Funktionalanalysis II und III

Prof. Dr. Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Sommersemester 2024
Vorlesungsbegleitendes Skript

Stand: 17. Juli 2024

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein kleines Nachschlagewerk zur Vorlesung „Funktionalanalysis II“. Das Skriptum sollte kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch sein.

Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:
`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Herrn Sebastian Bickerle und Frau Ulrike Jacobi für die hervorragende Arbeit bei der Erstellung der LaTeX-Version des Skriptums.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 5

Lineare stetige Abblidungen normierter Räume

5.1. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X und Y normierte Räume. So ist $X \times Y$ versehen mit einer Norm

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

oder

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

wieder ein normierter Raum. Alle diese Normen sind äquivalent.

Definition 5.1. *Seien X und Y Banachräume, sowie $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Die Menge $G(T) := \{(x, Tx) | x \in X\} \subset X \times Y$ heißt* Graph *von T. Der Operator T heißt* abgeschlossen, *wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist.*

Lemma 5.2. *Seien X und Y Banachräume. Die lineare Abbildung $T : X \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge (x_n) in X, mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ für $n \to \infty$, folgt, dass $Tx = y$.*

Beweis. Der Graph $G(T)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ folgt, dass $(x,y) \in G(T)$. Äquivalent: Aus $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ folgt $Tx = y$. □

Bemerkung. *Betrachte folgende Aussagen:*

(a) $x_n \to x$,
(b) Tx_n *konvergiert, etwa* $Tx_n \to y$,
(c) $Tx = y$.

Dann gilt:

(1) *T ist stetig, falls (a) impliziert (b) und (c).*
(2) *T ist abgeschlossen, falls (a),(b) implizieren (c).*

Satz 5.3 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X und Y Banachräume, sowie $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann gilt: T ist stetig genau dann, wenn T abgeschlossen ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei (x_k) eine Folge in X mit $x_k \to x$. Da T stetig ist, gilt $Tx_k \to Tx$. Folgich ist

$$(x_k, Tx_k) \overset{\|\cdot\|_{X\times Y}}{\longrightarrow} (x, Tx) \in G(T).$$

Also ist $G(T)$ abgeschlossen.

($\Leftarrow$) $(G(T), \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist ein Banachraum. Für alle $(x,y) \in G(T)$ definiere $P_X(x,y) := x$ und $P_Y(x,y) := y$. Die Operatoren $P_X : G(T) \to X$ und $P_Y : G(T) \to Y$ sind stetig, denn

$$\begin{aligned} \|P_X(x,Tx)\|_X &= \|x\|_X \le \|(x,Tx)\|_{X\times Y}, \\ \|P_Y(x,Tx)\|_Y &= \|Tx\|_Y \le \|(x,Tx)\|_{X\times Y}. \end{aligned}$$

Der Operator P_X ist surjektiv, denn für jedes $x \in X$ gilt $x = P_X(x,Tx)$, und injektiv, denn aus $P_X(x,Tx) = 0$ folgt $x = 0$ und somit $Tx = 0$. Folglich ist $T = P_Y P_X^{-1}$ stetig. □

Hier ist eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen:

Satz 5.4 (Hellinger-Toeplitz). *Sei X ein Hilbertraum, sowie $T : X \to X$ linear mit $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$ für alle $x,y \in X$. Dann ist T stetig und folglich selbstadjungiert.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass T abgeschlossen ist, d.h.

$$\left.\begin{aligned} x_n &\to x \\ Tx_n &\to z \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = Tx$$

oder äquivalent für die Folge $\widetilde{x_n} := x_n - x$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x_n} &\to 0 \\ T\widetilde{x_n} &\to z \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 0.$$

Betrachte hierzu:

$$\begin{aligned} \langle z,z\rangle &= \big\langle \lim_{n\to\infty} T\widetilde{x_n}, z\big\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widetilde{x_n}, z\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \widetilde{x_n}, Tz\rangle = \big\langle \lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n}, Tz\big\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Nun diskutieren wir eine weitere Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen. Sei $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ eine Folge, $(T_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ eine unendliche Matrix. Wir definieren

$$t_j := \sum_{k=1}^{\infty} T_{jk} s_k$$

falls die Reihen konvergieren und setzen

$$t := (t_j)_{j\in\mathbb{N}}, \qquad t := Ts.$$

Falls existiert, ist T ein linearer Operator.

Proposition 5.5. *Bildet T den Banachraum $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ in sich ab, so ist $T : c_0(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$ stetig.*

Beweis. Wir zeigen, dass T abgeschlossen ist. Es gelte $s^{(n)} \to 0$, $Ts^{(n)} \to t$. Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig, $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$. Betrachte

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_{jk} s_k =: l(s).$$

Das Funktional l ist offenbar linear. Für alle $s \in c_0(\mathbb{N})$ gilt

$$l_n(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} l(s) \tag{5.1}$$

mit

$$l_n(s) = \sum_{k=1}^{n} T_{jk} s_k.$$

Die Fuktionale l_n sind linear und stetig. Wegen (5.1) gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(s)| < \infty \qquad \text{für alle} \qquad s \in c_0(\mathbb{N}).$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz I.2.18) gibt es eine Konstante $C > 0$ so, dass $\|l_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|l(s)| = \lim_{n\to\infty} |l_n(s)| \le C\|s\|.$$

Also ist l stetig. Wegen $c_0' \simeq \ell^1$, folgt daraus (vgl. Satz I.2.3) $(T_{jk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$.

Sei nun $t^{(n)} := Ts^{(n)}$. Es gilt

$$|t_j^{(n)}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |T_{jk}||s_k^{(n)}| \le \underbrace{\sup_{k\in\mathbb{N}} |s_k^{(n)}|}_{\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |T_{jk}|.$$

Somit konvergiert die Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ komponentenweise gegen Null. Da diese Folge auch in $c_0(\mathbb{N})$ konvergent ist, gilt $t = 0$.

Nach dem Satz von abgeschlossenen Graphen ist der Operator T stetig. □

Wir betrachten ein Beispiel nichtabgeschlossener Operatoren. Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Wir erinnern uns daran, dass eine Teilmenge $B \subset X$ *Hamel-Basis* oder *algebraische Basis* von X heißt, falls jedes Element von X sich durch eine eindeutige endliche Linearkombination von Elementen aus B darstellen lässt. Insbesondere ist B linear unabhängig. Jeder Vektorraum besitzt eine Hamel-Basis.

Behauptung. B ist überabzählbar.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine abzählbare Hamel-Basis $B = \{e_j | j \in \mathbb{N}\}$. Sei $X_n := \operatorname{lin}\{e_j | j \le n\}$. Dann ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Die Teilräume X_n sind abgeschlossen, denn $\dim X_n < \infty$. Nach den Kategoriensatz von Baire (Korollar I.2.17) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass X_{n_0} nichtleeres Innere besitzt. Dann existiert eine offene Kugel $B_{\varepsilon_0}(x_{n_0}) \subset X_{n_0}$, d.h. $B_{\varepsilon_0}(x_{n_0})$ ist relativ kompakt. Widerspruch. $\boxed{\text{B}}$

Sei nun $B := \{y_i | i \in I\}$ eine Hammel-Basis in X. O.B.d.A. sei $\|y_i\| = 1$ für alle $i \in I$. Wähle eine abzälbare Teilmenge $\{x_j | j \in \mathbb{N}\} \subset B$. Setze

$$l(x_j) = j, \quad j \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad l(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in B \setminus \{x_j | j \in \mathbb{N}\}.$$

Das Funktional l besitzt eine eindeutige lineare Fortsetzung auf X: Sei $y = \sum_{i \in I \cap N_y} \alpha_i y_i$ für eine endliche Teilmenge $N_y \subset I$. Setze

$$l(y) := \sum_{i \in I \cap N_y} \alpha_i l(y_i).$$

Das Funktional l ist unbeschränkt, denn $l(x_j) \to \infty$ für $j \to \infty$, und nicht abgeschlossen, denn $x_j/j \to 0$ und $l(x_j/j) = 1$.

Unbeschränkte Funktionale besitzen eine überaschende Eigenschaft:

BEHAUPTUNG. Sei X ein Banachraum, $l : X \to \mathbb{K}$ ein unbeschränktes lineares Funktional. Dann ist $\overline{\operatorname{Kern} l} = X$.

BEWEIS. Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|l(x_n)| \geq n\|x_n\|$. O.B.d.A. sei $\|x_n\| = 1$. Dann gilt $|l(x_n)| \geq n$. Sei $x \in X \setminus \operatorname{Kern} l$ beliebig. Betrachte

$$z_n := x - \frac{l(x)}{l(x_n)} x_n \qquad \Rightarrow \qquad z_n \in \operatorname{Kern} l.$$

Nun folgt aus

$$\|z_n - x\| = \frac{|l(x)|}{|l(x_n)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

dass $x \in \overline{\operatorname{Kern} l}$. $\boxed{\text{B}}$

Später werden wir lineare Operatoren studieren, die auf einer dichten Teilmenge von X definiert sind. Solche Operatoren können unbeschränkt, aber abgeschlossen sein.

5.2. Der adjungierte Operator

DEFINITION 5.6. *Seien X, Y normierte Räume, sowie $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Der* adjungierte Operator $T' : Y' \to X'$ *ist durch*

$$(T'y')(x) = y'(Tx)$$

definiert.

Der adjungierte Operator ist offensichtlich linear.

BEISPIELE. (1) *Sei $1 \leq p < \infty$, sowie $X = Y = \ell^p(\mathbb{N})$. Dann ist $X' = Y' \cong \ell^q(\mathbb{N})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $j : X' \to \ell^q$, $y' \mapsto (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der zugehörige isometrische Isomorphismus,*

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \quad \text{für ein} \quad (y_n) = jy' \in \ell^q \quad \text{und alle} \quad x = (x_n) \in \ell^p.$$

Betrachte den Shiftoperator in X:

$$T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Es gilt: $jT'j^{-1} : \ell^q \to \ell^q$. Zum Beweis betrachte

$$y'(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n.$$

Folglich ist

$$jT'j^{-1} : (y_1, y_2, \dots) \mapsto (0, y_1, y_2, \dots).$$

(2) *Sei* $1 \le p < \infty$, $X = Y = L^p(0,1) \Rightarrow X' = Y' \cong L^q(0,1)$ *mit* q *wie oben. Sei* $j : X' \to L^q(0,1)$ *der zugehörige isometrische Isomorphismus,*

$$x'(x) = \int_0^1 \underbrace{(jx')(t)}_{\in L^q} \underbrace{x(t)}_{\in L^p} \, dt.$$

Sei $h \in L^\infty(0,1)$ *beliebig. Der Multiplikationsoperator*

$$T_p : L^p(0,1) \ni f \mapsto hf \in L^p(0,1)$$

ist stetig, denn

$$\int_0^1 |h(t)f(t)|^p \, dt = \int_0^1 |h(t)|^p |f(t)|^p \, dt \le \|h\|_{L^\infty}^p \int_0^1 |f(t)|^p \, dt.$$

Behauptung: $jT_p' j^{-1} = T_q$.

Beweis. *Seien* $g \in X'$ *und* $f \in X$ *beliebig. Betrachte*

$$\begin{aligned}
(T_p' g)(f) = g(T_p f) &= \int_0^1 (T_p f)(t)(jg)(t) \, dt \\
&= \int_0^1 h(t) f(t) (jg)(t) \, dt = \int_0^1 f(t) h(t) (jg)(t) \, dt \\
&= \int_0^1 f(t) (T_q(jg))(t) \, dt = \ (j^{-1} T_q jg)(f),
\end{aligned}$$

d.h. $T_p' = j^{-1} T_q j$. $\boxed{B}$

(3) *Der Integraloperator* T *auf* $L^2(0,1)$

$$(Tf)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \, dt \quad \textit{mit} \quad k \in L^2((0,1) \times (0,1))$$

ist eine Selbstabblidung auf L^2*, denn:*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(Tf)(s)|^2 \, ds &\le \int_0^1 \left| \int_0^1 k(s,t) f(t) \, dt \right|^2 ds \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2 \, dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right) ds \\
&= \|k\|_{L^2((0,1)\times(0,1))}^2 \|f\|_{L^2(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

Die adjungierte Abbildung

$$jT'j^{-1} : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$$

ist durch

$$(jT'j^{-1} f)(s) = \int_0^1 k'(s,t) f(t) \, dt, \quad k'(s,t) := k(t,s)$$

gegeben. Beweis *ähnlich wie oben.*

(4) *Sei X ein normierter Raum. Betrachte die kanonische Inklusion*
$$J : X \to X'',\, x \mapsto x'' : x''(x') = x'(x) \quad \forall x' \in X'.$$
Berechne
$$J' : X''' \to X',\, \left(J'(x''')\right)(x) = x'''\left(J(x)\right).$$
Folglich ist J' die Einschräkungsabbildung
$$x''' \mapsto x'''|_{\mathrm{Bild}(J)}.$$

Satz 5.7. *Seien X,Y,Z normierte Räume.*

(a) *Die Abbildung $T \mapsto T'$ von $\mathcal{L}(X,Y)$ nach $\mathcal{L}(Y',X')$ ist linear und isometrisch, d.h. $\|T\|_{X\to Y} = \|T'\|_{Y'\to X'}$.*
(b) *$(ST)' = T'S'$ für alle $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

Erinnerung (Korollar I.2.12 (b)). *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:*
$$\|x\| = \sup_{\substack{x'\in X' \\ \|x'\|\le 1}} |x'(x)| \quad \forall x \in X$$

Beweis von Satz 5.7. (a)
$$\begin{aligned}\|T\|_{X\to Y} &= \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|y'\|\le 1} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{\|y'\|\le 1}\sup_{\|x\|\le 1} |y'(Tx)| = \sup_{\|y'\|\le 1} \|T'y'\|_{X'} = \|T'\|_{Y'\to X'}.\end{aligned}$$
(b)
$$\left((ST)'z'\right)(x) = z'(STx) = (S'z')(Tx) = (T'S'z')(x).$$
□

Satz 5.8. *Seien X,Y normierte Räume. Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt:*
$$T'' \circ J_X = J_Y \circ T$$

Bemerkung. *Unter der Identifizierung $X \subset X''$, $Y \subset Y''$ ist $T'' \in \mathcal{L}(X'',Y'')$ eine Fortsetzung von $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, denn*
$$T''|_X = J_Y \circ T.$$

Beweis von Satz 5.8. Für alle $y' \in Y'$ gilt
$$\begin{aligned}\left(T''(J_X(x))\right)(y') &= (J_X(x))(T'y') \overset{\text{Definition von } J_X}{=} (T'y')(x) \\ &= y'(Tx) = \left(J_Y(Tx)\right)(y').\end{aligned}$$
□

Korollar 5.9. *Seien X,Y normierte Räume. Der Operator $S \in \mathcal{L}(Y',X')$ ist genau dann zu einem Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ adjungiert, wenn $S'(X) \subset Y$ ist (hier gilt die Identifizierung $X \subset X''$, $Y \subset Y''$).*

Beweis. $S = T'$ für ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt genau dann, wenn $S' \in \mathcal{L}(X'',Y'')$ eine Forstsetzung des Operators T, d.h. $S'|_X = T$. Diese Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $S'(X) \subset Y$ ist. □

BEMERKUNGEN. (1) *Die Abbildung $T \mapsto T'$ ist im Allgemeinen nicht surjektiv. Sei dazu $X = Y = c_0 \Rightarrow X' = Y' = \ell^1 \Rightarrow X'' = Y'' = \ell^\infty$. Sei desweiteren $S \in \mathcal{L}(l^1)$, $t = (t_n) \mapsto (\sum_{n=1}^\infty t_n, 0, 0, \dots)$ und $u = (u_n) \in \ell^\infty$ beliebig. Betrachte*

$$(S'u)(t) = u(St) = u\left(\left(\sum_{n=1}^\infty t_n, 0, 0, \dots\right)\right)$$
$$= u_1 \sum_{n=1}^\infty t_n = \sum_{n=1}^\infty u_1 t_n.$$

Folglich ist

$$S'u = (u_1, u_1, u_1, \dots) \notin c_0.$$

Daher ist $S'(c_0) \not\subset c_0$. Nach Korollar 5.9 ist S kein adjungierter Operator.

(2) *Ist Y reflexiv, so ist jedes $S \in \mathcal{L}(Y', X')$ ein adjungierter Operator.*

DEFINITION 5.10. *Sei X ein normierter Raum, seien $U \subset X$, $V \subset X'$ Teilräume. Die Mengen*

$$U^\perp := \{x' \in X' \mid x'(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U\} \subset X',$$
$$V_\perp := \{x \in X \mid x'(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x' \in V\} \subset X$$

heißen Annihilator *von U in X', bzw. von V in X.*

Die Annihilatoren $U^\perp$ und $V_\perp$ sind abgeschlossene Teilräume.

SATZ 5.11. *Sei X ein normierter Raum. Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Es existieren kanonische isometrische Isomorphismen*

(1) $(X/Y)' \cong Y^\perp$,
(2) $Y' \cong X'/Y^\perp$.

PROPOSITION 5.12. *Sei X ein normierter Raum, $Y \subset X$ ein Teilraum. Dann gilt*

(a) $\|[x]\| := d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, $[x] = x + Y \in X/Y$, ist eine Halbnorm auf X/Y,
(b) Ist Y abgeschlossen, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm,
(c) Ist X vollständig, Y abgeschlossen, so ist X/Y ein Banachraum.

BEWEIS. (a) $\|[x]\| \geq 0$ ist klar. Für $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ betrachte

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x - y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x - \lambda y\|$$
$$= |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x - y\| = |\lambda| \|[x]\|.$$

Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu beliebigen $x_1, x_2 \in X$ wähle $y_1, y_2 \in Y$ mit $\|x_i - y_i\| \leq \|[x_i]\| + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Betrachte

$$\|[x_1] + [x_2]\| = \|[x_1 + x_2]\| \leq \|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\|$$
$$\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $\|[x_1] + [x_2]\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$.

(b) $\|[x]\| = 0$ gilt genau dann, wenn $d(x, Y) = 0$. Da Y abgeschlossen ist, ist diese Bedingung äquivalent zu $x \in Y$, d.h. $[x] = 0$.

(c) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|[x_k]\| < \infty$. Für den Beweis der Vollständigkeit genügt es zu zeigen, dass $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} [x_k]$ konvergent ist. O.B.d.A. sei $\|x_k\| \leq \|[x_k]\| + 2^{-k}$. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|[x_k]\| + \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} < \infty.$$

Da X vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ in X gegen ein $x \in X$. Folglich gilt

$$\left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k] \right\| = \left\| \left[x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right] \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d.h. $\sum\limits_{k=1}^{n} [x_k] \xrightarrow[n\to\infty]{X/Y} [x]$. □

Beweis von Satz 5.11. (a) Die Quotientenabbildung $\omega : X \to X/Y$, $x \mapsto [x]$, ist linear und stetig, denn

$$\|\omega(x)\|_{X/Y} = \|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X \leq \|x\|_X.$$

Definiere

$$\varphi : (X/Y)' \to X', \qquad (X/Y)' \ni l \mapsto x' := l \circ \omega \in X'.$$

Offenbar gilt für alle $y \in Y$

$$x'(y) = l(\omega(y)) = l([0]) = 0$$

und somit $\operatorname{Bild}(\varphi) \subset Y^\perp$.

