsilon &< u(s_0 - \delta) \leq A \\ \Rightarrow u(s_0 - \delta) &\leq u(s) \leq A \forall s \in (s_0 - \delta, s_0) \\ \Rightarrow A - u(s) &\leq A - u(s_0 - \delta) < A - (A - \varepsilon) = \varepsilon \forall s \in (s_0 - \delta, s_0) \\ \Rightarrow u(s_0 - 0) &= A \end{aligned}$$

□

BEWEIS. VON SATZ 3.22 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $0 < \delta < a$, sodass

$$\max\left\{\text{Var}_{[s_0-\delta, s_0]}(u), \text{Var}_{(s_0, s_0+\delta]}(u)\right\} < \varepsilon.$$

Setze

$$\begin{aligned} v_1(s) &:= \begin{cases} u(s), & |s - s_0| > \delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ v_2(s) &:= \begin{cases} u(s_0 - 0), & s_0 - \delta \leq s < s_0 \\ u(s_0 + 0), & s_0 < \delta \leq s_0 + \delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ v_3 &:= u - v_1 - v_2 \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- (1) $u = v_1 + v_2 + v_3$
- (2) $v_1, v_2, v_3 \in L^1(\mathbb{R})$
- (3) $v_1(s) = 0 \forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$

(4)

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \neq s_0}} |v_3(s)| &= \sup_{\substack{s \in [-\delta + s_0, \delta + s_0] \\ s \neq s_0}} \underbrace{|v_3(s)|}_{\|u(s) - v_2(s)\|} \\
&= \max \left\{ \sup_{s_0 - \delta \leq s < s_0} |u(s) - u(s_0 - 0)|, \sup_{s_0 < s \leq s_0 + \delta} |u(s) - u(s_0 + 0)| \right\} \\
&\leq \max \left\{ \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u), \text{Var}_{(s_0, s_0 + \delta]}(u) \right\} < \delta
\end{aligned}$$

(5) Analog sieht man, dass

$$\text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(v_3) < \delta \text{ und } \text{Var}_{(s_0, s_0 + \delta]}(v_3) < \varepsilon.$$

□

Sei $u \in BV(s_0 - a, s_0 + a)$ für ein $a > 0$.
Es gibt ein $a > \delta > 0$, so dass

$$\max \left\{ \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u), \text{Var}_{(s_0, s_0 + \delta]}(u) \right\} < \varepsilon$$

BEHAUPTUNG.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u) = 0$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
u &= u_1 - u_2 \text{ mit } u_{1,2} \text{ monoton wachsend} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u_j) = \lim_{\eta \rightarrow 0} u_j(s_0 - \eta) - u(s_0 - \delta) \\
&\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} u_j(s_0 - \eta) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} u(s_0 - \delta) = 0 \\
\text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u) &\leq \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u_1) + \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u_2) \\
&\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Var}_{[s_0 - \delta, s_0)}(u) = 0
\end{aligned}$$

□

$$(1) \lim_{R \rightarrow \inf} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{v}_1(t) e^{is_0 t} dt = 0 \text{ nach Dini-Kriterium}$$

$$\begin{aligned}
 & (2) \\
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{v}_2(t) e^{is_0 t} dt = \int_{\mathbb{R}} D_R(s_0 - \mathfrak{S}) v_2(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \\
 & = \underbrace{\int_{s_0-\delta}^{s_0} D_R(s_0 - \mathfrak{S}) u(s_0 - 0) d\mathfrak{S}}_{\|\mathfrak{S}=s_0-\frac{\tau}{R}\|} + \underbrace{\int_{s_0}^{s_0+\delta} D_R(s_0 - \mathfrak{S}) u(s_0 + 0) d\mathfrak{S}}_{\|\mathfrak{S}=s_0+\frac{\tau}{R}\|} \\
 & = u(s_0 - 0) \frac{1}{R} \int_0^{R\delta} D_R\left(\frac{\tau}{R}\right) d\tau \quad u(s_0 + 0) \frac{1}{R} \int_0^{R\delta} D_R\left(\frac{\tau}{R}\right) d\tau \\
 & = (u(s_0 - 0) + u(s_0 + 0)) \frac{1}{\pi R} \int_0^{R\delta} \frac{\sin(\tau)}{\tau/R} d\tau \\
 & = (u(s_0 - 0) + u(s_0 + 0)) \frac{1}{\pi} \int_0^{R\delta} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau \\
 & \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{u(s_0 - 0) + u(s_0 + 0)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3) \\
 & \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{v}_3(t) e^{is_0 t} dt \right| = \\
 & = \left| \int_{\mathbb{R}} D_R(s_0 - \mathfrak{S}) v_3(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right| \\
 & = \left| \int_{\mathbb{R}} D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 - \mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right| \\
 & = \left| \int_{-\delta}^{\delta} D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 - \mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right| \\
 & \leq \underbrace{\left| \int_{-\delta}^0 D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 - \mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right|}_{\parallel} + \left| \int_0^{\delta} D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 - \mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right| \\
 & \quad \parallel \int_0^{\delta} D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 + \mathfrak{S}) d\mathfrak{S}
 \end{aligned}$$