Sei $\widetilde{\varphi} : (X/Y)' \to Y^\perp$ die Bildeinschränkung von φ.

Behauptung 1. $\widetilde{\varphi}$ ist bijektiv.

Beweis. Sei $x' \in Y^\perp$ beliebig, d.h. $x'(y) = 0$ für alle $y \in Y$. Setze $l([x]) := x'(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $\widetilde{\varphi}(l) = x'$. Also ist $\widetilde{\varphi}$ surjektiv.

Sei $\widetilde{\varphi}(l) = 0$ für ein $l \in (X/Y)'$, d.h. $l(\omega(x)) = 0$ für alle $x \in X$. Also ist $l([x]) = 0$ für alle $x \in X$, d.h. $l = 0$. Somit ist $\widetilde{\varphi}$ injektiv. $\boxed{\text{B1}}$

Behauptung 2. $\widetilde{\varphi}$ ist isometrisch.

Beweis. Berechne

$$\|\widetilde{\varphi}(l)\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|<1}} |\widetilde{\varphi}(l)(x)| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|<1}} |l(\omega(x))| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|<1}} |l([x])| = (*).$$

Wegen $\|[x]\|_{X/Y} \leq \|x\|$ bildet die Quotientenabbildung ω die Einheitskugel $B_1^X(0)$ in X in die Einheitskugel $B_1^{X/Y}(0)$ im Quotientenraum X/Y ab. Sei $[z] \in B_1^{X/Y}(0)$ beliebig. Dann ist $\inf_{y\in Y} \|z - y\| < 1$ und somit existiert ein $y \in Y$ mit $\|z - y\| < 1$. Also ist die Abbildung $\omega|_{B_1^X(0)} : B_1^X(0) \to B_1^{X/Y}(0)$ surjektiv und folglich gilt

$$(*) = \sup_{\substack{[x]\in X/Y \\ \|[x]\|_{X/Y}<1}} |l([x])| = \|l\|.$$

B2

(b) Setze $\varphi : X'/Y^\perp \to Y'$, $x' + Y^\perp \mapsto x'|_Y$.

BEHAUPTUNG 3. φ ist bijektiv.

BEWEIS. Sei $y' \in Y'$ beliebig. Sei $x' \in X'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von y'. Dann gilt

$$\varphi(x' + Y^\perp) = x'|_Y = y'.$$

Also ist φ surjektiv.

Sei $\varphi(x' + Y^\perp) = 0$ für ein $x' \in X'$. Dann ist $x'|_Y = 0$, d.h. $x' \in Y^\perp$ und folglich $x' + Y^\perp = [0]$. Also ist φ injektiv. B3

BEHAUPTUNG 4. φ ist isometrisch.

BEWEIS. Sei $x' \in X'$ beliebig. Dann ist

$$\|\varphi(x' + Y^\perp)\|_{Y'} = \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|<1}} |\varphi(x' + Y^\perp)(y)| = \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|<1}} |x'(y)| = (*).$$

Da $y'(y) = 0$ für alle $y' \in Y^\perp$ und alle $y \in Y$, gilt

$$\begin{aligned}(*) &= \inf_{y'\in Y^\perp} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|<1}} |x'(y) - y'(y)| \\ &\le \inf_{y'\in Y^\perp} \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|<1}} |x'(y) - y'(y)| \\ &= \inf_{y'\in Y^\perp} \|x' - y'\|_{X'} = \|x' + Y^\perp\|_{X'/Y^\perp}.\end{aligned}$$

Umgekehrt, sei $x' \in X'$ beliebig. Dann ist die Einschränkung $x'|_Y$ xon x' auf Y linear und stetig, d.h. $x'|_Y \in Y'$. Sei $z' \in X'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von $x'|_Y$. Dann ist $x' - z' \in Y^\perp$. Nun betrachte

$$\begin{aligned}\|x' + Y^\perp\|_{X'/Y^\perp} &= \inf_{y'\in Y^\perp} \|x' - y'\|_{X'} \le \|x' - (x' - z')\|_{X'} \\ &= \|z'\|_{X'} = \|x'|_Y\|_{Y'} = \|\varphi(x' + Y^\perp)\|_{Y'}.\end{aligned}$$

B4

Der Beweis ist vollständig. □

BEWEIS selbst. Hinweis: Für (1) ordne $l \in (X/Y)'$ das Funktional $x' := l \circ \omega$, $\omega : X \to X/Y$ die Quotientenabbildung zu. Für (2) betrachte $x' + Y^\perp \mapsto x'|_Y$.

Seien X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(T)^{\perp} &= \{y' \in Y' \mid y'(y) = 0 \quad \forall y \in \mathrm{Bild}(T)\} \\ &= \{y' \in Y' \mid y'(Tx) = 0 \quad \forall x \in X\} \\ &= \{y' \in Y' \mid (T'y')(x) = 0 \quad \forall x \in X\} \\ &= \mathrm{Kern}(T'). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Satz 5.13. *Seien X, Y normierte Räume, sowie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:*

$$\overline{\mathrm{Bild}(T)} = \mathrm{Kern}(T')_{\perp}.$$

Bemerkung. *Nach Satz 5.13 hat ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ dichtes Bild genau dann, wenn T' injektiv ist.*

Erinnerung (Korollar I.2.12(c)). *Sei X ein normierter Raum. Ist $U \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $x \in X \setminus U$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ und $x'(x) \neq 0$.*

Beweis von Satz 5.13. ($\subset$) Sei $x \in X$ beliebig, $y := Tx \in \mathrm{Bild}(T)$. Sei $y' \in \mathrm{Kern}(T')$ beliebig. Betrachte

$$y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0.$$

Also ist $y \in \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$. Daher gilt $\mathrm{Bild}(T) \subset \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$. Wegen der Abgeschlossenheit des Annihilators ist $\overline{\mathrm{Bild}(T)} \subset \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$.

($\supset$) $U := \overline{\mathrm{Bild}(T)} \subset Y$ ist ein abgeschlossener Teilraum. Sei $y \notin U$ beliebig. Nach Korollar I.2.12(c) gibt es ein Funktional $y' \in Y'$ mit $y'|_U = 0$ und $y'(y) \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = 0,$$

d.h. $y' \in \mathrm{Kern}(T')$.

Es gilt $y \notin \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$, denn sonst hätte man $y'(y) = 0$.

Zusammengefasst bedeutet dies: $y \notin U \Rightarrow y \notin \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$, also

$$\mathrm{Kern}(T')_{\perp} \subset U = \overline{\mathrm{Bild}(T)}.$$

□

Korollar 5.14. *Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit abgeschlossenem Bild. Dann ist die Gleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in \mathrm{Kern}(T')$ gilt.*

Bemerkung. *Die Implikation gilt insbesondere dann, wenn T' injektiv ist.*

Beweis von Korollar 5.14. Die Gleichung $Tx = y$ ist genau dann lösbar, wenn $y \in \mathrm{Bild}(T)$. Nach Satz 5.13 gilt dies genau dann wenn $y \in \mathrm{Kern}(T')_{\perp}$, d.h. $y'(y) = 0$ für alle $y' \in \mathrm{Kern}(T')$. □

Satz 5.15. *Seien X, Y Hilberträume.*

(1) *Die Abbildungen $C_X : X \to X'$, $C_Y : Y \to Y'$, die Elementen $x \in X$ bzw. $y \in Y$ die Funktionale $\langle x, \cdot \rangle$ in X' bzw. $\langle y, \cdot \rangle$ in Y' zuordnen, sind konjugiert lineare isometrische Bijektionen.*

(2) *Zu jedem linearen beschränkten Operator $T : X \to Y$ existiert genau ein linearer beschränkter Operator $T^* : Y \to X$ so, dass $\langle T^*y, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y$ für alle $x \in X$, $y \in Y$. Die Abbildung T^* heißt zu T* adjungierter Operator. *Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und $T^* = C_X^{-1}T'C_Y$.*

Für den Beweis benötigen wir den Darstellungssatz von Riesz (Satz I.4.71).

Erinnerung (Der Darstellungssatz von Riesz). *Sei X ein Hilbertraum. Zu jedem linearen stetigen Funktional $l : X \to \mathbb{K}$ gibt es genau ein $y \in X$ so, dass $l(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in X$ gilt. Ferner $\|y\|_X = \|l\|_{X\to\mathbb{K}}$.*

Beweis von Satz 5.15. (1) folgt direkt aus dem Rieszschen Darstellungssatz.

(2)

$$\begin{aligned}\langle y, Tx\rangle_Y &= (C_Y y)(Tx) = (T'C_Y y)(x)\\ &= \langle C_X^{-1}C_Y y, x\rangle = \langle T^*y, x\rangle\end{aligned}$$

mit $T^* = C_X^{-1}T'C_Y$. □

Bemerkung. *Seien X, Y Hilberträume, $T : X \to Y$ stetige lineare Abbildung. Aus (5.2), Satz 5.13 und Satz 5.15 folgt, dass*

$$\mathrm{Kern}(T^*) = \mathrm{Bild}(T)^\perp \quad \textit{und} \quad \overline{\mathrm{Bild}(T)} = \mathrm{Kern}(T^*)^\perp \tag{5.3}$$

gilt. Hier bezeichnet $U^\perp$ das orthogonale Komplement zu U (s. Definition I.4.55).

5.3. Projektionen

Definition 5.16. *Sei X ein normierter Raum. Ein linearer Operator $P : X \to X$ heißt* Projektion *von X auf $\mathrm{Bild}(P)$, falls $P^2 = P$ gilt, d.h. wenn P ein* Idempotent *ist.*

Beispiel. *Sei X ein Hilbertraum, $u, v \in X$ beliebig mit $\langle u, v\rangle \neq 0$. Dann ist*

$$P = \frac{u\langle v, \cdot\rangle}{\langle v, u\rangle}$$

eine Projektion.

Lemma 5.17. *Sei X ein normierter Raum. Sei $P : X \to X$ eine stetige Projektion. Dann gilt*

(a) *Entweder ist $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$.*
(b) $\mathrm{Bild}(P) = \{x \in X \mid Px = x\}$.
(c) $\mathrm{Bild}(P)$ *ist abgeschlossen.*
(d) *X und die direkte Summe $\mathrm{Kern}(P) \dotplus \mathrm{Bild}(P)$ sind topologisch isomorph, d.h. die Abbildung $\mathrm{Kern}(P) \dotplus \mathrm{Bild}(P) \to X$, $(x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$, ist eine lineare stetige Bijektion.*

Bemerkung. *$\mathrm{Kern}(P) \dotplus \mathrm{Bild}(P)$ is definiert als die Menge $\mathrm{Kern}(P) \times \mathrm{Bild}(P)$, versehen mit der Norm*

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}$$

für ein $1 \leq p < \infty$ oder

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Beweis. (a) Aus $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$ folgt sofort $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$.

(b) Gilt $Px = x$, so ist offenbar $x \in \operatorname{Bild}(P)$. Umgekehrt, aus $x = Py$ folgt $Px = P^2y = Py = x$.

(c) Nach (b) ist $\operatorname{Bild}(P) = \operatorname{Kern}(I - P)$. Da $I - P$ stetig ist, ist $\operatorname{Bild}(P)$ abgeschlossen.

(d) Jedes $x \in X$ lässt sich als

$$x = \underbrace{Px}_{\in \operatorname{Bild}(P)} + \underbrace{(I-P)x}_{\in \operatorname{Kern}(P)}.$$

schreiben. Da $\operatorname{Bild}(P) \cap \operatorname{Kern}(P) = \{0\}$ ist, ist die Zerlegung $x = x_1 + x_0$ mit $x_1 \in \operatorname{Bild}(P)$ und $x_0 \in \operatorname{Kern}(P)$ eindeutig. Somit sind X und $\operatorname{Kern}(P) \dotplus \operatorname{Bild}(P)$ isomorph. Die Abbildung $x \mapsto (Px, (I-P)x)$ ist stetig, da P stetig ist. □

Beispiele. 1. *Auf $X = L^p(\mathbb{R})$ betrachte $P : X \to X$, $f \mapsto \chi_{[0,1]}f$. Offenbar ist P eine Projektion mit $\|P\| = 1$. Das Bild von P ist zu $L^p([0,1])$ isometrisch isomorph.*

2. *Jede Projektion in ℓ^∞ auf c_0 ist unbeschränkt. Ohne Beweis. Das bedeutet, dass es keine stetige Fortsetzung des identischen Operators* $\mathrm{id} : c_0 \to c_0$ *zu einem stetigen Operator $\ell^\infty \to c_0$ gibt. Eine solche Fortsetzung wäre eine stetige Projektion von ℓ^∞ auf c_0.*

Satz 5.18. *Ist Y ein endlichdimensionaler Teilraum des normierten Raums X, so existiert eine stetige lineare Projektion P von X auf Y mit $\|P\| \leq \dim Y$.*

Beweis. Sei $n := \dim Y$.

Behauptung: Es gibt Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von Y und $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ von Y' mit $b'_j(b_i) = \delta_{ij}$, $\|b_i\| = \|b'_j\| = 1$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Beweis. Nach Wahl irgendeiner Basis können wir Y mit $\mathbb{K}^n$ identifizieren. Sei $\det : Y^n \to \mathbb{K}$ die Abbildung, die der Matrix mit den Spaltenvektoren $x_1, \ldots, x_n$ ihre Determinante zuordnet. Die Abbildung $|\det|$ ist stetig und nimmt daher auf der kompakten Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \|x_i\| = 1, i = 1, \ldots, n\}$ ihr Supremum an, etwa bei $(b_1, \ldots, b_n)$. Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ sind dann linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis. Definiere nun

$$b'_j(x) = \frac{\det(b_1, \ldots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \ldots, b_n)}{\det(b_1, \ldots, b_n)}.$$

Es ist klar, dass die $b'_1, \ldots, b'_n$ die gewünschten Eigenschaften haben. $\boxed{\text{B}}$

Setze die Funktionale b'_i normerhaltend zu Funktionalen $x'_i \in X'$ fort (Satz I.2.10). Definiere die Abbildung

$$Px := \sum_{i=1}^n x'_i(x) b_i.$$

P ist eine Projektion, denn

$$P^2x = \sum_{i=1}^n x'_i(x) P b_i = \sum_{i=1}^n x'_i(x) \sum_{j=1}^n \underbrace{x'_j(b_i)}_{=\delta_{ij}} b_j = \sum_{i=1}^n x'_i(x) b_i = Px.$$

Ferner, $\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{lin}\{b_1, \dots, b_n\} = Y$ und

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) b_i \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |x_i'(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| = n.$$

□

Im nächsten Satz zeigen wir eine Umkehrung von Lemma 5.17 im Fall eines Banachraumes.

Satz 5.19. *Sei X ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Es existiere ein abgeschlossener Komplementärraum Z zu Y, d.h. X ist algebraisch isomorph zur direkten Summe $Y \dotplus Z$. Dann gilt:*

(a) *X ist topologisch isomorph zu $Y \dotplus Z$.*
(b) *Es existiert eine stetige lineare Projektion von X auf Y parallel zu Z, d.h. $Pz = 0$ für alle $z \in Z$.*
(c) *Z ist topologisch isomorph zu X/Y.*

Beweis. (a) Da Y und Z abgeschlossen im Banachraum X sind, sind es selbst Banachräume. Deshalb ist die direkte Summe $Y \dotplus Z$ ein Banachraum. Ferner ist die Abbildung

$$Y \dotplus Z \to X, \quad (y, z) \mapsto y + z$$

linear, bijektiv und stetig. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (Satz I.2.20) folgt die Behauptung.

(b) Nach Teil (a) existiert $M \geq 0$ mit $\|y\| + \|z\| \leq M\|y + z\|$ für alle $y \in Y$, $z \in Z$. Also ist $\|y\| \leq M\|y + z\|$. Die wohldefinierte lineare Projektion $y + z \mapsto y$ ist somit stetig.

(c) Die Abbildung

$$Z \to X/Y, \quad z \mapsto [z] = \{z + y \,|\, y \in Y\},$$

ist linear. Sie ist bijektiv, denn jedes $x \in X$ kann eindeutig als $y + z$ dargestellt werden. Diese Abbildung ist stetig, denn

$$\|[z]\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|z - y\|_X \leq \|z\|_X.$$

Da X/Y und Z Banachräume sind, folgt die Behauptung wieder aus dem Satz von der inversen Abbildung. □

Die Existent eines abgeschlossenen Komplementärraumes ist wesentlich für die Stetigkeit der linearen Projektion.

Proposition 5.20. *Es gibt keine stetige Projektion $\ell^\infty(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$.*

Beweis. Behauptung 1. Sei S eine unendlich abzählbare Menge. Dann existiert ein Mengensystem $\{A_i | i \in I\}$ mit $|I| = |\mathbb{R}|$ und $|A_i| = |\mathbb{N}|$, sodass $A_i \cap A_j$, $i \neq j$, höchstens endlich sind.

Beweis. Identifiziere S mit Zahlen in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Setze $I := [0,1] \setminus S$. Zu jedem $i \in I$ wähle eine Folge $a_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} i$, $a_n^{(i)} \in S$. Setze $A_i := \{a_n^{(i)} | n \in \mathbb{N}\}$.

$\boxed{\text{B1}}$

Behauptung 2. Sei $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ ein linearer stetiger Operator mit $Tx = 0$ für alle $x \in c_0$. Dann existiert eine unendliche Menge $A \subset \mathbb{N}$, sodass $Tx = 0$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\mathrm{supp}\, x = A$.

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es zu jedem $i \in I$ ein Element $x_i \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x_i = A_i$, sodass $Tx_i \neq 0$. O.B.d.A. sei $\|x_i\| = 1$.

Sei
$$I_n := \{i \in I | (Tx_i)(n) \neq 0\}.$$
Wegen $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und weil I überabzählbar ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass I_{n_0} überabzählbar ist. Ferner sei
$$I_{n,k} := \{i \in I | |(Tx_i)(n)| \geq 1/k\}.$$
Wegen $I_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{n,k}$ und weil I_{n_0} überabzählbar ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass I_{n_0,k_0} überabzählbar ist.