Naive Idee, die nicht zum Ziel führt:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{\delta} D_R(\mathfrak{S}) v_3(s_0 - \mathfrak{S}) d\mathfrak{S} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{|\sin R\mathfrak{S}|}{\mathfrak{S}} \underbrace{|v_3(s_0 - \mathfrak{S})|}_{\leq \varepsilon} d\mathfrak{S} \\
 & \stackrel{\tau=R\mathfrak{S}}{<} \int_0^{R\delta} \frac{|\sin(\varepsilon)|}{\tau} \cdot d\tau \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty
 \end{aligned}$$

Eine bessere Idee:

BEHAUPTUNG. Sei $f \in BV([a, b]), g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq C \text{Var}_{[a,b]}(f) \cdot \sup_{\xi \in [a,b]} \left| \int_a^{\xi} g(t) dt \right| + \underbrace{\|f\|_{L^\infty([a,b])}}_{\substack{\uparrow \\ \text{sup statt ess - sup}}} \left| \int_a^b g(t) dt \right|$$

für ein $C > 0$.

BEWEIS. Es genügt, die Abschätzung für reellwertige Funktionen zu beweisen. Es gelte $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, wobei f_+ und f_- monoton wachsend sind. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{\pm}(t)g(t)dt &= f_{\pm}(a) \int_a^{\xi_{\pm}} g(t)dt + f_{\pm}(b) \int_{\xi_{\pm}}^b g(t)dt \\ &= (f_{\pm}(a) - f_{\pm}(b)) \int_a^{\xi_{\pm}} g(t)dt + f_{\pm}(b) \int_a^b g(t)dt \\ &\Rightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt = (f_+(a) - f_+(b)) \int_a^{\xi_+} g(t)dt \\ &\quad - (f_-(a) - f_-(b)) \int_a^{\xi_-} g(t)dt + f(b) \int_a^b g(t)dt \\ &\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \max\{|f_+(a) - f_+(b)|, |f_-(a) - f_-(b)|\} \cdot \\ &\quad \cdot \sup_{\xi \in [a,b]} \left| \int_a^{\xi} g(t)dt \right| + \|f\|_{L^\infty} \left| \int_a^b g(t)dt \right| \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $f_+(t) = \text{Var}_{[a,t]}(f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f_+(a) - f_+(b)| = \text{Var}_{[a,b]}(f)$$

$$f_- \stackrel{f_- = f - f_+}{\Rightarrow} |f_-(a) - f_-(b)| = |f(a) - f_+(a) - f(b) + f_+(b)|$$

$$\leq |f(a) - f(b)| + |f_+(a) - f_+(b)| \leq$$

$$\leq 2\text{Var}_{[a,b]}(f)$$

□

Betrachte

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\delta D_R(\mathfrak{G})v_3(s_0 - \mathfrak{G})d\mathfrak{G} \right| \leq \\ &\leq \underbrace{C\text{Var}_{[s_0-\delta, s_0]}(v_3)}_{< \varepsilon} \cdot \sup_{\xi \in [0, \delta]} \left| \int_0^\delta D_R(\sigma)d\mathfrak{G} \right| \\ &+ \underbrace{\|v_3\|_{L^\infty([s_0-\delta, s_0])}}_{\uparrow < \varepsilon} \left| \int_0^\delta D_R(\mathfrak{G})d\mathfrak{G} \right| \\ &\quad \boxed{\text{sup statt ess - sup}} \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \int_0^\delta D_R(\mathfrak{G})d\mathfrak{G} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin(R\mathfrak{G})}{\mathfrak{G}} d\sigma \stackrel{\tau=R\mathfrak{G}}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{R\delta} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} S_i(R\delta) (\text{Integralismus}) \end{aligned}$$

Also gilt $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{v}_3(t)e^{is_0 t} dt \right| \leq C_\varepsilon \forall R > 0$

□

KAPITEL 4

Fourier-Transformation in $L^p, p > 1$

Das Problem: $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R}) \forall p > 1$

4.1. Die Youngsche Ungleichung

Wir haben bereits mehrmals mit Faltungen gearbeitet:

$$\begin{aligned}(u * v)(t) &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau)v(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t - \tau)v(\tau) d\tau = (v * u)(t)\end{aligned}$$

Die Existenz der Faltung und ihre Eigenschaften waren in allen bisher untersuchten Fällen klar. Nun wollen wir den allgemeinen Fall betrachten, wo $u \in L^p(\mathbb{R})$ und $v \in L^q(\mathbb{R}), 1 \leq p, q \leq \infty$.

SATZ 4.1. (Youngsche Ungleichung)

Sei $u \in L^p(\mathbb{R}), v \in L^q(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, 1 \leq p, q, r \leq \infty.$$

Dann existiert $(u * v)(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \|v\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

BEWEIS. (1) Ist $q = \infty$, so ist $p = 1$ und $r = \infty$

$$\begin{aligned}\|u * v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t - \tau)| |v(\tau)| d\tau \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t - \tau)| d\tau \\ &= \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)| d\tau = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{L^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &:= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \\ &:= \inf_{\substack{N \subset \mathbb{R} \\ |N|=0}} \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus N} |f(t)|\end{aligned}$$

(2) Ist $p = \infty$, so ist $q = 1$ und $r = \infty$

Analog

(3) Sei nun $p, q < \infty$. Sei zunächst $r < \infty$.

Setze

$$p' := \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

$$q' := \frac{q}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} \\ &= 2 + \frac{1}{r} - \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{\parallel} = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad 1 + \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = \frac{p}{r} + p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{p}{r} + p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) = 1$$

Analog gilt $\frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} |(u * v)(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)| |v(t-\tau)| d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^{\frac{p}{q'}} (|u(\tau)|^{\frac{p}{r}} |v(t-\tau)|^{\frac{q}{r}}) |v(t-\tau)|^{\frac{q}{p'}} d\tau \\ &\quad \left(\frac{p}{q'} + \frac{p}{r} = 1, \frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|u(\tau)|^p)^{1/q'} (|u(\tau)|^p |v(t-\tau)|^q)^{1/r} (|v(t-\tau)|^q)^{1/p'} d\tau (*) \end{aligned}$$

$$u \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow |u|^p \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |u|^{\frac{p}{q'}} \in L^{q'}(\mathbb{R})$$

$$v \in L^q(\mathbb{R}) \Rightarrow |v|^q \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |v|^{\frac{q}{p'}} \in L^{p'}(\mathbb{R})$$

Der mittlere Term erfordert genauere Untersuchung.

BEHAUPTUNG. Für fast alle $t \in \mathbb{R}$ ist $|u|^p |v(t-\cdot)|^q \in L^1(\mathbb{R})$ und $t \mapsto \||u|^p |v(t-\cdot)|^q\|_{L^1(\mathbb{R})}$ integrierbar.

BEWEIS. Betrachte

wird später diskutiert

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p |v(t-\tau)|^q d\tau dt \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ (**) \\ = \end{array} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p \int_{\mathbb{R}} |v(t-\tau)|^q dt d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \cdot \|v\|_{L^q(\mathbb{R})}^q = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|v\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \end{aligned}$$

Zu (**): Wir brauchen die folgende Form des Satzes von Fubini (Fubini-Tonelli oder einfach Tonelli). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Falls eines der beiden Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t,s)| dt \right) ds, \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t,s)| ds \right) dt$$

existiert, dann existiert auch das andere und $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Also ist $t \mapsto \| |u|^p |v(t-\cdot)|^q \|_{L^1(\mathbb{R})}$ integrierbar

$\Rightarrow |u|^p |v(t-\cdot)|^q \in L^1(\mathbb{R})$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. □

Nach Behauptung gilt

$$(|u|^p |v(t-\cdot)|^q)^{1/r} \in L^r(\mathbb{R})$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Nun benötigen wir die Hölder-Ungleichung:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(\tau) d\tau \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^{s_1} d\tau \right)^{1/s_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\tau)|^{s_2} d\tau \right)^{1/s_2}$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1, 1 < s_1, s_2 < \infty, u \in L^{s_1}(\mathbb{R}), v \in L^{s_2}(\mathbb{R})$$

Die iterierte Form der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(\tau)h(\tau) d\tau \right| &\leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^{s_1} d\tau \right)^{1/s_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\tau)|^{s_2} d\tau \right)^{1/s_2} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(\tau)|^{s_3} d\tau \right)^{1/s_3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1 \quad 1 < s_1, s_2, s_3 < \infty$$

$$f \in L^{s_1}(\mathbb{R}), g \in L^{s_2}(\mathbb{R}), h \in L^{s_3}(\mathbb{R})$$

Wende diese Ungleichung auf (*) an:

$$|u|^{\frac{p}{q'}} \in L^{q'}(\mathbb{R}), |v|^{\frac{q}{p'}} \in L^{p'}(\mathbb{R}), |u|^{p/r} |v(t-\cdot)|^{q/r} \in L^p(\mathbb{R}) \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1 \text{ (bereits berechnet!)}$$

$$(*) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^{\frac{p}{q'} \cdot q'} d\tau \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(\tau)|^{\frac{q}{p'} \cdot p'} d\tau \right)^{1/p'}$$