Sei $J \subset I_{n_0,k_0}$ eine beliebige endliche Teilmenge. Setze
$$y := \sum_{j \in J} \operatorname{sign}\big((Tx_j)(n_0)\big)\, x_j \in \ell^\infty.$$
Da J endlich und die Durchschnitte $A_i \cap A_j$ höchstens endlich sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ein $j_n \in J$ existiert mit
$$y(n) = \operatorname{sign}\big((Tx_j)(n_0)\big)\, x_{j_n}(n).$$
Also lässt sich $y \in \ell^\infty$ als die Summe $f + z$ schreiben, wobei $\operatorname{supp} f$ endlich ist unf $\|z\| \leq 1$. Nach der Voraussätzung ist $Tf = 0$ und somit $Ty = Tz$. Folglich gilt
$$\|Ty\| \leq \|T\|\|z\| \leq \|T\|. \tag{5.4}$$
Nun betrachten wir
$$\begin{aligned}(Ty)(n_0) &= \sum_{j \in J} \operatorname{sign}\big((Tx_j)(n_0)\big)\, (Tx_j)(n_0) \\ &= \big|(Tx_j)(n_0)\big| \geq \frac{|J|}{k_0}.\end{aligned}$$
Aus (5.4) folgt
$$\|T\| \geq \|Ty\| \geq |(Ty)(n_0)| \geq \frac{|J|}{k_0},$$
d.h. $|J| \leq k_0\|T\|$. Es ist ein Widerspruch, da die Menge J beliebig groß gewält werden kann.

Somit existiert ein $i \in I$ mit $Tx = 0$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x = A_i$. Setze $A := A_i$. $\boxed{\text{B2}}$

Angenommen, es gäbe eine stetige Projektion $P : \ell^\infty \to \ell^\infty$ mit $\operatorname{Bild}(P) = c_0$. Sei $T = \mathrm{id} - P$. Nach Behauptung 2 ist $Tx = 0$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x \subset A$, d.h. $Px = x$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x \subset A$. Folglich gilt $\operatorname{Bild}(P) \neq c_0$. Widerspruch! □

Ist X ein Hilbertraum, so besitzt jede abgeschlossener Teilraum $V \subset X$ einen abgeschlossenen Komplementärraum W. Insbesondere kann man W als $V^\perp$ wählen. In diesem Fall gilt $X \cong V \oplus V^\perp$ (isometrisch isomorph), wenn die orthogonale Summe $V \oplus V^\perp$ mit der Norm $(\|x_1\|_V^2 + \|x_2\|_{V^\perp}^2)^{1/2}$ versehen wird.

BEMERKUNG. *Ein Banachraum ist genau dann topologisch isomorph zu einem Hilbertraum, wenn jeder abgeschlossene Teilraum einen abgeschlossenen Komplementärraum besitzt (Satz von Lindenstrauss und Tzafriri).*

DEFINITION 5.21. *Sei X ein Hilbertraum, sei Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Sei $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Y^\perp$ die eindeutige Zerlegung des Elementes $x \in X$ (vgl. Satz I.4.18). Dann heißt $P_Y : X \to X$, $P_Y x := y$ die* orthogonale Projektion *von X auf Y (auch* orthogonaler Projektor *oder einfach* Projektor*).*

Wir notieren folgende offensichtliche Eigenschaften von P_Y:
(a) $\mathrm{Bild}(P_Y) = Y$,
(b) $\mathrm{Kern}(P_Y) = Y^\perp$,
(c) $\|P_Y\| = 1$, falls $Y \neq \{0\}$,
(d) $P_Y^2 = P_Y$.

SATZ 5.22. *Für einen beschränkten linearen Operator $P : X \to X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) *P ist eine orthogonale Projektion,*
(b) *$I - P$ ist eine orthogonale Projektion,*
(c) *P ist idempotent und* $\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Kern}(P)^\perp$,
(d) *P ist idempotent und selbstadjungiert.*

BEWEIS. (a) $\Leftrightarrow$ (b): ergibt sich unmittelbar aus Definition 5.21.
(a) $\Rightarrow$ (c): bereits gezeigt.
(c) $\Rightarrow$ (a): Aus $\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Kern}(P)^\perp$ folgt, dass $\mathrm{Bild}(P)$ abgeschlossen ist. Da P idempotent ist, gilt $P^2 z = Pz$ für alle $z \in X$. Also ist $Py = y$ für alle $y \in \mathrm{Bild}(P)$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Es lässt die Zerlegung $x = y + z$ mit $y \in \mathrm{Bild}(P)$ und $z \in \mathrm{Bild}(P)^\perp = \mathrm{Kern}(P)$ zu. Offenbar gilt $Px = Py + Pz = Py = y$. Folglich ist P die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Bild}(P)$.
(a) $\Rightarrow$ (d): Wegen (a) $\Rightarrow$ (c) ist P idempotent. Für alle $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ mit $y_{1,2} \in \mathrm{Bild}(P)$, $z_{1,2} \in \mathrm{Kern}(P)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Px_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2 + z_2\rangle &\overset{\langle y_1, z_2\rangle = 0}{=} \langle y_1, y_2\rangle \\ &\overset{\langle z_1, y_2\rangle = 0}{=} \langle y_1 + z_1, y_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle.\end{aligned}$$

Also ist P selbstadjungiert.
(d) $\Rightarrow$ (a): Wegen (c) $\Rightarrow$ (a) und der Gleichheit $\overline{\mathrm{Bild}(P)} = \mathrm{Kern}(P)^\perp$ genügt es, zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(P)$ abgeschlossen ist.
Sei $x \in \mathrm{Bild}(P)$ beliebig. Dann ist $(I - P)x = x - Px = x - x = 0$, d.h. $x \in \mathrm{Kern}(1 - P)$. Also ist $\mathrm{Bild}(P) \subset \mathrm{Kern}(I - P)$.
Sei nun $x \in \mathrm{Kern}(I - P)$ beliebig. Aus $(1 - P)x = 0$ folgt $Px = x \Rightarrow x$ und somit $x \in \mathrm{Bild}(P)$. Also ist $\mathrm{Kern}(I - P) \subset \mathrm{Bild}(P)$. Somit gilt $\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Kern}(1 - P)$. Da $\mathrm{Kern}(I - P)$ abgeschlossen ist, ist auch $\mathrm{Bild}(P)$ abgeschlossen.
Folglich ist P eine orthogonale Projektion. □

DEFINITION 5.23. *Seien X und Y Hilberträume. Ein Operator $U : X \to Y$ heißt* Isometrie, *wenn $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Gilt zusätzlich* $\mathrm{Bild}(U) = Y$, *so heißt U* unitärer Operator.

SATZ 5.24. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *U ist unitär,*
(b) $\mathrm{Bild}(U) = Y$ *und* $\langle Ux_1, Ux_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$ *für alle* $x_1, x_2 \in X$,
(c) $U^*U = \mathrm{id}_X$ *und* $UU^* = \mathrm{id}_Y$*, d.h.* $U^{-1} = U^*$*,*
(d) *U^* ist unitär.*

Beweis selbst.

BEMERKUNG. *Seien* $\dim X = \dim Y < \infty$*. Dann sind* $UU^* = \mathrm{id}_Y$ *und* $U^*U = \mathrm{id}_X$ *äquivalent. Tatsächlich, wegen* $\det(UU^*) = |\det(U)|^2 = \det(U^*U) = 1$*, ist der Operator U invertierbar. Ferner gilt*

$$UU^* = \mathrm{id}_Y \Leftrightarrow U^{-1}UU^* = U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = U^{-1}U = \mathrm{id}_X\,.$$

PROPOSITION 5.25. *Zwei Hilberträume X und Y sind genau dann isometrisch isomorph, wenn es eine unitäre Abbildung $U : X \to Y$ gibt.*

BEWEIS klar.

SATZ 5.26. *Zwei Hilberträume X und Y sind genau dann isometrisch isomorph, wenn sie die gleiche Hilbertraumdimension besitzen.*

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Sei $U : X \to Y$ unitär. Sei $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ eine Orthonormalbasis von X. Betrachte $M := \{Ue_\alpha | \alpha \in I\}$. Die Menge M ist ein Orthonormalsystem, denn

$$\langle Ue_\alpha, Ue_\beta\rangle_Y = \langle e_\alpha, e_\beta\rangle_X = \delta_{\alpha\beta}.$$

Wegen

$$\overline{\mathrm{lin}\, M} = U\overline{\mathrm{lin}\{e_\alpha | \alpha \in I\}} = UX = \mathrm{Bild}(U) = Y$$

ist M total. Also ist M eine Orthonormalbasis.

($\Leftarrow$) Sei $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ eine Orthonormalbasis von X und $\{f_\alpha | \alpha \in I\}$ eine Orthonormalbasis von Y (mit gleicher Indexmenge I). Für beliebiges $x \in X$ mit $x = \sum_{\alpha\in I} c_\alpha e_\alpha$ setze $Ux := \sum_{\alpha\in I} c_\alpha f_\alpha$. Offenbar gilt $\mathrm{Bild}(U) = Y$. Sei $x' \in X$ mit $x' = \sum_{\beta\in I} d_\beta e_\beta$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}
\langle Ux, Ux'\rangle &= \left\langle U\sum_{\alpha\in I} c_\alpha e_\alpha, U\sum_{\beta\in I} d_\beta e_\beta\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{\alpha\in I} c_\alpha f_\alpha, \sum_{\beta\in I} d_\beta f_\beta\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha\in I} \overline{c_\alpha} d_\alpha \\
&= \left\langle \sum_{\alpha\in I} c_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in I} c_\beta e_\beta\right\rangle \\
&= \langle x, x'\rangle.
\end{aligned}$$

Nach Satz 5.24 ist U unitär. □

SATZ 5.27. *Seien X, Y Hilberträume. Dann ist die lineare Abbildung $U : X \to Y$ isometrisch genau dann, wenn $U^*U = \mathrm{id}_X$ ist.*

Sei nun $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ eine Isometrie. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Bild}(U)$ *ist abgeschlossen,*
(b) $\operatorname{Kern}(U^*) = \operatorname{Bild}(U)^\perp$ *und* $U^*|_{\operatorname{Bild}(U)} : \operatorname{Bild}(U) \to X$ *ist eine Isometrie,*
(c) $\operatorname{Bild}(U^*) = X$,
(d) UU^* *ist die orthogonale Projektion von* Y *auf* $\operatorname{Bild}(U)$.

Beweis selbst.

AUFGABE. *Seien* X, Y *Hilberträume. Ein beschränkter linearer Operator* $U : X \to Y$ *heißt* partielle Isometrie, *wenn*

$$\langle Ux, Uy\rangle_Y = \langle x, y\rangle_X \quad \text{für alle} \quad x, y \in (\operatorname{Kern} U)^\perp .$$

Sei nun $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ *eine partielle Isometrie. Zeigen Sie:*
(a) *Bild* U *ist abgeschlossen in* Y,
(b) *Für alle* $x \in (\operatorname{Kern} U)^\perp$ *gilt* $U^*Ux = x$,
(c) U^* *ist eine partielle Isometrie,*
(d) U^*U *ist die orthogonale Projektion auf* $\operatorname{Bild} U^*$ *und* UU^* *ist die orthogonale Projektion auf* $\operatorname{Bild} U$.

5.4. Trennung konvexer Mengen

In diesem Abschnitt beweisen wir eine weitere Formulierung des Satzes von Hahn-Banach.

DEFINITION 5.28. *Sei* X *ein Vektorraum, sowie* $A \subset X$ *eine Teilmenge. Das* Minkowskifunktional

$$P_A : X \to [0, \infty]$$

wird durch

$$P_A(x) := \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in A\right\}, \quad \inf\{\emptyset\} := \infty,$$

definiert. Die Menge A *heißt* absorbierend, *falls* $P_A(x) < \infty$ *für alle* $x \in X$.

BEISPIEL. *Seien* X *ein normierter Raum, sowie* $A = B_1(0) \subset X$. *Dann gilt:*

$$P_A(x) = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

LEMMA 5.29. *Sei* X *ein normierter Raum und* $U \subset X$ *eine konvexe Teilmenge mit* $0 \in \mathring{U}$. *Dann gilt:*
(a) U *ist absorbierend, genauer:* $B_\varepsilon(0) \subset U \Rightarrow P_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$.
(b) P_U *ist sublinear, dass heißt* $P_U(x + y) \leq P_U(x) + P_U(y)$, $P_U(\mu x) = \mu P_U(x)$ *für alle* $x, y \in X$, $\mu \geq 0$.
(c) *Ist* U *offen, so gilt* $U = P_U^{-1}([0, 1))$.

BEWEIS. (a) Da $0 \in \mathring{U}$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset U$. Somit ist $\frac{x}{\|x\|}\delta' \in U$ für alle $0 < \delta' < \delta$. Also ist $P_U(x) \leq \frac{\|x\|}{\delta}$.
(b) Betrachte

$$P_U(\mu x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{\mu x}{\lambda} \in U\right\} \overset{\lambda = \mu\lambda'}{=} \mu \inf\left\{\lambda' > 0 \,\middle|\, \frac{\mu x}{\mu\lambda'} = \frac{x}{\lambda'} \in U\right\} = \mu P_U(x).$$

Seien nun $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $P_U(x) < \lambda \leq P_U(x) + \varepsilon$, $P_U(y) < \mu \leq P_U(y) + \varepsilon$ beliebig. Damit gilt $\frac{x}{\lambda} \in U$ und $\frac{y}{\mu} \in U$. Da U konvex ist, gilt

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu} \in U.$$

Also ist

$$P_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq P_U(x) + P_U(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $P_U(x+y) \leq P_U(x) + P_U(y)$.

(c) Sei $P_U(x) < 1$. Dann gibt es ein $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in U$. Da $0 \in U$ und U konvex ist, gilt

$$\Rightarrow \lambda \frac{x}{\lambda} + (1-\lambda) \cdot 0 = x \in U.$$

Sei $P_U(x) \geq 1$. Dann ist $\frac{x}{\lambda} \notin U$ für alle $\lambda < 1$. Da U^c abgeschlossen ist, folgt

$$x = \lim_{\lambda \nearrow 1} \frac{x}{\lambda} \in U^c.$$

$\square$

Lemma 5.30. *Sei X ein normierter Raum, sowie $V \subset X$ konvex und offen, mit $0 \notin V$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < 0$ für alle $x \in V$.*

Beweis. Zunächst sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wähle ein $x_0 \in V$. Setze $y_0 := -x_0$,

$$U := V - x_0 := \{v - x_0 \,|\, v \in V\}.$$

Die Menge U ist offen und konvex, $y_0 \notin U$, $0 \in U$. Mit Lemma 5.29 gilt $P_U(x) < \infty$ für all $x \in X$, P_U ist sublinear und $P_U(y_0) \geq 1$.

Auf dem Teilraum $Y := \operatorname{lin}\{y_0\}$ definire das Funktional

$$y' : Y \to \mathbb{R}, \quad y'(ty_0) = tP_U(y_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es folgt $y'(y) \leq P_U(y)$ für alle $y \in Y$, denn

$$\begin{aligned} t \leq 0 &\Rightarrow y'(ty_0) \leq 0 \leq P_U(ty_0), \\ t > 0 &\Rightarrow y'(ty_0) = P_U(ty_0). \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Hahn-Banach (Version der linearen Algebra, reelle Fassung, Satz I.2.7) folgt, dass es ein lineares (nicht notwendig stetiges) Funktional x' gibt mit $x'|_Y = y'$ und $x'(x) \leq P_U(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 5.29 (a) ist dieses Funktional stetig, denn

$$|x'(x)| = \max\{x'(x), -x'(x)\} = \max\{x'(x), x'(-x)\} \leq \max\{P_U(x), P_U(-x)\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$$

für alle $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist

$$x'(y_0) = y'(y_0) = P_U(y_0) \overset{y_0 \notin U}{\geq} 1.$$

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $x = u - y_0$. Folglich ist

$$x'(x) = x'(u) - x'(y_0) = x'(u) - P_U(y_0) \leq \underbrace{P_U(u)}_{\substack{<1 \text{ wegen} \\ \text{Lemma 5.29(c)}}} - 1 < 0.$$

Der komplexe Fall folgt aus dem reellen mittels Lemma I.2.8 mit $\tilde{l}(x) = l(x) - il(ix)$. $\square$

SATZ 5.31 (Trennungssatz von Hahn-Banach, Version I). *Sei X ein normierter Raum, $V_1, V_2 \subset X$ konvex, sowie V_1 offen und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.*

BEWEIS. Sei $V := V_1 - V_2 = \bigcup_{x \in V_2} (V_1 - x)$. Offenbar ist V offen.

BEHAUPTUNG: V ist konvex.

BEWEIS. Seien $x, y \in V$ beliebig, d.h. $x = v_1 - v_2$ und $y = w_1 - w_2$ für $v_1, w_1 \in V_1$ und $v_2, w_2 \in V_2$. Für beliebiges $\lambda \in (0,1)$ betrachte

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \underbrace{\lambda v_1 + (1-\lambda) w_1}_{\in V_1} - \underbrace{(\lambda v_2 + (1-\lambda) w_2)}_{\in V_2} \in V.$$

$\boxed{\mathrm{B}}$

Da $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ist $0 \notin V$. Nach Lemma 5.30 gibt es ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v) < 0$ für alle $v \in V$. Daher ist $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0$ für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. $\square$

SATZ 5.32 (Trennungssatz von Hahn-Banach, Version II). *Sei X ein normierter Raum, sowie $V \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei $x \notin V$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(v) | v \in V\}$. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v)$ für alle $v \in V$.*

BEWEIS. Da V abgeschlossen ist, gibt es ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \cap V = \emptyset$. Nach Satz 5.31 (mit $V_1 = B_r(x)$ und $V_2 = V$) existiert ein $x' \in X'$ so, dass $\operatorname{Re} x'(x+u) < \operatorname{Re} x'(v)$ für alle $u \in B_r(0)$ und $v \in V$. Also ist $\operatorname{Re} x'(x) + \operatorname{Re} x'(u) < \operatorname{Re} x'(v)$ für alle $u \in B_r(0)$ und $v \in V$. Nach Übergang von u zu $-u$ erhält man auch $\operatorname{Re} x'(x) - \operatorname{Re} x'(u) < \operatorname{Re} x'(v)$. Somit gilt $\operatorname{Re} x'(x) + |\operatorname{Re} x'(u)| < \operatorname{Re} x'(v)$. Daher ist

$$\operatorname{Re} x'(x) + r\|\operatorname{Re} x'\| \leq \operatorname{Re} x'(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Nun folgt mit Lemma I.2.8 (d)

$$\operatorname{Re} x'(x) + r\|x'\| \leq \operatorname{Re} x'(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

$\square$

5.5. Der Satz vom abgeschlossenen Bild

SATZ 5.33. *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*
(a) $\operatorname{Bild}(T)$ *ist abgeschlossen*
(b) $\operatorname{Bild}(T) = \operatorname{Kern}(T')_\perp$
(c) $\operatorname{Bild}(T')$ *ist abgeschlossen*
(d) $\operatorname{Bild}(T') = \operatorname{Kern}(T)^\perp$

Für den Beweis brauchen wir einige Hilfsergebnisse.

LEMMA 5.34. *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*
(a) $\operatorname{Bild}(T)$ *ist abgeschlossen,*

(b) *es gibt ein* $K > 0$ *so, dass zu jedem* $y \in \operatorname{Bild}(T)$ *ein* $x \in X$ *existiert mit* $Tx = y$ *und* $\|x\|_X \leq K\|y\|_Y$.