$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^{\frac{p}{r} \cdot r} |v(t-\tau)|^{\frac{q}{r} \cdot r} d\tau \right)^{1/r}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(\tau)|^q d\tau \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p |v(t-\tau)|^q d\tau \right)^{1/r}$$

Nun betrachte

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R})}^r \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \right)^{r/q'} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(\tau)|^q d\tau \right)^{r/p'}$$

$$\cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p |v(t-\tau)|^q d\tau \right) dt}_{\| \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \cdot \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^q dt}$$

Berechne

$$1 + \frac{r}{q'} = r \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q'} \right) = \frac{r}{p}$$

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = 1$$

und

$$1 + \frac{r}{p'} = r \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p'} \right) = \frac{r}{q}$$

$$\frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1$$

Also gilt

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(\tau)|^q d\tau \right)^{1/q}$$

(4) Sei nun $p, q < \infty$ und $r = \infty \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|(u * v)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(\tau)| |v(t-\tau)| d\tau \stackrel{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t-\tau)|^q d\tau \right)^{1/q} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \|v\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

□

KOROLLAR 4.2. Sei $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $u * v \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{u * v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$.

BEWEIS. Wähle $p = q = r = 1$ in Satz 4.1 \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1 \Rightarrow u * v \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\widehat{u * v}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) v(s-\tau) d\tau ds$$

$$\stackrel{\text{Fubini für fast alle } t}{\text{(s. oben)}} = \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} v(s-\tau) ds d\tau$$

$$\stackrel{\text{Satz 4.1}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} u(\tau) \widehat{v}(t) d\tau = \widehat{u}(t) \cdot \widehat{v}(t).$$

□

4.2. Die L^2 -Theorie

Die Idee: Wir definieren F auf $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ und setzen dann F auf $L^2(\mathbb{R})$ fort.

LEMMA 4.3. (Plancherel). Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ stetig. Dann gilt $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$$

BEMERKUNG. Aus $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ folgt nicht, dass $u \in L^2(\mathbb{R})$. (siehe Beiblatt)

BEWEIS. Sei $v(t) := \overline{u(-t)}$. Setze $f = u * v$

$$\stackrel{\text{Satz 4.1}}{\Rightarrow} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + 1 \right)$$

$$\text{und } \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } f(0) &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau)v(0-\tau)d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau)\overline{u(\tau)}d\tau = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

BEIBLATT

$$(\alpha_n) \in l^1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_n \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_n \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^2 \frac{1}{|n|} n^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \alpha_n^2$$

Sei $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}}$ für $n = k^3$ und Null sonst

$$\Rightarrow \sum_n \alpha_n = \sum_k k^{-3/2} < \infty$$

Betrachte $|n| \alpha_n^2 = 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \alpha_n^2$ divergiert.

Nach Korollar 4.2 ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \hat{u}(t) \cdot \hat{v}(t) = \hat{u}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \overline{u(-s)} ds \\ &= \hat{u}(t) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{ist} u(-s) ds} \stackrel{\tau = -s}{=} \hat{u}(t) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t} u(\tau) d\tau} \\ &= |\hat{u}(t)|^2 \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die lokale Inversionsformel für stetige Funktionen (Satz ?): [$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ und Faltung zweier stetiger Funktionen ist stetig $\Rightarrow f \in C(\mathbb{R})$]

$$\underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|t|}{R}\right) \hat{f}(t) dt}_{\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi R} \int_{-R}^R \int_{-s}^s \hat{f}(t) dt} = \underbrace{\hat{f}(t)}_{\| \hat{u}(t) \|^2} = \underbrace{f(0)}_{\| u \|^2_{L^2(\mathbb{R})}}$$

Nach Satz ? konvergiert ein uneigentliches Integral im Sinne von Cesàro genau dann, wenn der Integrand integrierbar ist (im Sinne von Lebesgue). \square

KOROLLAR 4.4. Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt.$$

BEWEIS. FA: $C_0^\infty(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, d.h. zu jedem $u \in L^p(\mathbb{R})$ gibt es eine Folge $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|u - u_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$.

Komplett analog zeigt man: $C_0^\infty(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ mit der Norm

$$\|u\| := \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ beliebig, $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Folge mit $\|u_j - u\| \rightarrow 0$. Nach Lemma 4.3 ist $\hat{u}_j \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\hat{u}_j - \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\stackrel{\text{Lemma 4.3}}{=} 2\pi \|u_j - u_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow (\hat{u}_j) &\text{ ist konvergent in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Betrachte den punktweisen Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{u}_k(t) - \hat{u}(t)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} (u_k(s) - u(s)) ds \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |u_k(s) - u(s)| ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $L^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{u}_k = \hat{u}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.3}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

\square

SATZ 4.5. (Plancherel) Es gibt einen eindeutigen linearen stetigen Operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ sodass

$$\mathcal{F}u = \hat{u} \text{ für alle } u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Für alle $u \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (*)$$

BEMERKUNG. (1) (*) bedeutet, dass $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ eine Isometrie ist.

(2) Der Beweis ist eine Umsetzung folgender funktionalanalytischer Idee: Ist X ein BR und $\mathcal{D} \subset X$ dicht, so besitzt jeder lineare stetige Operator $T : \mathcal{D} \rightarrow X$ eine eindeutige Fortsetzung $\mathbb{T} : X \rightarrow X$ mit der gleichen Norm.

BEWEIS. (1) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Sei $u \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Setze

$$u_R(t) := \begin{cases} u(t), & |t| \leq R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte

$$\|u - u_R\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{|t|>R} |u(t)|^2 dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

$u_R \in L^1(\mathbb{R})$, denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_R(t)| dt &= \int_{-R}^R |u(t)| dt \stackrel{\text{CS}}{\leq} \left(\int_{-R}^R |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\cdot \left(\int_{-R}^R 1 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{2R} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

□

(2) Sei u_j eine Folge in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ mit $u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$. Wir setzen

$$\mathcal{F}u := L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{u}_j, \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

Warum existiert der Grenzwert in dieser Definition? (\hat{u}_j) ist eine Cauchyfolge in L^2 , denn

$$\|\hat{u}_j - \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|u_j - u_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{j, k \rightarrow \infty} 0$$

Da $L^2(\mathbb{R})$ vollständig ist, konvergiert die Folge.

BEHAUPTUNG. 1 $\mathcal{F}u$ hängt nicht von der Wahl der Folge $u_j \rightarrow u$ ab.

BEWEIS. Es gelte $u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$ und $v_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$. Betrachte

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_j - \hat{v}_j\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{2\pi} \|u_j - v_j\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{u}_j &= L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{v}_j \end{aligned}$$

□

BEHAUPTUNG. 2 \mathcal{F} ist linear.

BEWEIS. Sei $u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u, v_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v, u_j, v_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
Betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha u + \beta v) &= L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} (\alpha \hat{u}_j + \beta \hat{v}_j) = \\ &= \alpha L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{u}_j + \beta L^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{v}_j = \alpha \mathcal{F}u + \beta \mathcal{F}v \end{aligned}$$

□

(3)

$$\frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}).$$

Insbesondere ist \mathcal{F} stetig.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|\hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \\ &= 2\pi \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

□

(4) \mathcal{F} ist der eindeutige stetige lineare Operator mit $\mathcal{F}u = \hat{u}$ für $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

BEWEIS. Sei $\mathcal{F}_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ein weiterer stetiger linearer Operator mit $\mathcal{F}_1 u = \hat{u}$ für $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\mathcal{F}u - \mathcal{F}_1 u = \hat{u} - \hat{u} = 0 \quad \forall u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Sei $u \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig, $u_j \xrightarrow{L^2} u, u_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1)u &\stackrel{\mathcal{F}-\mathcal{F}_1 \text{ stetig}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1)u_j = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{F} &= \mathcal{F}_1 \end{aligned}$$

□

Aus dem Beweis von Satz 4.5 folgt, dass

$$(\mathcal{F}u)(t) = L^2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R u(s) e^{-ist} dt$$

für alle $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Nach Satz 4.5 ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}$ eine Isometrie.

Jede Isometrie \mathcal{U} ist injektiv, denn aus $\mathcal{U}u = 0$ folgt $\|u\| = \|\mathcal{U}u\| = 0 \Rightarrow u = 0$.

BEHAUPTUNG. Das Bild einer Isometrie in $L^2(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen.

BEWEIS. Sei v_j eine konvergente Folge in Bild (\mathcal{U}) mit Grenzwert $v \Rightarrow v_j = \mathcal{U}u_j$ für gewisse $u_j \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \|u_j - u_k\| =$

$$= \|\mathcal{U}(u_j - u_k)\| = \|v_j - v_k\| \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow (u_j)$ ist eine Cauchyfolge

$$\Rightarrow u := \lim_{j \rightarrow \infty} u_j \Rightarrow v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{U}u_j$$

$$= \mathcal{U}u \Rightarrow v \in \text{Bild}(\mathcal{U})$$

□

LEMMA 4.6. Das Bild von \mathcal{F} liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$.

BEWEIS. Sei $v \in C_0^2(\mathbb{R})$ beliebig. Betrachte

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} v(t) e^{ist} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{v}(-s)$$

$$\text{Satz 3.6} \Rightarrow |\hat{v}(s)| \leq \frac{\|v''\|_{L^1(\mathbb{R})}}{|s|^2}, |\hat{v}(s)| \text{ beschränkt}$$

$$\Rightarrow \hat{v} \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$\text{Setze } u(s) := \frac{1}{2\pi} \hat{v}(-s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-ist} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(-s) e^{-ist} ds$$

$$\stackrel{s \rightarrow -s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(s) e^{ist} ds \stackrel{\text{Satz 3.8}}{=} v(t)$$

Folglich gilt $C_0^2(\mathbb{R}) \subset \text{Bild}(\mathcal{F})$

BEHAUPTUNG. $C_0^2(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$.