BEWEIS. (1) Vorbereitungen: Sei $U := \operatorname{Kern}(T)$. Der Quotientenraum X/U mit der Norm $\|[x]\|_{X/U} := \inf_{u \in U} \|x - u\|_X$ ist ein Banachraum.

Betrachte $\widetilde{T} : X/U \to \operatorname{Bild}(T)$, $[x] \mapsto Tx$. Die Abbildung $\widetilde{T}$ ist offenbar linear und bijektiv.

Seien nun $x \in X$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $z \in U$ mit

$$\|x - z\|_X \leq \|[x]\|_{X/U} + \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}[x]\| &= \|Tx\|_Y = \|T(x-z)\|_Y \leq \|T\|_{X\to Y}\|x - z\|_X \\ &\leq \|T\|_{X\to Y}\|[x]\|_{X/U} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist

$$\|\widetilde{T}[x]\|_Y \leq \|T\|_{X\to Y}\|[x]\|_{X/U},$$

d.h. $\widetilde{T}$ ist stetig.

(2) „(b)⇒(a)“ Aus (1) folgt, dass $\widetilde{T}$ eine Inverse $\widetilde{T}^{-1} : \operatorname{Bild}(T) \to X/U$ besitzt. Dass $\widetilde{T}^{-1}$ stetig, folgt aus (b). Da X/U vollständig ist, ist $\operatorname{Bild}(T)$ ebenfalls vollständig und somit abgeschlossen.

(3) „(a)⇒(b)“ Nach (a) ist $\operatorname{Bild}(T)$ ein Banachraum. Aus dem Satz von der inversen Abbildung (Satz I.2.20 (b)) folgt, dass $\widetilde{T}^{-1}$ stetig ist. Somit gilt

$$\|[x]\|_{X/U} = \|\widetilde{T}^{-1}\widetilde{T}[x]\|_{X/U} \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|\widetilde{T}[x]\|_Y.$$

Sei $y \in \operatorname{Bild}(T)$ beliebig. Dann ist $y = \widetilde{T}[x]$ für ein $x \in X$. Wähle aus jeder Äquivalenzklasse $[x] \in X/U$ ein x' mit $\|x'\| \leq 2\|[x]\|_{X/U}$. Dann gilt

$$\|x'\| \leq 2\|\widetilde{T}^{-1}\| \, \| \underbrace{\widetilde{T}[x]}_{=Tx'=y} \|_Y,$$

d.h.

$$\|x'\|_X \leq K\|y\|_Y \quad \text{mit} \quad K = 2\|\widetilde{T}^{-1}\|.$$

□

LEMMA 5.35. *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Es gebe ein* $r > 0$ *so, dass*

$$r\|y'\|_{Y'} \leq \|T'y'\|_{X'} \quad \textit{für alle } y' \in Y'.$$

Dann ist T *offen (und nach Prinzip der offenen Abbildung insbesondere surjektiv).*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass $B_r(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$ (siehe Beweis von Prinzip der offenen Abbildung, Satz I.2.20(a)).

Sei $y_0 \in B_r(0)$ beliebig. Angenommen, $y_0 \notin \overline{T(B_1(0))}$. Dann nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach (Satz 5.32) gibt es ein $y' \in Y'$ mit

$$\operatorname{Re} y'(y) < \operatorname{Re} y'(y_0)$$

für alle $y \in \overline{T(B_1(0))}$ (in Satz 5.32 ersetze y' durch $-y'$). Dann gilt

$$\operatorname{Re} y'(Tx) < \operatorname{Re} y'(y_0)$$

für alle $x \in B_1(0)$.

Wir schreiben $y'(Tx) = \alpha\rho$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, $\rho \geq 0$. Dann gilt für jedes $x \in B_1(0)$:

$$\operatorname{Re} y'(y_0) > \operatorname{Re} y'\left(T(\overline{\alpha}x)\right) = \operatorname{Re} \overline{\alpha} y'(Tx) = \overline{\alpha}\alpha\rho = \rho = |y'(Tx)|.$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} r\|y'\|_{Y'} \leq \|T'y'\|_{X'} &= \sup_{x\in B_1(0)} |(T'y')(x)| = \sup_{x\in B_1(0)} |y'(Tx)| \\ &\leq \operatorname{Re} y'(y_0) \leq |y'(y_0)| \leq \|y'\|_{Y'}\|y_0\|_Y. \end{aligned}$$

Also ist $r \leq \|y_0\|_Y$. Widerspruch! $\square$

Beweis von Satz 5.33. Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt aus Satz 5.13.

(a)$\Rightarrow$(d) ($\subset$) Sei $x' \in \operatorname{Bild}(T')$ beliebig. Dann gibt es ein $y' \in Y'$ mit $x' = T'y'$. Berechne

$$x'(x) = \left(T'y'\right)(x) = y'(Tx) = 0$$

für alle $x \in \operatorname{Kern}(T)$. Also gilt

$$x' \in \operatorname{Kern}(T)^{\perp} := \left\{x' \in X' \,\middle|\, x'(x) = 0\ \forall x \in \operatorname{Kern}(T)\right\}.$$

Somit ist $\operatorname{Bild}(T') \subset \operatorname{Kern}(T)^{\perp}$.

($\supset$) Sei $x' \in \operatorname{Kern}(T)^{\perp}$ beliebig. Betrachte $z' : \operatorname{Bild}(T) \to \mathbb{K}$, $y \mapsto x'(x)$ für $Tx = y$. Offenbar ist z' ein lineares Funktional.

Behauptung: z' ist stetig.

Beweis: Wähle $K > 0$, wie in Lemma 5.34, d.h. zu jedem $y \in \operatorname{Bild}(T)$ gibt es ein $x \in X$ mit $Tx = y$ und $\|x\|_X \leq K\|y\|_Y$. Dann folgt

$$|z'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\|\|x\| \leq \|x'\|K\|y\|.$$

$\boxed{\text{B}}$

Sei $y' \in Y'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von z'. Es gilt $x' = T'y'$, denn

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Folglich ist $x' \in \operatorname{Bild}(T')$. Somit gilt $\operatorname{Kern}(T)^{\perp} \subset \operatorname{Bild}(T')$.

(d)$\Rightarrow$(c) Klar, da Annihilatoren abgeschlossen sind.

(c)$\Rightarrow$(a) Sei $Z := \overline{\operatorname{Bild}(T)} \subset Y$. Definiere $S : X \to Z$ durch $Sx = Tx$. Seien $y' \in Y'$ und $x \in X$ beliebig. Dann gilt

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = y'|_Z(Sx) = \left(S'(y'|_Z)\right)(x).$$

Folglich ist

$$T'(y') = S'(y'|_Z) \tag{5.5}$$

und somit $\operatorname{Bild}(T') \subset \operatorname{Bild}(S')$.

Nun sei $x' \in \operatorname{Bild}(S')$ beliebig, d.h. $x' = S'z'$ für ein $z' \in Z'$. Sei $y' \in Y'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von z'. Aus (5.5) folgt $S'z' = T'y'$. Also ist $\operatorname{Bild}(S') \subset \operatorname{Bild}(T')$ und somit $\operatorname{Bild}(S') = \operatorname{Bild}(T')$. Nach Voraussetzung (c) ist $\operatorname{Bild}(S')$ abgschlossen.

Wegen $\overline{\text{Bild}(S)} = Z$ und $\overline{\text{Bild}(S)} = \text{Kern}(S')_\perp$ ist $S' \in \mathcal{L}(Z', X')$ injektiv. Damit ist S' eine stetige Bijektion zwischen Z' und $\text{Bild}(S')$. Mit dem Satz von der inversen Abbildung folgt, dass $(S')^{-1}$ stetig ist, d.h.

$$\|(S')^{-1}x'\|_{Z'} \leq \frac{1}{c}\|x'\|_{X'} \quad \forall x' \in \text{Bild}(S')$$

für ein geeignetes $c > 0$. Setze nun $x' = S'z'$. Dann folgt $c\|z'\|_{Z'} \leq \|S'z'\|_{X'}$. Mit Lemma 5.35 folgt dann, dass $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ offen ist. Nach dem Prinzip der offenen Abbildung ist S surjektiv und daher

$$\text{Bild}(S) = Z \Rightarrow \text{Bild}(T) = Z \Rightarrow \text{Bild}(T) \text{ ist abgeschlossen.}$$

□

AUFGABE. *Zeigen Sie, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators reell ist.*

5.6. Einseitige Inversen

DEFINITION 5.36. *Seien X, Y Vektorräume, $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Eine Abbildung $S_l : Y \to X$ heißt* Linksinverse zu T, *falls gilt $S_l T = \text{id}_X$. Eine Abbildung $S_r : Y \to X$ heißt* Rechtsinverse zu T, *falls gilt $TS_r = \text{id}_Y$.*

Ist T rechtsinvertierbar, so ist $x = S_r y$ eine Lösung der Gleichung $Tx = y$, denn $Tx = TS_r y = y$. Ist T linksinvertierbar und die Gleichung $Tx = y$ lösbar, so ist die Lösung durch $x = S_l y$ gegeben, denn $x = S_l Tx = S_l y$.

BEISPIEL. *Seien $X = Y = C^\infty(\mathbb{R})$, $D := \frac{d}{dt}$, $(Jf)(t) := \int_0^t f(s)ds$. Es gilt $DJ = \text{id}_X$, d.h. J ist eine Rechtsinverse zu D. Der Operator J ist keine Linksinverse zu D, denn*

$$(JDf)(t) = \int_0^t f'(s)ds = f(t) - f(0).$$

In der Tat ist D nicht linksinvertierbar. Das folgt aus der folgenden Bemerkung.

BEMERKUNG. *Ist T linksinvertierbar, so ist T injektiv, denn aus $Tx = 0$ folgt $x = S_l Tx = 0$. Ist T rechtsinvertierbar, so ist T surjektiv, denn*

$$\text{Bild}(T) \supset \text{Bild}(TS_r) = \text{Bild}(\text{id}_Y) = Y.$$

Die Injektivität bzw. Surjektivität ist für die Links- bzw. Rechtsinvertierbarkeit nicht nur notwendig sondern auch hinreichend.

SATZ 5.37. *Seien X, Y Vektorräume, $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung.*
(1) Der Operator T ist linksinvertierbar genau dann, wenn T injektiv ist.
(2) Ist S_l eine Linksinverse zu T, so gilt: $Y = \text{Bild}(T) \dot{+} \text{Kern}(S_l)$.
(3) Ist T injektiv, so gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller Linksinversen zu T und der Menge der zum $\text{Bild}(T)$ komplementären Teilräumen, d.h. der Räumen $Z \subset Y$ mit $Y = \text{Bild}(T) \dot{+} Z$.
(4) Der Operator T ist rechtsinvertierbar genau dann, wenn T surjektiv ist.
(5) Ist S_r eine Rechtsinverse zu T, so gilt: $X = \text{Kern}(T) \dot{+} \text{Bild}(S_r)$.
(6) Ist T surjektiv, so gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller Rechtsinversen zu T und der Menge der zum $\text{Kern}(T)$ komplementären Teilräumen, d.h. der Räumen $Z \subset X$ mit $X = \text{Kern}(T) \dot{+} Z$.

(7) Besitzt der Operator T sowohl die Links- als auch Rechtsinverse, so ist T invertierbar und es gilt $S_l = S_r = T^{-1}$.

Beweis. (1) Wegen der Bemerkung oben genügt es die Implikation "$\Leftarrow$" zu zeigen. Sei T injektiv. Sei $\{e_j\}_{j\in J}$ eine Basis in X. Zu beliebigem $x \in X$ gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so, dass

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \qquad \Rightarrow \qquad Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Te_j.$$

Behauptung 1. $\{Te_j\}_{j=1}^n$ sind linear unabhängig.

Beweis. Angenommen, $\{Te_j\}_{j=1}^n$ wäre linear abhängig, d.h. es gäbe Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\alpha_j \neq 0$, mit

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Te_j = T\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Daher ist $0 \neq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in \text{Kern}(T)$. Widerspruch! $\boxed{\text{B1}}$

Also ist $\{Te_j\}_{j\in J}$ eine Basis im Bild(T). Sei $\{g_i | i \in I\}$ ein System linear unabhängiger Elemente so, dass $\{Te_j\}_{j\in J} \cup \{g_i | i \in I\}$ eine Basis in Y ist. Zu jedem $y \in Y$ mit

$$y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Te_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i$$

setze

$$Sy = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Offenbar ist S linear. Für beliebiges $x \in X$ mit $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ gilt

$$STx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j STe_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = x.$$

Also ist S eine Linksinverse zu T.

(2) Sei $y \in Y$ beliebig. Setze $x = S_l y$ und $z = Tx = TS_l y \in Y$. Dann ist $z \in \text{Bild}(T)$ und $y - z = y - TS_l y$. Offenbar gilt

$$S_l(y - z) = S_l y - S_l T S_l y = S_l y - S_l y = 0.$$

Also ist $y - z \in \text{Kern}(S_l)$. Somit lässt sich jedes $y \in Y$ als die Summe $z + (y - z)$ mit $z \in \text{Bild}(T)$ und $y - z \in \text{Kern}(S_l)$ darstellen.

Ist $Tx \in \text{Kern}(S_l)$ für ein $x \in X$, so gilt $x = S_l Tx = 0$. Daher gilt $\text{Bild}(T) \cap \text{Kern}(S_l) = \{0\}$.

(3) Aus (2) folgt, dass jeder Linksinverse S_l eine Zerlegung $Y = \text{Bild}(T) \dotplus \text{Kern}(S_l)$ entspicht, wobei der Teilraum $\text{Kern}(S_l)$ zum $\text{Bild}(T)$ komplementär ist. Sei $\varphi : S_l \mapsto \text{Kern}\, S_l$ die entsprechende Zuordnung.

Umgekehrt, sei $Y = \mathrm{Bild}(T) \dotplus Z$ eine Zerlegung von Y. Definiere die Abbildung $S : Y \to X$ durch

$$S(Tx + z) := x \qquad \forall x \in X \quad \forall z \in Z.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear. Mit $z = 0$ folgt aus der Definition, dass $ST = \mathrm{id}_X$, d.h. S ist eine Linksinverse. Mit $x = 0$ erhalten wir $\mathrm{Kern}(S) = Z$.

Behauptung 2. S ist die eindeutige Linksinverse zu T mit $\mathrm{Kern}(S) = Z$.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine weitere Linksinverse $\widetilde{S}$ zu T mit $\mathrm{Kern}(\widetilde{S}) = Z$, d.h. $\widetilde{S}T = \mathrm{id}_X$. Für beliebiges $y = Tx + z \in Y$, $x \in X$, $z \in Z$, betrachte

$$(S - \widetilde{S})(Tx + z) = STx - \widetilde{S}TX + Sz - \widetilde{S}z = 0.$$

Also gilt $\widetilde{S} = S$. $\boxed{\text{B2}}$

Also ist die Zuordnung $\psi : Z \mapsto S$ invers zu φ, d.h. $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ sind identische Abbildungen. Somit ist φ eine Bijektion.

(4), (5), (6) lassen sich analog zu (1), (2), (3) beweisen (selbst!)

(7) Aus (1) und (4) folgt, dass T bijektiv ist. Nach (3) und (6) sind Links- und Rechtsinversen eindeutig bestimmt. Diese sind gleich, denn

$$S_l = S_l \,\mathrm{id}_Y = S_l T S_r = \mathrm{id}_X \, S_r = S_r.$$

$\square$

Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen einseitige Inversen stetig sind.

Satz 5.38. *Seien X und Y Banachräume.*

(1) Ein injektiver Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann stetig linksinvertierbar, wenn $\mathrm{Bild}(T)$ *abgeschlossen ist und einen abgeschlossenen komplementären Teilraum besitzt.*

(2) Ein surjektiver Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann stetig rechtsinvertierbar, wenn $\mathrm{Kern}(T)$ *einen abgeschlossenen komplementären Teilraum besitzt.*

KAPITEL 6

Kompakte und Fredholmsche Operatoren

6.1. Kompakte Operatoren. Satz von Schauder

PROPOSITION 6.1. *Der Fredholmsche Integraloperator*

$$T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ (Tf)(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s,t) f(t)\, dt$$

mit $k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *ist stetig und kompakt.*

BEWEIS. (1) Stetigkeit:

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} k(s,t) f(t)\, dt \right|^2 ds \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |k(s,t)|^2\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt \right) ds \\ &= \|k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

(2) Kompaktheit: Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Dann ist das Tensorprodukt

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x) g(y)$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

BEHAUPTUNG: Seien $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ Orthonormalbasen von $L^2(\mathbb{R})$. Dann ist $\{f_i \otimes g_j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^2)$.

BEWEIS. Es ist klar, dass $\{f_i \otimes g_j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem ist. Angenommen es sei keine Orthonormalbasis. Dann gibt es ein $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \neq 0$, mit $\langle \varphi, f_i \otimes g_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) f_i(x) g_j(y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) g_j(y)\, dy \right) dx \\ &\overset{\{f_i\}\text{ONB}}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) g_j(y)\, dy \overset{\text{f.ü.}}{=} 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ &\overset{\{g_j\}\text{ONB}}{\Longrightarrow} \varphi(x,y) = 0 \text{ fast überall.}\end{aligned}$$

Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Für jede messbare $f \geq 0$ gibt es eine monoton wachsende Folge (f_n) von einfachen Funktionen ($f_n = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}$) mit $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktweise. Mit dem Lebesgueschen Satz von dominierter Konvergenz folgt

$$\|f - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\, dx}_{\downarrow \atop \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx} - 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) f_n(x)\, dx}_{\downarrow \atop \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx} \longrightarrow 0.$$

Eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ können wir folgendermaßen Darstellen:

$$f = f_1 - f_2 + \mathrm{i} f_3 - \mathrm{i} f_4, \quad f_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4.$$

Damit finden wir für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ ein Folge (f_n) einfacher Funktionen mit $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$. Selbiges gilt für den Integralkern k mit einfacher Funktionen

$$k_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{N_n} \alpha_{ij}^{(n)} \chi_{E_i^{(n)}}(s) \chi_{F_j^{(n)}}(t).$$

Sei $T_n : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ein Integraloperator mit Integralkern $k_n(s,t)$. T_n hat ein endlichdimensionales Bild und ist folglich kompakt. Wir definieren den Integraloperator $\tilde{T}_n := T - T_n$ mit Integralkern $k(s,t) - k_n(s,t)$. Es gilt

$$\|T - T_n\| = \|\tilde{T}\| \leq \|k - k_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist T kompakt. □

Satz 6.2 (Satz von Schauder). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Es gilt*

$$T \text{ kompakt } \Leftrightarrow T' \text{ kompakt}.$$

Beweis. $(\Rightarrow)$ Sei (y_n') eine beschränkte Folge in Y'. Die Menge $K := \overline{T(B_1(0))}$ ist ein kompakter metrischer Raum, mit der durch die Norm induzierten Metrik $d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$. Sei $f_n := y_n'|_K \in C(K, \mathbb{K})$. Die Folge f_n besitzt folgende Eigenschaften:

(1) (f_n) ist beschränkt,
(2) (f_n) ist gleichgradig stetig, denn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(y_1) - f_n(y_2)| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k'\|_{Y'} \|y_1 - y_2\|_Y \underset{y_1\to y_2}{\longrightarrow} 0.$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (Satz I.1.43) gibt es eine, bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergente, Teilfolge (f_{n_k}). Damit gilt

$$\begin{aligned} \|T'y_{n_k}' - T'y_{n_l}'\|_{X'} &= \sup_{x\in B_1(0)} \left|(T'y_{n_k}')(x) - (T'y_{n_l}')(x)\right| \\ &= \sup_{x\in B_1(0)} \left|y_{n_k}'(Tx) - y_{n_l}'(Tx)\right| \\ &= \sup_{y\in K} |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| = \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_\infty \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(T'y_{n_k}')$ eine Cauchy-Folge in X'. Dieser ist vollständig und die Folge demnach konvergent. Dies zeigt die Kompaktheit von T'.