BEWEIS.

$$\left. \begin{array}{l} C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ liegt dicht in } L^2(\mathbb{R}) \\ C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset C_0^2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \Rightarrow C_0^2(\mathbb{R}) \text{ ist dicht in } L^2(\mathbb{R})$$

□

□

Wir haben gezeigt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{- Bild}(\mathcal{F}) \text{ abgeschlossen} \\ \text{- Bild}(\mathcal{F}) \text{ dicht} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bild}(\mathcal{F}) = L^2(\mathbb{R})$$

KOROLLAR 4.7. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist eine bijektive Isometrie. Die inverse Abbildung $\sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}$ ist ebenfalls isometrisch und durch

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(s) = \frac{1}{2\pi} L^2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R u(t) e^{its} dt$$

gegeben.

BEWEIS. Der erste Teil der Aussage ist bereits bewiesen. Für den Beweis des zweiten Teils wähle ein $u \in L^2(\mathbb{R})$. Setze $\tilde{u} = \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R})$ und

betrachte

$$\begin{aligned}
& \left| u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ist} \tilde{u}(s) ds \right|^2 = \\
& = |u(t)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{-R}^R e^{ist} \tilde{u}(s) ds \right|^2 - \frac{1}{2\pi} \overline{u(t)} \int_{-R}^R e^{ist} \tilde{u}(s) ds \\
& \quad - \frac{1}{2\pi} u(t) \int_{-R}^R e^{-ist} \overline{\tilde{u}(s)} ds \\
& \Rightarrow \left\| u - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{is\cdot} \tilde{u}(s) ds \right\|_{L^2(-M,M)}^2 = \|u\|_{L^2(-M,M)}^2 + I_2 - I_3 - I_4 \\
I_3 & = \int_{-M}^M \overline{u(t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ist} \tilde{u}(s) ds dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \tilde{u}(s) \underbrace{\int_{-M}^M \overline{u(t)} e^{ist} dt}_{\| \int_{-M}^M u(t) e^{-ist} dt \|} ds \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \tilde{u}(s) \overline{\tilde{u}(s)} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{u}(s) \left(\tilde{u}(s) - \int_{-M}^M u(t) e^{-ist} dt \right) ds \\
& \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \left| I_3 - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\hat{u}(s)|^2 ds \right| \leq \\
& \stackrel{\text{CS}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \lim_{M \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\int_{-R}^R |\tilde{u}(s) - \int_{-M}^M u(t) e^{-ist} dt|^2 ds \right)^{1/2}}_{\downarrow 0} = 0 \\
& \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned}
I_4 & = \int_{-M}^M u(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{-ist} \overline{\tilde{u}(s)} ds \\
& \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-M}^M \underbrace{\left| \int_{-R}^R e^{ist} \tilde{u}(s) ds \right|^2}_{\| \int_{\mathbb{R}} e^{-i(-s)t} \tilde{u}(s) \chi_R(s) ds = \hat{v}(-s)} dt \\
 &\text{mit } v(s) = \hat{u}(s) \chi_R(s) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-M}^M |\hat{v}(-s)|^2 ds \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{Korollar 4.4}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |v(s)|^2 ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds
 \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
 &\|u - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{is \cdot} \tilde{u}(s) ds\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \\
 &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds - \frac{2}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds \\
 &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\tilde{u}(s)|^2 ds \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0
 \end{aligned}$$

□

Eine Anwendung:

BEISPIEL. *Berechne*

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

Sei

$$\begin{aligned}
 u(s) &:= \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}(s) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \hat{u}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-ist} ds = \frac{1}{2(-it)} e^{-ist} \Big|_{s=-1}^{s=1} \\
 &= \frac{\sin t}{t}
 \end{aligned}$$

Plancherel

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |u(s)|^2 ds \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

4.3. Die Fouriertransformation von L^p -Funktionen

Die Fouriertransformation $u \mapsto \hat{u}$ ist wohldefiniert für alle $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Die Frage: Kann die Fouriertransformation stetig auf $L^p(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden? (Analog dem Fall $p = 2$). Die Antwort ist positiv für $1 < p < 2$ und negativ für $p > 2$.