$(\Leftarrow)$ Da T' kompakt ist, ist nach $(\Leftarrow)$ auch T'' kompakt. Sei

$$J_X : X \to X'' \text{ mit } x \mapsto x'',\ x''(x') = x'(x) \quad \forall x' \in X'$$

die kanonische Inklusion. Nach Lemma I.1.38 (b) ist $T''J_X$ ebenfalls kompakt. Mit Satz 5.8 ist auch $J_Y T = T'' J_X$ kompakt.

Nach Lemma I.3.5 ist $\operatorname{Bild}(J_Y)$ ein abgeschlossener Teilraum von Y''. Definiere $U : X \to \operatorname{Bild}(J_Y)$, $\widetilde{J}_Y : Y \to \operatorname{Bild}(J_Y)$ durch $Ux = J_Y Tx$ bzw. $\widetilde{J}_Y y = J_Y y$. Wir haben bereits gezeigt, dass U kompakt ist. Da $\widetilde{J}_Y : Y \to \operatorname{Bild}(J_Y)$ bijektiv und stetig ist, besagt Satz von der inversen Abbildung, dass auch $\widetilde{J}_Y^{-1}$ stetig ist. Allerdings gilt $\widetilde{J}_Y^{-1}U = T$. Also ist T nach Satz I.1.38 (b) kompakt. $\square$

SATZ 6.3. *Seien X, Y Banachräume, sowie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt:*

(a) *Ist T kompakt und konvergiert $x_n \to x$ schwach in X, so konvergiert $Tx_n \to Tx$ stark in Y.*
(b) *Sei X reflexiv. Konvergiert $Tx_n \to Tx$ stark in Y für jede schwach konvergente Folge $x_n \to x$, so ist T kompakt.*

BEMERKUNG. *Für nicht reflexive Banachräume ist (b) falsch. Betrachte dazu das Lemma von Schur: In ℓ^1 ist jede schwach konvergente Folge stark konvergent. Ohne Beweis.*

BEWEIS. (a) (1) Nach Lemma I.3.7 ist jede schwach konvergente Folge beschränkt. Folglich gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) so, dass $Tx_{n_k} \to y$ für ein $y \in Y$.

Sei $y' \in Y'$ beliebig. Die Abbildung $X \ni z \mapsto y'(Tz)$ ist ein Element von X'. Folglich ist

$$y'(Tx_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y'(Tx)$$

und daher

$$Tx_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tx \text{ schwach in } Y.$$

Aus $Tx_{n_k} \to y$ stark folgt $Tx_{n_k} \to y$ schwach. Also gilt $y = Tx$, also $Tx_{n_k} \to Tx$ stark.

(2) Angenommen (Tx_n) sei nicht konvergent gegen Tx. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $m \geq N$ existiert mit $\|Tx_m - Tx\| \geq \varepsilon$. Sei nun (x_{m_j}) eine Teilfolge von (x_n) mit $\|Tx_{m_j} - Tx\| \geq \varepsilon$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mit (1) finden wir nun eine Teilfolge $(x_{m_{j_k}})$ mit $Tx_{m_{j_k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tx$. Widerspruch! Also gilt $Tx_n \to Tx$ stark.

(b) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in X. O.b.d.A. sei $\|x_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz I.3.10 gilt für einen reflexiven Banachraum X, dass die abgschlossene Einheitskugel $K_1(0) \subset X$ schwach folgenkompakt ist. Folglich gibt es eine schwach konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n). Nach der Voraussetzung ist Tx_{n_k} stark konvergent. Somit ist T kompakt. $\square$

SATZ 6.4. *Seien X, Y Banachräume und* $\dim Y = \infty$. *Dann ist jedes $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ nicht surjektiv.*

BEWEIS. Angenommen, T sei surjektiv. Also ist T offen. Folglich ist $T(B_1(0))$ offen. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $K_\varepsilon(0) \subset T(B_1(0))$. Da T kompakt ist, ist $T(B_1(0))$ relativ kompakt. Damit ist aber $K_\varepsilon(0)$ kompakt, woraus mit Satz I.1.22 $\dim Y < \infty$ folgt. Widerspruch. $\square$

6.2. Fredholmsche Operatoren

DEFINITION 6.5. *Seien X, Y Banachräume. Eine Abbildung $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt* Fredholmsch, *falls gilt:*

(a) $\alpha(T) := \dim \operatorname{Kern}(T) < \infty$,
(b) $\operatorname{Bild}(T)$ *ist abgeschlossen,*
(c) $\beta(T) := \dim \operatorname{Kokern}(T) < \infty$ *mit* $\operatorname{Kokern}(T) := Y / \operatorname{Bild}(T)$.

Desweiteren definieren wir den Index *von T als* $\operatorname{ind}(T) := \alpha(T) - \beta(T)$.

Bedingung (b) in dieser Definition ist redundant.

Proposition 6.6. *Ist $\beta(T) < \infty$, so ist* Bild(T) *abgeschlossen.*

Lemma 6.7. *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist* Bild(T) *ausgestattet mit der Norm*

$$\|Tx\|_T := \|Tx\|_Y + \|[x]\|_{X/\operatorname{Kern}(T)}$$

ein Banachraum.

Beweis. Sei (y_j), $y_j = Tx_j$, eine Cauchyfolge in Bild(T) bzgl. $\|\cdot\|_T$. Dann ist $([x_j])$ eine Cauchyfolge in $X/\operatorname{Kern}(T)$. Da $X/\operatorname{Kern}(T)$ vollständig, ist diese Folge konvergent mit dem Grenzwert $[x]$. Sei $\widetilde{T} : X/\operatorname{Kern}(T) \to Y$ definiert durch $\widetilde{T}[x] = Tx$. Offenbar ist $\widetilde{T}$ stetig. Folglich gilt

$$\|Tx_j - Tx\|_Y = \|\widetilde{T}[x_j - x]\|_Y \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

□

Beweis von Proposition 6.6. Sei $n := \dim Y/\operatorname{Bild}(T)$. Da $Y/\operatorname{Bild}(T)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, existieren $e_1, \dots, e_n \in Y$ so, dass die Äquivalenzklassen $[e_1], \dots, [e_n]$ eine Basis in $Y/\operatorname{Bild}(T)$. Also kann jedes $y \in Y$ als

$$y = u + \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \quad a_j \in \mathbb{K},$$

mit $u \in \operatorname{Bild}(T)$ eindeutig dargestellt werden. Sei

$$Z := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}.$$

Also ist Y algebraisch isomorph zu $\operatorname{Bild}(T) \dotplus Z$. Da Z endlichdimensional ist, ist es abgeschlossen. Daher ist Y/Z ein Banachraum. Betrachte die Abbildung

$$J : \operatorname{Bild}(T) \to Y/Z, \quad y \mapsto y + Z.$$

Sie ist bijektiv. Wegen

$$\|Jy\|_{Y/Z} = \inf_{z\in Z} \|y - z\| \le \|y\|$$

ist sie stetig.

Mit der Ungleichung $\|y\|_Y \le \|y\|_T$, $y \in \operatorname{Bild}(T)$, folgt, dass J auch als Abbildung von $(\operatorname{Bild}(T), \|\cdot\|_T)$ nach $(Y/Z, \|\cdot\|_{Y/Z})$ stetig. Nach Lemma 6.7 und dem Satz von der inversen Abbildung ist

$$J^{-1}(Y/Z, \|\cdot\|_{Y/Z}) \to (\operatorname{Bild}(T), \|\cdot\|_T)$$

stetig, d.h.

$$\|J^{-1}[y]\|_T \le C\|[y]\|_{Y/Z} \quad \Rightarrow \|J^{-1}[y]\|_Y \le C\|y\|_{Y/Z}.$$

Also ist J^{-1} als Abbildung von $(Y/Z, \|\cdot\|_{Y/Z})$ nach $(\operatorname{Bild}(T), \|\cdot\|_Y)$ stetig.

Daher sind $(Y/Z, \|\cdot\|_{Y/Z})$ und $(\operatorname{Bild}(T), \|\cdot\|_Y)$ topologisch isomorph. Insbesondere ist Bild(T) abgeschlossen. □

BEISPIELE. (1) *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und* $T : \ell^p \to \ell^p$ *der Shiftoperator,*

$$T(t_1, t_2, \ldots) = (t_2, t_3, \ldots).$$

Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(T) = \{(t, 0, 0, \cdots) \mid t \in \mathbb{K}\} \Rightarrow \alpha(T) = 1$$

und

$$\mathrm{Bild}(T) = \ell^p \Rightarrow \beta(T) = 0.$$

Also ist $\mathrm{ind}(T) = 1$.

(2) *Sei* $T : \mathcal{C}^{k+n}([0,1]) \to \mathcal{C}^k([0,1])$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\|f\|_{\mathcal{C}^p} := \sum_{j=0}^{p} \|f^{(j)}\|_\infty$ *definiert durch*

$$(Tf)(x) := \frac{d^n}{dx^n} f(x) + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) + \cdots a_n(x) f(x),$$
$$a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}^k([0,1]).$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx} F(x) = A(x) F(x)$$

mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

besitzt n-dimensionalen Lösungsraum. Somit ist $\dim \mathrm{Kern}(T) = n$. *Für jede rechte Seite*

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

besitzt das System

$$\frac{d}{dx} F(x) = A(x) F(x) + G(x)$$

eine Lösung. Somit ist $\mathrm{Bild}(T) = \mathcal{C}^k([0,1])$. *Folglich ist* $\mathrm{ind}(T) = n$.

(3) *Sei*

$$T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$$

ein Multiplikationsoperator

$$(Tf)(x) = t(x) f(x), \quad t \in \mathcal{C}([0,1]).$$

- *Gilt* $t(x) \neq 0$ *für alle* $x \in [0,1]$, *so ist* $\operatorname{Kern}(T) = \{0\}$, *und folglich* $\alpha(T) = 0$. *Desweiteren ist* $\operatorname{Bild}(T) = \mathcal{C}([0,1])$, *denn* $f(x) = \frac{f(x)}{t(x)} t(x)$. *Also* $\beta(T) = 0$ *und* $\operatorname{ind}(T) = 0$.
- *Sei nun* $t(x) = 0$ *für alle* $x \in [a,b] \subsetneq [0,1]$, $a < b$. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}([a,b]) &\subset \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \setminus [a,b]\} \\ &\subset \operatorname{Kern}(T).\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Kern}(T)$ *unendlichdimensional, d.h.* $\alpha(T) = \infty$. *Folglich ist* T *nicht Fredholmsch.*
- *Sei* $x_0 \in [0,1]$ *die einzige Nullstelle von* t. *Dann ist* T *injektiv, aber nicht surjektiv. Statt die Dimension von* $\operatorname{Kokern}(T)$ *zu untersuchen, zeigen wir, dass das* $Bild(T)$ *nicht abgeschlossen ist.*

Behauptung: $\operatorname{Bild}(T)$ *ist nicht abgeschlossen.*

Beweis. *Es gilt*

$$\operatorname{Bild}(T) = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \,\middle|\, f(x_0) = 0 \text{ und } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{t(x)} < \infty \right\}.$$

Die Inklusion „$\subset$“ ist klar, wir zeigen „$\supset$“. Dafür setze

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{t(x)}, & \text{falls } x \neq x_0, \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{t(x)}, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Die Funktion g *ist stetig und es gilt* $f(x) = t(x)g(x)$.
Wir definieren $f_n(x) := t(x) \log\left(\frac{1}{n} + \sqrt{|t(x)|}\right) \in \operatorname{Bild}(T)$. *Dann gilt:*

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} t(x) \log\left(\sqrt{|t(x)|}\right), & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0 \end{cases} \qquad \text{punktweise.}$$

Die Grenzwertfunktion f *ist stetig, denn*

$$\lim_{x \to x_0} t(x) \log\left(\sqrt{|t(x)|}\right) = \lim_{s \to 0} s \log\left(\sqrt{|s|}\right) = 0.$$

Aus der Abschätzung für $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |t(x)| \left| \log\left(1/n + \sqrt{|t(x)|}\right) - \log\left(\sqrt{|t(x)|}\right) \right| \\ &= |t(x)| \log\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{|t(x)|}}\right) \\ &\overset{\log(1+y) \leq y}{\leq} \frac{1}{n}\sqrt{|t(x)|}\end{aligned}$$

folgt, dass $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. *Jedoch gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{t(x)} \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \log\left(\sqrt{|t(x)|}\right) \right| = \infty.$$

$\boxed{B}$

DEFINITION 6.8. *Ein* Kettenkomplex *besteht aus einer Folge X_i, $i \in \mathbb{Z}$, von Banachräumen und einer Folge $T_i : X_i \to X_{i-1}$ stetiger Operatoren mit abgeschlossenem Bild,*

$$\cdots \xleftarrow{T_{i-1}} X_{i-1} \xleftarrow{T_i} X_i \xleftarrow{T_{i+1}} X_{i+1} \leftarrow \cdots .$$

Ist $\mathrm{Bild}(T_{i+1}) \subset \mathrm{Kern}\, T_i$*, so heißt der Quotientenraum*

$$H_i := \mathrm{Kern}(T_i) \,/\, \mathrm{Bild}(T_{i+1})$$

i-ter Homologieraum. *Gilt* $H_i = \{0\}$*, d.h.* $\mathrm{Kern}(T_i) = \mathrm{Bild}(T_{i+1})$*, so heißt der Kettenkomplex* exakt an der Stelle i*. Der Kettenkomplex heißt* exakt*, wenn er an allen Stellen exakt ist.*

Ein Kokettenkomplex *besteht aus einer Folge X_i, $i \in \mathbb{Z}$, von Banachräumen und einer Folge $T_i : X_{i-1} \to X_i$ stetiger Operatoren mit abgeschlossenem Bild,*

$$\cdots \xrightarrow{T_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{T_i} X_i \xrightarrow{T_{i+1}} X_{i+1} \to \cdots .$$

Ist $\mathrm{Bild}(T_i) \subset \mathrm{Kern}\, T_{i+1}$*, so heißt der Quotientenraum*

$$H^i := \mathrm{Kern}(T_{i+1}) \,/\, \mathrm{Bild}(T_i)$$

i-ter Kohomologieraum. *Gilt* $H^i = \{0\}$*, d.h.* $\mathrm{Kern}(T_{i+1}) = \mathrm{Bild}(T_i)$*, so heißt der Kokettenkomplex* exakt an der Stelle i*. Der Kokettenkomplex heißt* exakt*, wenn er an allen Stellen exakt ist.*

BEISPIELE. ***(1)*** *Wir betrachten den Kokettenkomplex*

$$\{0\} \xrightarrow{T_0} \mathcal{C}^k(\mathbb{T}) \xrightarrow{T_1=d} \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{T}) \xrightarrow{T_2=0} \{0\},$$

wobei $\mathbb{T}$ der Torus (Kreislinie) ist und d der Ableitungsoperator, $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ bezeichne die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen.

BEHAUPTUNG: $\mathrm{Bild}(d) = \left\{ u \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{T}) \;\middle|\; \int_0^{2\pi} u(t)\, dt = 0 \right\}.$

BEWEIS: *Sei* $u \in \mathrm{Bild}(d)$*, also ist* $u = v'$ *für ein* $v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$*. Dann ist*

$$\int_0^{2\pi} u(t)\, dt = \int_0^{2\pi} v'(t)\, dt = v(2\pi) - v(0) = 0.$$

Umgekehrt, sei $u \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{T})$ *mit* $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt = 0$ *beliebig. Dann ist* $v(t) := \int_0^t u(s) ds$ *k-mal stetig differenzierbar und 2π-periodisch.* $\boxed{B}$

Also mit $T_2 : \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{T}) \to \{0\}$ *und* $T_1 = d$ *gilt*

$$H^1 = \mathrm{Kern}(T_2) \,/\, \mathrm{Bild}(T_1) = \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{T}) \,/\, \mathrm{Bild}(d) \cong \mathbb{K}.$$

Demnach ist der Kokettenkomplex nicht exakt an der Stelle $i = 1$*.*

Analog gilt

$$H^0 = \mathrm{Kern}(T_1) \,/\, \mathrm{Bild}(T_0) = \{u \quad \textit{ist konstant}\} \,/\, \{0\} \cong \mathbb{K}.$$

Also ist der Kokettenkomplex nicht exakt auch an der Stelle $i = 0$*.*

(2) $\mathcal{C}^k_0(\mathbb{T})$ *bezeichne die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen mit Mittelwert Null, d.h.*

$$\int_0^{2\pi} u(t) dt = 0.$$

Dann ist der Kokettenkomplex exakt.

Satz 6.9. *Sei* (T_i, X_i) *ein exakter Kokettenkomplex,*

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{T_i} X_i \xrightarrow{T_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

Dann ist auch der adjungierte (bzw. duale) Kettenkomplex

$$\cdots \longleftarrow X'_{i-1} \xleftarrow{T'_i} X'_i \xleftarrow{T'_{i+1}} X'_{i+1} \longleftarrow \cdots$$

exakt.

Bemerkung. *Die Umkehrung ist auch richtig.*

Beweis. (1) Wir betrachten zunächst den Spezialfall von zwei Räumen (nur um die Idee des Beweises zu veranschaulichen):

$$\{0\} \xrightarrow{\gamma} X_1 \xrightarrow{T} X_2 \xrightarrow{\varphi} \{0\}.$$

Der Kokettenkomplex ist exakt, folglich gilt

$$\{0\} = \mathrm{Bild}(\gamma) = \mathrm{Kern}(T), \quad \mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(\varphi) = X_2.$$

Daher ist $T : X_1 \to X_2$ bijektiv. Da $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen ist, gelten nach Satz 5.33 die folgenden Gleichheiten:

$$\mathrm{Bild}(T') = \mathrm{Kern}(T)^{\perp} = X'_1$$

und

$$\begin{aligned} X_2 = \mathrm{Bild}(T) &= \mathrm{Kern}(T')_{\perp} \\ &= \left\{ x_2 \in X_2 \,\middle|\, x'_2(x_2) = 0 \quad \forall x'_2 \in \mathrm{Kern}(T') \right\}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Kern}(T') = \{0\}$. Damit ist der duale Kettenkomplex

$$\{0\} \leftarrow X'_1 \xleftarrow{T'} X'_2 \leftarrow \{0\}$$

exakt.

(2) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall.

Behauptung 1: $\mathrm{Bild}(T'_{i+1}) \subset \mathrm{Kern}(T'_i)$.

Beweis. Sei $x'_{i+1} \in X'_{i+1}$ beliebig. Also ist $x'_i := T'_{i+1} x'_{i+1} \in \mathrm{Bild}(T'_{i+1})$. Folglich gilt

$$T'_i x'_i = T'_i T'_{i+1} x'_{i+1} = (\underbrace{T_{i+1} T_i}_{=0})' x'_{i+1} = 0$$

und daher $\mathrm{Bild}(T'_{i+1}) \subset \mathrm{Kern}(T'_i)$. $\boxed{\text{B1}}$

Behauptung 2: $\mathrm{Kern}(T'_i) \subset \mathrm{Bild}(T'_{i+1})$.

Beweis: Sei $x'_i \in \mathrm{Kern}(T'_i) \subset X'_i$ beliebig. Dann ist $x'_i(x_i) = 0$ für alle $x_i \in \mathrm{Bild}(T_i) = \mathrm{Kern}(T_{i+1}) \subset X_i$. Wir betrachten auf $\mathrm{Bild}(T_{i+1})$ das Funktional F_0:

$$F_0(T_{i+1} x_i) = x'_i(x_i) \quad \text{für alle} \quad x_i \in X_i.$$

Das Funktional F_0 ist wohldefiniert, denn

$$T_{i+1} x_i^{(1)} = T_{i+1} x_i^{(2)} \Leftrightarrow T_{i+1}(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) = 0 \Rightarrow x'_i(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) = 0.$$

F_0 ist offenbar linear. Wir zeigen nun, dass F_0 stetig ist. Da $\mathrm{Bild}(T_{i+1})$ abgeschlossen ist, gilt nach Lemma 5.34, dass zu jedem $x_{i+1} \in \mathrm{Bild}(T_{i+1})$

ein $x_i \in X_i$ gibt, mit $T_{i+1}x_i = x_{i+1}$ und $\|x_i\| \leq K\|x_{i+1}\|$ für ein von x_{i+1} unabhängigen $K > 0$. Daher ist

$$|F_0(x_{i+1})| = |x_i'(x_i)| \leq \|x_i'\|\|x_i\| \leq K\|x_i'\|\|x_{i+1}\|.$$

Damit ist das Funktional beschränkt, also stetig.

Mit dem Satz von Hahn-Banach finden wir eine Fortsetzung $F : X_{i+1} \to \mathbb{K}$ von F_0. Daher gilt für alle $x_i \in X_i$:

$$(T_{i+1}'F)(x_i) = F(T_{i+1}x_i) = F_0(T_{i+1}x_i) = x_i'(x_i).$$

Also ist

$$T_{i+1}'F = x_i' \Rightarrow x_i' \in \operatorname{Bild}(T_{i+1}').$$

B2

Somit ist der Satz bewiesen. □

SATZ 6.10. *Seien X, Y Banachräume. Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ Fredholmsch, so ist $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ ebenfalls Fredholmsch und es gilt:*

(a) $\alpha(T) = \beta(T')$,
(b) $\beta(T) = \alpha(T')$,
(c) $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T')$.

BEMERKUNG. *Die Umkehrung gilt auch.*

BEWEIS. Betrachte den Kokettenkomplex

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Kern}(T) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{p} \operatorname{Kokern}(T) \longrightarrow \{0\}$$

mit der Einbettung $i(x) := x$ für alle $x \in \operatorname{Kern}(T) \subset X$ und der Projektion $p : Y \to Y/\operatorname{Bild}(T)$, $y \mapsto [y]$.

BEHAUPTUNG: Der Kokettenkomplex ist exakt.

BEWEIS. Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(i) &= \{0\}, \\
\operatorname{Kern}(T) &= \operatorname{Bild}(i), \\
\operatorname{Kern}(p) &= \operatorname{Bild}(T), \\
\operatorname{Bild}(p) &= \operatorname{Kokern}(T).
\end{aligned}$$

B

Mit Satz 6.9 folgt, dass der Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow (\operatorname{Kern}(T))' \xleftarrow{i'} X' \xleftarrow{T'} Y' \xleftarrow{p'} (\operatorname{Kokern}(T))' \longleftarrow 0$$

exakt ist. Insbesondere gilt

$$\operatorname{Kern}(i') = \operatorname{Bild}(T'), \tag{6.1}$$

$$\operatorname{Kern}(T') = \operatorname{Bild}(p'). \tag{6.2}$$

Nun bestimmen wir $\operatorname{Bild}(p')$ und $\operatorname{Kern}(i')$.

Für alle $z' \in (\operatorname{Kokern}(T))'$ und alle $y \in Y$ gilt:

$$(p'(z')(y) = z'(p(y)) = z'([y]).$$

Somit ist $\operatorname{Bild}(p') \cong (\operatorname{Kokern}(T))'$ und nach (6.2) ist

$$\operatorname{Kern}(T') \cong (\operatorname{Kokern}(T))'. \tag{6.3}$$

Ferner gilt für jedes $x' \in X'$ und alle $x \in \operatorname{Kern}(T)$:

$$(i'(x'))(x) = x'(i(x)) = x'(x).$$

Also ist $i' : x' \mapsto x'|_{\operatorname{Kern}(T)}$. Daher ist

$$\operatorname{Kern}(i') = \left\{ x' \in X' \,\middle|\, x'|_{\operatorname{Kern}(T)} = 0. \right\}$$

Nun betrachten wir den Quotientenraum

$$X' / \operatorname{Kern}(i') = \left\{ [x'] \,\middle|\, x'_1, x'_2 \in [x'] \Leftrightarrow x'_1|_{\operatorname{Kern}(T)} = x'_2|_{\operatorname{Kern}(T)} \right\} \cong (\operatorname{Kern}(T))'.$$

Mit (6.1) folgt daraus, dass

$$X' / \operatorname{Bild}(T') \cong (\operatorname{Kern}(T))' \Leftrightarrow \operatorname{Kokern}(T') \cong (\operatorname{Kern}(T))'. \tag{6.4}$$

Aus (6.3) und (6.4) folgt daraus, dass

$$\alpha(T') = \dim \operatorname{Kern}(T') = \dim(\operatorname{Kokern}(T))' = \dim \operatorname{Kokern}(T) = \beta(T)$$

und

$$\beta(T') = \dim \operatorname{Kokern}(T') = \dim(\operatorname{Kern}(T))' = \dim \operatorname{Kern}(T) = \alpha(T).$$

Insbesondere ist T' Fredholmsch. □

Bemerkung. *Ist* $\operatorname{Bild}(T)$ *abgeschlossen, so gilt*

$$\operatorname{Kern}(T') \cong (\operatorname{Kokern}(T))'.$$

Dabei braucht der Operator T nicht Fredholmsch zu sein.

Definition 6.11. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *heißt* fast invertierbar, *wenn* $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$ *existieren, so dass* $S_1 T - I_X$ *und* $T S_2 - I_Y$ *kompakt sind.*

Bemerkung. *Sei* $T \in \mathcal{L}(X)$ *invertierbar, d.h.* $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. *Setze nun* $S_1 = S_2 = T^{-1}$. *Damit ist T fast invertierbar.*

Satz 6.12. *Jeder Fredholmsche Operator* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *ist fast invertierbar. Genauer: es gibt einen Operator* $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ *so, dass* $ST - I_X$ *und* $TS - I_Y$ *ein endlichdimensionales Bild haben.*

Bemerkungen. (1) *Die Umkehrung ist auch richtig.*
(2) *Der Operator S heißt die Fredholm-Inverse oder Parametrix.*

Beweis. (1) Wir zeigen, dass es einen abgeschlossenen Teilraum $M \subset X$ und einen endlichdimensionalen Teilraum $N \subset Y$, mit $X = \operatorname{Kern}(T) \dotplus M$ und $Y = \operatorname{Bild}(T) \dotplus N$ gibt.

Nach Satz 5.18 existiert eine stetige Projektion P von X auf $\operatorname{Kern}(T)$. Nach Lemma 5.17 (d) sind X und die direkte Summe $\operatorname{Kern}(P) \dotplus M$ mit $M := \operatorname{Bild}(I - P)$ topologisch isomorph. Der Teilraum M ist nach Lemma 5.17 (c) abgeschlossen.

Sei $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{\beta(T)}$ eine Basis in $\operatorname{Kokern}(T) = Y / \operatorname{Bild}(T)$. Seien $y_1, \dots, y_{\beta(T)}$ Vertreter von den Äquivalenzklassen $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{\beta(T)}$. Sei $N := \operatorname{lin}\{y_1, \dots, y_{\beta(T)}\}$. Sei $y \in Y$ beliebig, $\tilde{y} := [y] \in \operatorname{Kokern}(T)$. Die Zerlegung $\tilde{y} = \sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j \tilde{y}_j$ ist eindeutig. Also gilt $y = \sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j y_j + \eta$ mit eindeutigem $\eta \in \operatorname{Bild}(T)$. Also gilt:

$$Y = \operatorname{Bild}(T) \dotplus N.$$

(2) Sei
$$U : M \to \mathrm{Bild}(T), \quad x \mapsto Tx.$$
Der Operator U ist bijektiv und stetig, also gilt nach Satz von der inversen Abbildung, dass $U^{-1} : \mathrm{Bild}(T) \to M$ stetig ist. Sei
$$S : Y \to X, \quad y \mapsto U^{-1}y, \quad S|_N = 0.$$
Dann gilt
$$ST(x) = ST\left(\sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i + \xi\right) = S \underbrace{T(\xi)}_{\in \mathrm{Bild}(T)} = U^{-1}U\xi = \xi,$$
wobei $\xi \in M$ und x_i, $i = 1, \dots, \alpha(T)$, eine Basis von $\mathrm{Kern}(T)$ ist. Folglich ist
$$(ST - I_X)(x) = -\sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i.$$
Analog gilt
$$TS(y) = TS\left(\sum_{j=1}^{\beta(T)} \underbrace{c_j y_j}_{\in N} + \underbrace{\eta}_{\in \mathrm{Bild}(T)}\right) = TS(\eta) = TU^{-1}(\eta) = UU^{-1}(\eta) = \eta$$
$$\Rightarrow (TS - I_Y)(y) = -\sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j y_j.$$

□

Satz 6.13 (Satz von Riesz). *Sei X ein Banachraum. Ist $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakt, so ist $T := I - K$ Fredholmsch.*

Bemerkung. *Später werden wir sehen, dass* $\mathrm{ind}(I - K) = 0$.

Beweis. Behauptung 1: $\dim \mathrm{Kern}(T) < \infty$.

Beweis: Offenbar ist $\mathrm{Kern}(T) = \{x \in X \mid Kx = x\}$. Sei $\widetilde{K} : \mathrm{Kern}(T) \to X$, $\widetilde{K} = K|_{\mathrm{Kern}(T)}$. Es gilt:

(6.5) $$\widetilde{K} = I_{\mathrm{Kern}(T)},$$
(6.6) $$\widetilde{K} \text{ ist kompakt.}$$

Sei $B = B_1(0) \subset \mathrm{Kern}(T)$. Dann ist nach (6.6)
$$\overline{\widetilde{K}(B)} \text{ kompakt} \overset{(6.5)}{\Longrightarrow} \overline{B} \text{ kompakt} \Longrightarrow \mathrm{Kern}(T) < \infty.$$

$\boxed{\text{B1}}$

Sei nun $X = \mathrm{Kern}(T) \dot{+} M$, mit $M \subset X$ abgeschlossen. Folglich ist
$$T|_M =: \tilde{T} : M \to \mathrm{Bild}(T)$$
bijektiv.

Behauptung 2: $\widetilde{T}^{-1} : \mathrm{Bild}(T) \to M$ ist beschränkt.

BEWEIS: Angenommen $\widetilde{T}^{-1}$ ist nicht beschränkt. Also findet man eine Folge $(x_n) \subset \operatorname{Bild}(T)$ so, dass

$$\|x_n\| = 1, \quad \|\widetilde{T}^{-1}x_n\| \to \infty.$$

Wir definieren eine weitere Folge (y_n), mit

$$y_n := \frac{\widetilde{T}^{-1}x_n}{\|\widetilde{T}^{-1}x_n\|} \in M.$$

Offensichtlich gilt $\|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|Ty_n\| \to 0$. Es gilt $Ty_n = y_n - Ky_n$. Da K kompakt ist, finden wir eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) so, dass (Ky_{n_k}) konvergiert. Sei $y := \lim\limits_{k\to\infty} Ky_{n_k}$. Aus

$$Ty_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt

$$y_{n_k} = Ty_{n_k} + Ky_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Da M abgeschlossen ist, liegt y in M. Desweiteren gilt $\|y\| = 1$, da $\|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Andererseits gilt

$$Ty = \lim_{k\to\infty} Ty_{n_k} = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Kern}(T).$$

Also ist $y \in M \cap \operatorname{Kern}(T) \neq \{0\}$. Ein Widerspruch! $\boxed{\text{B2}}$

BEHAUPTUNG 3: $\operatorname{Bild}(T)$ ist abgeschlossen.

BEWEIS: Sei (y_n) eine Cauchyfolge in $\operatorname{Bild}(T)$, sowie $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in X$. Wegen Behauptung 2 gilt, dass $(\widetilde{T}^{-1}y_n)$ eine Cauchyfolge in M ist, welche, wegen der Vollständigkeit von M, dort einen Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{T}^{-1}y$ besitzt. Folglich ist

$$Tx = T\lim_{n\to\infty} \tilde{T}^{-1}y = \lim_{n\to\infty} T(\tilde{T}^{-1}y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Also ist $y \in \operatorname{Bild}(T)$, d.h. $\operatorname{Bild}(T)$ ist abgschlossen. $\boxed{\text{B3}}$

BEHAUPTUNG 4: $\dim \operatorname{Kokern}(T) < \infty$.

BEWEIS. Da $\operatorname{Bild}(T)$ abgeschlossen ist, gilt nach Bemerkung nach Satz 6.10, dass $(\operatorname{Kokern}(T))' \cong \operatorname{Kern}(T')$. Desweiteren gilt $T' = I - K'$, wobei K' nach Satz 6.2 kompakt ist. Mit Behaupting 1 (für T' statt T) folgt

$$\dim \operatorname{Kern}(T') < \infty \Rightarrow \dim(\operatorname{Kokern}(T))' < \infty \Rightarrow \dim \operatorname{Kokern}(T) < \infty.$$

$\boxed{\text{B4}}$

Somit ist der Satz bewiesen. □

KOROLLAR 6.14 (Satz von Atkinson). *Seien X, Y Banachräume. Dann gilt:*

$$T \text{ ist Fredholmsch} \iff T \text{ ist fast invertierbar.}$$

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Satz 6.13.
($\Leftarrow$) Sei T fast invertierbar, d.h. $K_1 := S_1T - I_X$ und $K_2 := TS_2 - I_Y$ sind kompakt für geeignete $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$. Dann gilt

$$S_1T = K_1 + I_X, \qquad TS_2 = K_2 + I_Y.$$

Nach Satz 6.13 sind S_1T und TS_2 daher Fredholmsch. Ferner gilt

$$\operatorname{Kern}(T) \subset \operatorname{Kern}(S_1T), \tag{6.7}$$

$$\operatorname{Bild}(T) \supset \operatorname{Bild}(TS_2). \tag{6.8}$$

Aus (6.8) folgt, dass

$$Y/\operatorname{Bild}(T) \subset Y/\operatorname{Bild}(TS_2). \tag{6.9}$$

Mit (6.7) und (6.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Kern}(T) &\le \dim \operatorname{Kern}(S_1T) < \infty,\\ \dim Y/\operatorname{Bild}(T) &\le \dim Y/\operatorname{Bild}(TS_2) < \infty.\end{aligned}$$

□

SATZ 6.15. *Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ die Menge der Fredholmschen Operatoren. Es gilt:*

(a) *$\mathcal{F}(X,Y)$ ist offen,*
(b) *$T \in \mathcal{F}(X,Y), K \in \mathcal{K}(X,Y) \Rightarrow T + K \in \mathcal{F}(X,Y)$.*

BEWEIS. (a) Sei $T_0 \in \mathcal{F}(X,Y)$ beliebig. Zu zeigen ist die Existenz eines $\varepsilon > 0$ so, dass $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|T - T_0\|_{X\to Y} < \varepsilon$, gilt $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Nach Satz 6.12 ist T_0 fast invertierbar, d.h. es gibt $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y,X)$ so, dass $K_1 := S_1T_0 - I_X$ und $K_2 := T_0S_2 - I_Y$ kompakt sind.

Sei $0 < \varepsilon < \min\{\|S_1\|^{-1}, \|S_2\|^{-1}\}$. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|A\| < \varepsilon$.

BEHAUPTUNG: $(I_X + S_1A)$ und $(I_Y + AS_2)$ sind stetig invertierbar.

BEWEIS: Sei $q := \|S_1A\| \le \|S_1\|\|A\| < 1$. Dann gilt

$$\|(S_1A)^k\| \le \|S_1A\|^k = q^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|(S_1A)^k\| \text{ konvergiert.}$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-S_1A)^k$. Betrachte

$$(I_X + S_1A)\sum_{k=0}^{\infty}(-S_1A)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-S_1A)^k - \sum_{k=1}^{\infty}(-S_1A)^k = I_X.$$

$\boxed{\text{B}}$

Wegen $S_1T_0 = I_X + K_1$ gilt

$$(I + S_1A)^{-1}S_1(T_0 + A) = (I + S_1A)^{-1}(S_1T_0 + S_1A) = I_X + \underbrace{(I + S_1A)^{-1}K_1}_{\text{kompakt}}.$$

Ähnlich zeigt man, dass

$$(T_0 + A)S_2(I + AS_2)^{-1} = I_Y + \underbrace{K_2(I + AS_2)^{-1}}_{\text{kompakt}}.$$

Also ist $T_0 + A$ ist fast invertierbar und somit Fredholmsch.