SATZ 4.8. (Interpolationssatz von Riesz-Torin) Sei $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Sei T eine lineare stetige Abbildung von $L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$ in $L^{q_0}(\mathbb{R}) \cap L^{q_1}(\mathbb{R})$ mit $\|Tu\|_{L^{q_0}(\mathbb{R})} \leq M_0 \|u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}$ und $\|Tu\|_{L^{q_1}(\mathbb{R})} \leq M_1 \|u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})}$. Dann gilt für jedes $u \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$ und jedes $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} Tu &\in L^{q_t}(\mathbb{R}) \text{ und } \|Tu\|_{L^{q_t}(\mathbb{R})} \leq C_t \|u\|_{L^{p_t}(\mathbb{R})} \\ \text{mit } \frac{1}{p_t} &= \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}, \frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_0} \\ \text{und } C_t &= M_0^{1-t} M_1^t. \end{aligned}$$

LEMMA 4.9. (Hausdorff-Young) Sei $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(s)|^q ds \right)^{1/q} \leq (2\pi)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

BEMERKUNG. Ist $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, so ist $u \in L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < 2$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^p dt &= \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{2-p} |u(t)|^{2p-2} dt = (*) \\ 0 < 2-p < 1 & \quad 0 < p-1 < 1 \\ 1 < \frac{1}{2-p} < \infty & \quad 1 < \frac{1}{p-1} < \infty \\ \left(\frac{1}{2-p} \right)^{-1} &+ \left(\frac{1}{p-1} \right)^{-1} = 2-p + p-1 = 1 \\ \Rightarrow (*) &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{(2-p)\frac{1}{2-p}} dt \right)^{2-p} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{(2p-2)\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \right)^{2-p} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \right)^{p-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

□

BEWEIS. VON LEMMA Sei $p_0 = q_0 = 2$ und $p_1 = 1, q_1 = \infty$. Sei $T : u \rightarrow \hat{u}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{2\pi} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \Rightarrow M_0 = \sqrt{2\pi} \\ \|Tu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-its} dt \right| \leq \\ &\leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} \Rightarrow M_1 = 1 \end{aligned}$$

Wähle $t \in (0, 1)$ so, dass $p_t = p \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{p_t} &= \frac{t}{1} + \frac{1-t}{2} = \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow \frac{1+t}{2} &= \frac{1}{p} \Leftrightarrow 1+t = \frac{2}{p} \Leftrightarrow t = \underbrace{\frac{2}{p}}_{\substack{\uparrow \\ (1,2) \\ \in(0,1)}} - 1 \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} q_t : \frac{1}{q_t} &= \frac{t}{\infty} + \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{p} + 1 \right) = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q_t = q \\ C_t &= \sqrt{2\pi}^{1-t} = (2\pi)^{1-\frac{1}{p}} = (2\pi)^{1/q} \end{aligned}$$

Nach Riesz-Thorin gilt

$$Tu \in L^q(\mathbb{R}) \text{ und } \|Tu\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{1/q} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

□

BEHAUPTUNG. $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$

BEWEIS.

$$\left. \begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ ist dicht in } L^p(\mathbb{R}) \\ C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \text{ ist dicht in } L^p(\mathbb{R})$$

□

SATZ 4.10. (Hausdorff-Young) Sei $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gibt einen eindeutigen linearen stetigen Operator $F : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$, sodass

$$Fu = \hat{u} \quad \text{für alle } u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Es gilt

$$\|Fu\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{1/q} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

LEMMA 4.11. Sei $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$Fu = L^q - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{is \cdot} u(s) ds \quad \forall u \in L^p(\mathbb{R})$$

Diese Formel ist weniger trivial als im Fall $p = 2$. Der Grund ist, dass

$$\begin{aligned} u_R(s) &= \begin{cases} u(s), & |s| \leq R \\ 0, & |s| > R \end{cases} \quad \text{nicht in } L^2(\mathbb{R}) \text{ zu liegen braucht} \\ \Rightarrow u_R &\notin L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \text{ im Allgemeinen (liegt aber in } L^1(\mathbb{R})!) \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Idee:

$$FT \text{ auf } L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow FT \text{ auf } L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$$

$$\rightsquigarrow FT \text{ auf } L^p(\mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \text{bezeichnet die stetige Fortsetzung}$$

(1) Sei $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ beliebig.

$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

(siehe oben : dicht in $L^p(\mathbb{R})$)

\Rightarrow es gibt eine Folge $u_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\|u - u_j\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u - u_j\|_{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_j - \hat{u}_k\|_{L^q(\mathbb{R})} &= \|u_j - u_k\|_{L^q(\mathbb{R})} \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.9}}{\geq} (2\pi)^{1/q} \|u_j - u_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \hat{u}_j \text{ ist konvergent in } L^q(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} |\hat{u}_j(t) - \hat{u}(t)| &\leq \|u_j - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \hat{u}_j \text{ konvergiert punktweise gegen } \hat{u} \end{aligned}$$

Folglich ist $L^q - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{u}_j = \hat{u}$ und somit

$$Fu = L^q - \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{u}_j = \hat{u} \quad \forall u \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

(2) Sei $u \in L^p(\mathbb{R})$ beliebig. $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R})$ (siehe oben) und $u_R \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

□

Für $1 \leq p < 2$ ist die Fouriertransformation $F : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$ nicht surjektiv.