(b) Da T Fredholmsch, und somit fast invertierbar, ist, finden wir analog zu (a) kompakte $K_1 = S_1T - I_X$ und $K_2 = TS_2 - I_Y$. Berechne

$$S_1(T + K) = S_1T + S_1K = I + \underbrace{K_1 + S_1K}_{\text{kompakt}}$$

und

$$(T+K)S_2 = I + \underbrace{K_2 + KS_2}_{\text{kompakt}}.$$

Also ist $T+K$ fast invertierbar. $\square$

Satz 6.16. *Seien X_1, X_2, X_3 Banachräume.*

(a) *Die Abbildung* $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X_1, X_2) \to \mathbb{Z}$ *ist lokal konstant, d.h. für jedes $T_0 \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $\|T - T_0\| < \delta \Rightarrow \operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0)$.*

(b) $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T+K)$ *für alle $K \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$.*

(c) *Sind $T_1 \in \mathcal{F}(X_1, X_2), T_2 \in \mathcal{F}(X_2, X_3)$, so ist $T_2T_1 \in \mathcal{F}(X_1, X_3)$ mit $\operatorname{ind}(T_2T_1) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$.*

Zunächst eine Folgerung des Satzes:

Korollar 6.17. *Die Abbildung* $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X_1, X_2) \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *ist stetig. Insbesondere ist der Index auf Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ konstant.*

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 6.16(a). Da $\mathbb{N}$ diskret ist, ist der Index auf Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ konstant. $\square$

Gibt es abgeschlossene Teilräume $M_1, N_1 \subset X_1$ und $M_2, N_2 \subset X_2$ so, dass $X_1 = N_1 \dot{+} M_1$ und $X_2 = N_2 \dot{+} M_2$ gilt, dann lassen sich alle $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ als Blockoperatormatrizen schreiben:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathcal{L}(N_1, N_2)$, $B \in \mathcal{L}(M_1, N_2)$, $C \in \mathcal{L}(N_1, M_2)$ und $D \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$. Dass die Operatoren A, B, C, D stetig sind, folgt aus Satz 5.19.

Lemma 6.18. *Sei*

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$$

mit D stetig invertierbar. Dann ist $A - BD^{-1}C$ Fredholmsch und es gilt:

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(A - BD^{-1}C).$$

Beweis. Seien $U_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ und $U_2 \in \mathcal{L}(X_2)$ bijektiv. Dann sind U_2T und TU_1 Fredholmsch und es gilt

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(U_2T) = \operatorname{ind}(TU_1). \tag{6.10}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{N_2} & BD^{-1} \\ 0 & I_{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ D^{-1}C & I_{M_1} \end{pmatrix}.$$

Die Operatoren $\begin{pmatrix} I_{N_2} & BD^{-1} \\ 0 & I_{M_2} \end{pmatrix} : X_2 \to X_2$ und $\begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ D^{-1}C & I_{M_1} \end{pmatrix} : X_1 \to X_1$ sind stetig invertierbar:

$$\begin{pmatrix} I_{N_2} & BD^{-1} \\ 0 & I_{M_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{N_2} & -BD^{-1} \\ 0 & I_{M_2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ D^{-1}C & I_{M_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ -D^{-1}C & I_{M_1} \end{pmatrix}.$$

Daher folgt mit (6.10), dass $\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ Fredholnsch ist und:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(T) &= \operatorname{ind}\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right] \\
&= \operatorname{ind}\left[\begin{pmatrix} I_{N_2} & BD^{-1} \\ 0 & I_{M_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ D^{-1}C & I_{M_1} \end{pmatrix}\right] \\
&\overset{(6.10)}{=} \operatorname{ind}\left[\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Behauptung: $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Fredholmsch, wenn T_1 und T_2 Fredholmsch sind. Es gilt $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(T) &= \operatorname{Kern}(T_1) \dot{+} \operatorname{Kern}(T_2) &&\Rightarrow\quad \alpha(T) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2), \\
\operatorname{Kokern}(T) &= \operatorname{Kokern}(T_1) \dot{+} \operatorname{Kokern}(T_2) &&\Rightarrow\quad \beta(T) = \beta(T_1) + \beta(T_2).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Also ist $A - BD^{-1}C$ Fredholmsch und

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(A - BD^{-1}C) + \underbrace{\operatorname{ind}(D)}_{=0}.$$

$\square$

Beweis von Satz 6.16. (a) Sei $T_0 \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$ beliebig. Setze

$$N_1 := \operatorname{Kern}(T_0) \subset X_1, \qquad \text{und} \qquad M_2 := \operatorname{Bild}(T_0) \subset X_2.$$

Behauptung 1: Es gibt einen abgeschlossenen Teilraum $M_1 \subset X_1$, sowie einen endlichdimensionalen Teilraum $N_2 \subset X_2$, mit $X_1 = N_1 \dot{+} M_1$ und $X_2 = N_2 \dot{+} M_2$.

Beweis: Hierzu siehe den Beweis von Satz 6.12. $\boxed{\text{B1}}$

Wir schreiben T_0 als Blockoperatormatrix:

$$T_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

Da $M_1 \cap \operatorname{Kern}(T_0) = \{0\}$ und $M_2 = \operatorname{Bild}(T_0)$ ist $D_0 : M_1 \to M_2$ bijektiv und stetig, also stetig invertierbar.

Behauptung 2: Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass jeder Operator $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ mit $\|T - T_0\| < \delta$ Fredholmsch ist und in der Blockmatrix-Darstellung $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ der Blockoperator D stetig invertierbar ist.

BEWEIS: Sei δ_1 so klein, dass jedes T mit $\|T - T_0\| < \delta_1$ Fredholmsch ist (siehe Satz 6.15 (a)). Es gilt

$$\begin{aligned}
\|D - D_0\| &= \sup_{\substack{x \in M_1 \\ \|x\|=1}} \|(D - D_0)x\|_{X_2} \\
&\leq \sup_{\substack{x \in M_1 \\ \|x\|=1}} \left(\|(D - D_0)x\|_{X_2} + \|(B - B_0)x\|_{X_2}\right) \\
&\overset{\text{Satz 5.19(a)}}{\leq} C \sup_{\substack{x \in M_1 \\ \|x\|=1}} \|(T - T_0)x\|_{X_2} \leq C\|T - T_0\|.
\end{aligned}$$

Setze nun $\delta := \min\{\delta_1, C^{-1}\|D_0^{-1}\|^{-1}\}$. Also gilt für $\|T - T_0\| < \delta$:

$$\begin{aligned}
&\|D - D_0\| \leq C\|T - T_0\| < \|D_0^{-1}\|^{-1} \\
&\qquad \Rightarrow \|D_0^{-1}(D - D_0)\| \leq \|D_0^{-1}\|\|D - D_0\| < 1.
\end{aligned}$$

Somit folgt aus

$$D = D_0 + (D - D_0) = D_0\left[I + D_0^{-1}(D - D_0)\right],$$

dass

$$D^{-1} = \left[I + D_0^{-1}(D - D_0)\right]^{-1} D_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-D_0^{-1}(D - D_0))^k \cdot D_0^{-1}.$$

Somit ist D stetig invertierbar. B2

Nach Lemma 6.18 gilt nun $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(A - BD^{-1}C)$ und $\operatorname{ind}(T_0) = \operatorname{ind}(A_0 - B_0D_0^{-1}C_0)$. Dabei ist $A - BD^{-1}C : N_1 \to N_2$ mit $\dim N_1 < \infty$ und $\dim N_2 < \infty$.

Sei $S : N_1 \to N_2$ beliebig. Nach dem Dimensionssatz aus der Linearen Algebra gilt:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(S) &= \dim N_1 - \operatorname{Rang}(S) \\
\beta(S) &= \dim N_2 - \operatorname{Rang}(S)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{ind}(S) = \dim N_1 - \dim N_2.$$

Also ist

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(A - BD^{-1}C) = \dim N_1 - \dim N_2 = \operatorname{ind}(A_0 - B_0D_0^{-1}C_0) = \operatorname{ind}(T_0).$$

(b) Sei $\varphi(t) := \operatorname{ind}(T + tK)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist φ lokal konstant, also konstant auf $\mathbb{R}$. Folglich gilt $\varphi(0) = \varphi(1)$ und damit $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T + K)$.

(c) Die Abbildung $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} : X_1 \dotplus X_2 \to X_2 \dotplus X_3$ ist Fredholmsch mit Index $\operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$. Für hinreichend kleines ε ist auch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} T_1 & \varepsilon I_{X_2} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} : X_1 \dotplus X_2 \to X_2 \dotplus X_3$$

Fredholmsch mit dem gleichen Index $\operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$.

BEHAUPTUNG 3: Die Abblidungen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} I_{X_2} & 0 \\ T_2 & -\varepsilon I_{X_3} \end{pmatrix} : X_2 \dotplus X_3 \to X_2 \dotplus X_3$$

und
$$\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -\varepsilon^{-1}T_1 & I_{X_2} \end{pmatrix} : X_1 \dotplus X_2 \to X_1 \dotplus X_2$$
sind Bijektionen.

Beweis:
$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_{X_2} & 0 \\ T_2 & -\varepsilon I_{X_3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon I_{X_2} & 0 \\ T_2 & -\varepsilon^{-1}I_{X_3} \end{pmatrix}$$
und
$$\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -\varepsilon^{-1}T_1 & I_{X_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ \varepsilon^{-1}T_1 & I_{X_2} \end{pmatrix}.$$

B3

Somit folgt, dass die Abblidung
$$\widetilde{T} : X_1 \dotplus X_2 \to X_2 \dotplus X_3$$
definiert als
$$\widetilde{T} := \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_{X_2} & 0 \\ T_2 & -\varepsilon I_{X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & \varepsilon I_{X_2} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -\varepsilon^{-1}T_1 & I_{X_2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_{X_2} & 0 \\ T_2 & -\varepsilon I_{X_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_{X_2} \\ -\varepsilon^{-1}T_2T_1 & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{X_2} \\ T_2T_1 & 0 \end{pmatrix}$$
Fredholmsch ist und es gilt
$$\operatorname{ind}(\widetilde{T}) = \operatorname{ind}\begin{pmatrix} T_1 & \varepsilon I_{X_2} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \operatorname{ind}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2).$$
Weiterhin gilt:
$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(\widetilde{T}) &= \{(x_2, x_1) \mid x_2 \in \operatorname{Kern}(T_2T_1),\ x_1 = 0\}, \\ \operatorname{Bild}(\widetilde{T}) &= \{(x_3, x_2) \mid x_3 \in \operatorname{Bild}(T_2T_1),\ x_2 \in X_2\}, \\ \operatorname{Kokern}(\widetilde{T}) &= (X_3 \dotplus X_2)/\operatorname{Bild}(\widetilde{T}) \cong X_3/\operatorname{Bild}(T_2T_1) \\ &= \operatorname{Kokern}(T_2T_1). \end{aligned}$$
Also ist $\operatorname{ind}(\widetilde{T}) = \operatorname{ind}(T_2T_1)$. □

6.3. Die Fredholmsche Alternative

Satz 6.19. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ Fredholmsch mit $\operatorname{ind}(T) = 0$. Betrachte die Gleichungen*

(1) $Tx = y \quad x \in X, y \in Y,$
(2) $Tx = 0 \quad x \in X,$
(3) $T'y' = x' \quad y' \in Y', x' \in X',$
(4) $T'y' = 0 \quad y' \in Y'.$

Dann gilt entweder

(a) *(2) und (4) haben nur die trivialen Lösungen $x = 0, y' = 0$; (1) und (3) sind eindeutig lösbar für alle $y \in Y$, $x' \in X'$.*

oder

(b) *(2) und (4) haben endlichdimensionale Lösungsräume $L_1 \subset X$ und $L_2 \subset Y'$, mit $\dim L_1 = \dim L_2$. (1) ist genau dann lösbar, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in L_2$. (3) ist genau dann lösbar, wenn $x'(x) = 0$ für alle $x \in L_1$. Falls existieren sind diese Lösungen nicht eindeutig. Die Dimension der Lösungsräume von (1) und (3) ist gleich $\dim L_1 = \dim L_2$.*

Bemerkungen. *(1) Unter Voraussetzung, dass $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen ist, besagt Korollar 5.14, dass Gleichung (1) genau dann lösbar ist, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in \mathrm{Kern}(T')$ gilt.*

(2) Sind X, Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ Fredholmsch mit $\mathrm{ind}(T) = 0$, so nimmt die Fredholmsche Alternative folgende Gestalt an:

Betrachte die Gleichungen

(1) $Tx = y \quad x \in X, y \in Y,$
(2) $Tx = 0 \quad x \in X,$
(3) $T^*\widetilde{y} = \widetilde{x} \quad \widetilde{y} \in Y, \widetilde{x} \in X$
(4) $T^*\widetilde{y} = 0 \quad \widetilde{y} \in Y.$

Dann gilt enweder

(a) *(2) und (4) haben nur die trivialen Lösungen $x = 0$, $\widetilde{y} = 0$; (1) und (3) sind eindeutig lösbar für alle $y \in Y$, $\widetilde{x} \in X$.*

oder

(b) *(2) und (4) haben endlichdimensionale Lösungsräume $L_1 \subset X$ und $L_2 \subset Y$, mit $\dim L_1 = \dim L_2$. (1) ist genau dann lösbar, wenn $\langle \widetilde{y}, y \rangle = 0$ für alle $\widetilde{y} \in L_2 \subset Y$. (3) ist genau dann lösbar, wenn $\langle \widetilde{x}, x \rangle = 0$ für alle $\widetilde{x} \in L_1 \subset X$.*

Beweis. Es gilt entweder

(a) $\alpha(T) = \beta(T) = 0$

oder

(b) $\alpha(T) = \beta(T) \neq 0$

Gilt (a), so ist $\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(T) = Y$. Mit Satz 6.10 folgt, dass $\alpha(T') = \beta(T) = \alpha(T) = \beta(T') = 0$; also $\mathrm{Kern}(T') = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(T') = X'$.

Gilt (b), so ist $\alpha(T') = \beta(T) = \alpha(T) = \beta(T') < \infty$. Folglich $\dim \underbrace{\mathrm{Kern}(T)}_{L_1} = \dim \underbrace{\mathrm{Kern}(T')}_{L_2} < \infty$. Satz 5.33 besagt nun, dass

$$\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T')_\perp = \{ y \in Y \mid y'(y) = 0 \, \forall y' \in \mathrm{Kern}(T') \}$$

und

$$\mathrm{Bild}(T') = \mathrm{Kern}(T)^\perp = \{ x' \in X' \mid x'(x) = 0 \, \forall x \in \mathrm{Kern}(T) \}$$

□

Beispiel. *Der Operator*

$$K : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \; (Kf)(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s,t) f(t) \, dt \quad k \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

ist nach Proposition 6.1 kompakt. Es gilt

$$(K^*f)(s) = \int_{\mathbb{R}} \overline{k(t,s)} f(t)\, dt.$$

Betrachte

$$(*) \qquad f(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s,t) f(t)\, dt + g(s) \quad g \in L^2(\mathbb{R}),$$

eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art.
Es gilt entweder

(a) $\int_{\mathbb{R}} \overline{k(t,s)} f(t)\, dt = 0 \Rightarrow f = 0$ *und* $(*)$ *ist eindeutig lösbar für alle* $g \in L^2(\mathbb{R})$.

oder

(b) $\int_{\mathbb{R}} \overline{k(t,s)} f(t)\, dt = 0$ *besitzt* $n < \infty$ *linear unabhängige Lösungen* $\{f_1, \dots, f_n\}$ *und* $(*)$ *ist lösbar, wenn* $\langle f_i, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ *für alle* $i = 1, \dots, n$.

Beispiel. *Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die Neumannsche Randwertaufgabe für die Poisson-Gleichung. Sei* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^1*-Rand. Betrachte*

$$(6.11) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega).$$

Wir brauchen einen wichtigen Funktionenraum, den Sobolevraum $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$*:*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,|\, \text{schwache Ableitungen existieren und } \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

- u *heißt schwach differenzierbar bzgl.* x_i*, falls eine lokal integrierbare Funktion* v *existiert, sodass*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v(x) \varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir interessieren uns an der schwachen *Lösung der Randwertaufgabe. Um diese zu definieren, betrachten wir zunächst die klassische Aufgabenstellung mit* $f \in C^\infty(\Omega)$*. Für beliebiges* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *gilt*

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \varphi(x) \Delta u(x)\, dx &= \int_\Omega \langle \operatorname{grad} \varphi(x), \operatorname{grad} u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx - \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)}\, d\sigma(x) \\ &= \int_\Omega \langle \operatorname{grad} \varphi(x), \operatorname{grad} u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx = \int_\Omega \varphi(x) f(x)\, dx. \end{aligned}$$

$C^\infty(\Omega)$ *liegt dicht in* $H^1(\Omega)$*. Somit kommen wir zu folgender Definition der schwachen Lösung:*

- $u \in H^1(\Omega)$ *heißt die schwache Lösung der Randwertaufgabe, falls*

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} \varphi(x), \operatorname{grad} u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx = \int_\Omega \varphi(x) f(x)\, dx$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ *gilt.*

$H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \partial_j u(x)\partial_j v(x)\,dx \\ \Longrightarrow H^1(\Omega)' &\cong H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Fredholmschen Alternative zeigen wir nun die folgende Aussage: Die Randwertaufgabe (6.11) besitzt genau dann eine schwache Lösung, wenn

$$\int_\Omega f(x)dx = 0.$$

Diese Lösung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Sei $J : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$ isometrtischer Isomorphismus, $(Ju)(v) = \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)}$ (Riesz). Betrachte die Abbildungen

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{E} L^2(\Omega) \xrightarrow{F} H^1(\Omega)',$$

wobei

$$\begin{aligned} Eu &= u \ \ \textit{(Einbettung)}, \\ Fu &= \langle u, \cdot\rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Behauptung 1: *F ist linear und stetig.*

Beweis. *Seien $u \in L^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ beliebig. Dann gilt*

$$|(Fu)(v)| = |\langle v, u\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\boxed{B1}$

Behauptung 2: *Die Einbettung E ist kompakt.*

Diese Behauptung ist der Sobolevsche Einbettungssatz. Deren Beweis wird in der Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ ausführlich ausgearbeitet.

Behauptung 2: *Für $T := J - FE : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$ gilt:*

$$(Tu)(v) = \int_{(\Omega)} \langle \operatorname{grad} u(x) \operatorname{grad} v(x)\rangle dx \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (Tu)(v) &= (Ju)(v) - (FE)(v) \\ &= \langle v, u\rangle_{H^1(\Omega)} - \langle v, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \langle \operatorname{grad} u(x) \operatorname{grad} v(x)\rangle dx \end{aligned}$$

$\boxed{B3}$

Betrachte die Gleichung:

$$\begin{aligned} Tu = Ff, f \in L^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (Tu)(v) = Ff(v)\ \forall\, v \in H^1(\Omega) \\ &\overset{\text{Beh.3}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_{(\Omega)} \operatorname{grad} u(x) \operatorname{grad} v(x)\,dx = \int_{(\Omega)} f(x)v(x)\,dx\ \forall\, v \in H^1(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \textit{ ist die schwache Lösung der Randwertaufgabe.} \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir die Existenz der Lösungen zur Gleichung $Tu = f \Leftrightarrow J^{-1}Tu = J^{-1}Ff$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\Big(I_H{}^1(\Omega) - \underbrace{J^{-1}FE}_{\text{kompakt}}\Big)u}_{\textit{Fredholmsch vom Index Null}} \quad = J^{-1}Ff.$$

Zunächst untersuchen wir den Kern des Fredholmschen Operators:

$$\begin{aligned} J^{-1}FEu = u \Leftrightarrow FEu &= Ju \\ &\Leftrightarrow (FEu)(v) = (Ju)(v)\ \forall\, v \in H^1(\Omega) \\ &\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} \\ &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{L^2(\Omega)}\ \forall\, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Speziell für $v = u$ *erhalten wir* $\|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)^n} = 0$, *d.h.* $\operatorname{grad} u = 0$ *fast überall. Man kann zeigen, dass in diesem Fall* u *fast überall konstant ist. Also ist der Kern eindimensional. Somit ist der Kern des adjungierten Operators*

$$I_{H^1(\Omega)'} - E'F'(J^{-1})' : H_1(\Omega)' \to H_1(\Omega)'.$$

ebenfalls eindimensional.