Einfacher Beweis für $p = 1$: Sei $v = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $Fu \in C_\infty(\mathbb{R}) \forall u \in L^1(\mathbb{R})$, aber $1 \notin C_\infty(\mathbb{R})$.

Nun diskutieren wir die inverse Fouriertransformation. Wir haben bereits gezeigt (Korollar ??), dass für jedes $u \in L^1(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) \hat{u}(s) e^{ist} ds \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{L^1(\mathbb{R})} u$$

Nun beweisen wir eine Verallgemeinerung von Satz 3.11 (1):

Satz 4.12. Sei $\{k_R\}_{R>0}$ ein Summationskern. Ist $u \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, so gilt

$$\|u - k_R * u\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$$

Der Beweis geht wortwörtlich!

Warum haben wir damals nur den Fall $p = 1$ betrachtet? Weil wir die Faltungen mit L^p -Funktionen noch nicht studiert haben! (Young'sche Ungleichung)

Die Formel

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi R} \int_{-R}^R \int_{-\tau}^{\tau} \hat{u}(s) e^{ist} ds d\tau = \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R} \right) \hat{u}(s) e^{ist} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_R(t - \tau) u(\tau) \quad \forall u \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

ist uns bereits bekannt. Sie bleibt auch richtig für alle $1 < p < 2$, wenn wir $\hat{u}(s)$ durch $(Fu)(s)$ ersetzen. Genauer:

LEMMA 4.13. Ist $u \in L^p(\mathbb{R})$ und $v \in (\mathbb{R})$, so gilt

$$F(u * v) = F(u) \cdot F(v).$$

BEWEIS. Analog zum Beweis von Korollar 4.2 (dort ist $p = 1$). Wir bemerken, dass für $u \in L^p(\mathbb{R})$ und $v \in L^1(\mathbb{R})$ nach der Young'schen Ungleichung $u * v \in L^p$ ist (wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{1} = \frac{1}{r} + 1 \Rightarrow r = p$). Wähle nun

$$\begin{aligned} v &= F_R \Rightarrow (Fv)(s) = \hat{v}(s) = \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{R}\right), & |s| \leq R \\ 0, & |s| > R \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt

$$F(F_R * u)(s) = (Fu)(s) \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{R}\right), & |s| \leq R \\ 0, & |s| > R \end{cases} \quad (*)$$

Nun bemerken wir, dass $F_R \in L^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\stackrel{\text{Young}}{\Rightarrow} F_R * u \in L^\infty(\mathbb{R}) \left(\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_{=1} = \frac{1}{\infty} + 1 \right)$$

Jede Funktion in $L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ liegt in $L^2(\mathbb{R})$ ($1 < p < 2$), denn:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &:= \frac{v}{\|v\|_{L^\infty}} \leq 1 \Rightarrow |\tilde{v}|^2 \leq |\tilde{v}|^p, 1 < p < 2 \\ &\Rightarrow \|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|\tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \Rightarrow \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p/2}}{\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p/2}} \\ &= \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-p/2} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p/2} \\ &\Rightarrow F_R * u \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.7 (Inversion in $L^2(\mathbb{R})$) folgt aus (*)

$$\begin{aligned} F_R * u &= F^{-1}F(F_R * u) = \\ &= F^{-1} \left(F(u) \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{R}\right), & |s| \leq R \\ 0, & |s| > R \end{cases} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) (Fu)(s) e^{its} ds \end{aligned}$$

Nach Satz 4.12 folgt nun

$$u = L^p - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|s|}{R}\right) (Fu)(s) e^{its} ds$$

□

BEMERKUNG. Für $1 < p < 2$ gilt auch die einfachere Inversionsformel:

$$u = L^p - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R (Fu)(s) e^{its} ds$$

KOROLLAR 4.14. Sei $1 \leq p \leq 2$. Dann liegt $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \text{supp } Fu \text{ kompakt}\}$ dicht in $L^p(\mathbb{R})$.

BEWEIS. $F : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow FL^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ ist ein Homöomorphismus; $\{v \in L^q(\mathbb{R}) \mid \text{supp } v \text{ kompakt}\}$ ist dicht in $L^q(\mathbb{R}) \Rightarrow \{v \in FL^p(\mathbb{R}) \mid \text{supp } v \text{ kompakt}\}$ ist dicht in $FL^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F^{-1}\{v \in FL^p(\mathbb{R}) \mid \text{supp } v \text{ kompakt}\}$$

ist dicht in $L^p(\mathbb{R})$

□