Behauptung 4: $u = E'F'(J^{-1})'u \Leftrightarrow u = J'c$ *mit* $c \in H^1(\Omega)''$, $c(v) := v(s)$ *für alle* $v \in H_1(\Omega)'$. *Hier bezeichnet* s *die konstante Funktion auf* Ω *mit dem Wert* $s \in \mathbb{R}$.

Beweis. *Es genügt zu zeigen, dass*

$$E'F'(J^{-1})'J'c = J'c.$$

Offenbar gilt

$$(J^{-1})'J' = (JJ^{-1})' = \mathrm{id} : H^1(\Omega)'' \to H^1(\Omega)''.$$

Also ist $(J^{-1})'J'c = c$. *Betrachte nun für* $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} (E'F'c)(v) &= c(FEv) = (FEv)(s) = \langle v, s\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle v, s\rangle_{H^1(\Omega)} = (Jv)(s) = c(Jv) = (J'c)(v). \end{aligned}$$

$\boxed{B4}$

Nach der Fredhomschen Alternative ist die Gleichung

$$\Big(I_{H^1(\Omega)} - J^{-1}FE\Big)\, u \;=\; J^{-1}Ff$$

genau dann lösbar, wenn

$$0 = J'c(J^{-1}Ff) = c(JJ^{-1}Ff) = c(Ff) = (Ff)(s) = s\int_\Omega f(x)\,dx.$$

6.4. Das Spektrum kompakter Operatoren

SATZ 6.20. *Sei X ein Banchraum und $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt:*

(a) *Ist* $\dim X = \infty$, *so ist* $0 \in \sigma(T)$.
(b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *ist höchstens abzählbar.* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *besitzt keinen Häufungspunkt.*
(c) *Jedes* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *ist ein Eigenwert von T mit* $\dim \operatorname{Kern}(T - \lambda) < \infty$.

BEWEIS. (a) Angenommen $0 \in \rho(T)$. Dann wäre T^{-1} beschränkt und daher $I = TT^{-1}$ kompakt (nach Satz I.1.38 (b)). Dann ist $\dim X < \infty$. Widerspruch!

(c) Sei $\lambda \neq 0$ beliebig. Betrachte

$$T - \lambda = -\lambda \underbrace{\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)}_{\text{Fredholmsch mit Index 0}} \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{Kern}(T - \lambda) < \infty.$$

Ist $\operatorname{Kern}(T - \lambda) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Kokern}(T - \lambda) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Bild}(T - \lambda) = X \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Ist $\operatorname{Kern}(T - \lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$ mit $\dim \operatorname{Kern}(T - \lambda) < \infty$.

(b) Zu zeigen ist, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > \varepsilon\}$ endlich ist. Angenommen es existieren ein $\varepsilon > 0$, sowie Folgen $(\lambda_n) \subset \mathbb{K}$ und $(x_n) \subset X \setminus \{0\}$, mit $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $m \neq n$, $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ und $Tx_n = \lambda_n x_n$.

BEHAUPTUNG 1: $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig.

BEWEIS. Angenommen es existieren $N \in \mathbb{N}$ linear unabhängige $x_1, \ldots, x_N$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ so, dass $x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$. Dann ist enerseits

$$\Rightarrow Tx_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i x_i$$

und andererseits

$$Tx_{N+1} = \lambda_{N+1} x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_{N+1} x_i.$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{N+1}) x_i = 0.$$

Da nicht alle α_i Null sind, ist $\lambda_{N+1} = \lambda_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, N\}$. Ein Widerspruch! $\boxed{\text{B1}}$

Wir definieren $E_n := \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3 \subsetneq \cdots$ und $T(E_n) \subset E_n$.

BEHAUPTUNG 2: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} x_i \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $d(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$.

BEWEIS. Sei $y \in E_n \setminus E_{n-1}$ beliebig. Der Vektorraum E_{n-1} ist abgeschlossen, also gilt $d := d(y, E_{n-1}) > 0$.

Sei $\varepsilon \in (0, 1/2)$ beliebig. Dann existiert ein $x_\varepsilon \in E_{n-1}$ mit $\|y - x_\varepsilon\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$. Setze $y_n := \frac{y - x_\varepsilon}{\|y - x_\varepsilon\|} \Rightarrow \|y_n\| = 1$. Sei $x \in E_{n-1}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|y_n - x\| &= \left\| \frac{y}{\|y - x_\varepsilon\|} - \frac{x_\varepsilon}{\|y - x_\varepsilon\|} - x \right\| \\ &= \frac{1}{\|y - x_\varepsilon\|} \|y - \underbrace{(x_\varepsilon + \|y - x_\varepsilon\| x)}_{\in E_{n-1}}\| \geq \frac{d}{\|y - x_\varepsilon\|} > 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $d(y_n, E_{n-1}) \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}$. B2

Für $n > m$ betrachte:

$$(*) \qquad \|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - (Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n)\|$$

Es gilt $\lambda_n y_n \in E_n$ und $Ty_m \in E_m \subset E_{n-1}$. Desweiteren gilt

$$\lambda_n y_n - Ty_n = \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} x_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(n)} (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in E_{n-1}.$$

Also gilt $(Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n) \in E_{n-1}$ und weiter:

$$(*) \geq d(\lambda_n y_n, E_{n-1}) = |\lambda_n| d(y_n, E_{n-1}) > \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|Ty_n - Ty_m\| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich existiert keine Teilfolge (y_{n_k}) von (y_n) so, dass (Ty_{n_k}) konvergiert. Da T kompakt ist und (y_n) beschränkt, ist dies ein Widerspruch! □

SATZ 6.21. *Sei X ein Hilbertraum, sowie $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt:*

(a) *Ist $T = T^*$ kompakt, so ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,*
(b) *Ist T normal und x ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist x auch ein Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$,*
(c) *Ist T normal, so haben verschiede Eigenwerte orthogonale Eigenvektoren.*

BEMERKUNG. *(a) gilt für alle selbstadjungierten $T \in \mathcal{L}(X)$.*

BEWEIS. (a) Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} \overset{\text{Satz 6.20(c)}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in X \colon Tx = \lambda x,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda \langle x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

(b) BEHAUPTUNG: Sei S normal. Dann gilt $\mathrm{Kern}(S) = \mathrm{Kern}(S^*)$.

BEWEIS:

$$0 = \langle x, (S^*S - SS^*)x \rangle = \langle Sx, Sx \rangle - \langle S^*x, S^*x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Sx, Sx \rangle = \langle S^*x, S^*x \rangle.$$

Sei $x \in \mathrm{Kern}(S)$. Dann gilt $\|S^*x\|^2 = 0$, also $x \in \mathrm{Kern}(S^*)$. Umgekehrt gilt dasselbe. B1

Setze $S = T - \lambda$. Dann folgt $\mathrm{Kern}(T - \lambda) = \mathrm{Kern}(T^* - \overline{\lambda})$.

(c) Sei $Tx = \lambda x$ und $Ty = \mu y$, $\mu \neq \lambda$.

$$\Rightarrow \mu\langle x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle T^* x, y\rangle \overset{(b)}{=} \lambda\langle x, y\rangle$$
$$\Rightarrow (\mu - \lambda)\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

□

Satz 6.22 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren). *Sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(X)$ normal (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. selbstadjungiert (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dann existiert ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $\{e_i \mid i \in I\}$, $I \subset N$ und eine Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, falls $|I| = \infty$ so, dass*

$$X = \operatorname{Kern}(T) \oplus \overline{\operatorname{lin}\{e_i \mid i \in I\}}$$

und

$$Tx = \sum_{k\in I} \lambda_k \langle e_k, x\rangle e_k \ \forall x \in X.$$

Ferner gilt $\|T\| = \sup_{k\in I} |\lambda_k|$.

Bemerkung. *e_k ist ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ_k.*

Lemma 6.23. *Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert, so gilt $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle x, Tx\rangle|$.*

Beweis. „$\geq$“ Für $\|x\| \leq 1$ gilt

$$|\langle x, Tx\rangle| \leq \|TX\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2 \leq \|T\|.$$

„$\leq$“ Sei $M := \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle x, Tx\rangle|$. Betrachte

$$\begin{aligned}\langle x + y, T(x + y)\rangle - \langle x - y, T(x - y)\rangle &= 2\langle y, Tx\rangle + 2\langle x, Ty\rangle \\ &= 2\langle y, Tx\rangle + 2\overline{\langle y, Tx\rangle} \\ &= 4\operatorname{Re}\langle y, Tx\rangle.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}4\operatorname{Re}\langle y, Tx\rangle &= \frac{\langle x + y, T(x + y)\rangle}{\|x + y\|^2}\|x + y\|^2 - \frac{\langle x - y, T(x - y)\rangle}{\|x - y\|^2}\|x - y\|^2 \\ &\leq M\|x + y\|^2 + M\|x - y\|^2 = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2),\end{aligned}$$

wobei die lezte Gleichheit aus der Parallelogrammidentität (Satz I.4.7) folgt. Also ist

$$\operatorname{Re}\langle y, Tx\rangle \leq M$$

für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$. Nun sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, so, dass $\langle y, Tx\rangle = \lambda|\langle y, Tx\rangle|$. Somit ist

$$|\langle y, Tx\rangle| = \frac{1}{\lambda}\langle y, Tx\rangle = \langle\overline{\lambda^{-1}}y, Tx\rangle = \operatorname{Re}\langle\overline{\lambda^{-1}}y, Tx\rangle \leq M$$

für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$. Folglich gilt

$$\|T\| = \sup_{\|y\|\leq 1}\ \sup_{\|x\| leq 1} |\langle y, Tx\rangle| \leq M.$$

□

LEMMA 6.24. *Ist $T \in \mathcal{K}(X)$ selbstadjungiert, so ist $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert von T.*

BEWEIS. Nach Lemma 6.23 existiert eine Folge (x_n) in $B_1(0)$ mit $|\langle x_n, Tx_n\rangle| \to \|T\|$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), sodass Tx_{n_k} konvergiert. Sei $y := \lim\limits_{k\to\infty} Tx_{n_k}$. Es gibt eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}}) =: z_l$, sodass $\langle z_l, Tz_l\rangle \to \lambda$ mit $\lambda = \|T\|$ oder $\lambda = -\|T\|$. Nun betrachte

$$\begin{aligned}
\|Tz_l - \lambda z_l\|^2 &= \langle Tz_l - \lambda z_l, Tz_l - \lambda z_l\rangle \\
&= \|Tz_l\|^2 - 2\lambda\langle z_l, Tz_l\rangle + \lambda^2\|z_l\|^2 \\
&\le \underbrace{\|T\|^2}_{=\lambda^2}\underbrace{\|z_l\|^2}_{\le 1} - 2\lambda\langle z_l, Tz_l\rangle + \lambda^2\underbrace{\|z_l\|^2}_{\le 1} \\
&\le 2\lambda^2 - 2\lambda\langle z_l, Tz_l\rangle \to 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $Tz_l - \lambda z_l \to 0$. Da die Folge (Tz_l) gegen y konvergiert, gilt $y = \lim\limits_{l\to\infty} \lambda z_l$. Für $x := \lim\limits_{l\to\infty} z_l$ folgt dann $Tx = lambdax$. □

BEWEIS VON SATZ 6.22. Es genügt den Fall $I = \mathbb{N}$ zu betrachten. Seien $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ paarweise verschiedene Eigenwerte von T, mit $\mu_i \neq 0$ für alle i. Zu jedem μ_i setze $m_i = \dim \operatorname{Kern}(T - \mu_i)$.

Sei

$$(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m_1-\text{mal}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m_2-\text{mal}}, \dots).$$

Nach Satz 6.20(b) ist (μ_i) eine Nullfolge, also auch (λ_k). Wähle nun in jedem Eigenraum $\operatorname{Kern}(T - \mu_i)$ eine Orthonormalbasis $\{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$ und konstruiere damit die Folge $(e_k) := (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2, \dots)$. Es gilt $Te_k = \lambda_k e_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Desweiteren ist $\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem, nach Satz 6.21(c).

BEHAUPTUNG 1: $e_k \perp \operatorname{Kern}(T)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: Sei $x \in \operatorname{Kern}(T)$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}
\lambda_k\langle x, e_k\rangle &= \langle x, \lambda_k e_k\rangle = \langle x, Te_k\rangle \\
&= \langle T^*x, e_k\rangle \overset{\operatorname{Kern}(T^*)=\operatorname{Kern}(T)}{=} 0.
\end{aligned}$$

B1

Wir definieren $X_1 := \operatorname{Kern}(T) \oplus \overline{\operatorname{lin}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}}$ und $X_2 := X_1^\perp$. Nun zeigen wir, dass $X_2 = \{0\}$ ist.

BEHAUPTUNG 2: $X_2 = \operatorname{Kern}(T)^\perp \cap \left(\overline{\operatorname{lin}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}}\right)^\perp$ (Beweis selbst).

BEHAUPTUNG 3: $T(X_2) \subset X_2$.

BEWEIS. Sei $y \in \left(\overline{\operatorname{lin}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}}\right)^\perp$ beliebig. Dann ist $\langle y, e_k\rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\langle Ty, e_k\rangle = \langle y, T^*e_k\rangle = \langle y, \overline{\lambda_k}e_k\rangle = \overline{\lambda_k}\langle y, e_k\rangle = 0.$$

Mit Behauptung 2 gilt somit

$$T(X_2) \subset \left(\overline{\operatorname{lin}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}} \right)^{\perp}.$$

Sei nun $y \in \operatorname{Kern}(T)^{\perp}$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \operatorname{Kern}(T)$

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, \underbrace{T^* x}_{=0} \rangle = 0$$

Somit ist

$$T(X_2) \subset \operatorname{Kern}(T)^{\perp}.$$

$\boxed{\text{B3}}$

Mit Behauptung 3 können wir die Einschränkung $T_2 := T|_{X_2} : X_2 \to X_2$ definieren. Offenbar ist T_2 kompakt.

Behauptung 4: $T_2 = 0$.

Beweis. Angenommen $T_2 \neq 0$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\sigma(T_2) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so ist nach Lemma 6.24 ebenfalls $\sigma(T_2) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und ein $x \in X_2 \setminus \{0\}$ mit $T_2 x = \lambda x$ und somit auch $Tx = \lambda x$. Folglich gilt $x \in \operatorname{lin}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, d.h. $x \in X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Ein Widerspruch! $\boxed{\text{B4}}$

Aus Behauptung 4 folgt, dass $X_2 \subset \operatorname{Kern}(T) \subset X_1 = X_2^{\perp}$ und daher $X_2 = \{0\}$, d.h. $X_1 = X$.

Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt $x = y + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle e_k$ mit $y \in \operatorname{Kern}(T)$ und somit

$$Tx = Ty + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle T e_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle \lambda_k e_k.$$

Es ist nun zu zeigen, dass $\|T\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$. Aus Satz 6.21 (c) folgt mit dem Satz von Pythagoras, dass

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, x \rangle \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle e_k, x \rangle|^2 |\lambda_k|^2.$$

Nach der Besselschen Ungleichung (Satz I.4.25) gilt somit

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 |\lambda_k|^2 \\ &\leq \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 \\ &\leq \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Also ist $\|T\| \leq \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$. O.B.d.A. sei $|\lambda_1| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$. Dann ist $\|Te_1\|^2 = |\lambda_1|^2$, d.h. $\|T\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$. $\square$

Sei E_k die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Kern}(T - \mu_k)$, d.h.

$$E_k x = \sum_{j=1}^{m_k} \langle e_j^k, x \rangle e_j^k,$$

wobei e_j^k eine Orthonormalbasis in $\mathrm{Kern}(T - \mu_k)$ ist. Es gilt $\mathrm{Bild}(E_k) = \mathrm{Kern}(T - \mu_k)$. Nach Satz 6.22 ist

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k x$$

für alle $x \in X$.

Satz 6.25 (Spektralsatz, Projektionsversion). *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.22 konvergiert die Reihe*

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k$$

bezüglich der Operatornorm.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \left(T - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k \right) x \right\| &= \left\| Tx - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k x \right\| \\ &\overset{\text{Satz}6.22}{=} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k x - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k x \right\| = \left\| \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_k E_k \right) x \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_k E_k \right\| \|x\| \end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mu_k E_k$ kompakt ist, gilt nach Satz 6.22, dass

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_k E_k \right\| = \sup_{K \geq N+1} |\mu_k|.$$

Also folgt

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k \right\| \leq \sup_{k \geq N+1} |\mu_k| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

□

Der Spektralsatz kann benutzt werden, um Quadratwurzeln aus Operatoren zu ziehen.

Definition 6.26. *Sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt* positiv, *in Zeichen $T \geq 0$, wenn $\langle x, Tx \rangle \geq 0$ für alle $x \in X$ gilt.*

Bemerkung. *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist ein positiver Operator selbstadjungiert, denn*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \langle x, Tx \rangle &= \langle T^* x, x \rangle = \overline{\langle x, T^* x \rangle} = \langle x, T^* x \rangle \\ \overset{\text{Polarisierung}}{\Longrightarrow} &\quad \langle x, Ty \rangle = \langle x, T^* y \rangle \ \forall\, x, y \in X. \end{aligned}$$

SATZ 6.27. *Sei X ein Hilbertraum. Sei $T \in \mathcal{K}(X)$ selbstadjungiert und positiv. Dann existiert genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(X)$ mit $S^2 = T$. Man schreibt $S = T^{1/2}$.*

BEMERKUNG. *Der Satz gilt für alle $T \in \mathcal{L}(X)$.*

BEWEIS. Nach Spektralsatz gilt

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle e_k, x\rangle e_k \Longrightarrow \langle x, Tx\rangle = \sum_k \lambda_k |\langle e_k, x\rangle|^2 \overset{T\geq 0}{\Longrightarrow} \lambda_k \geq 0.$$

Setze

$$Sx := \sum_k \sqrt{\lambda_k}\langle e_k, x\rangle e_k \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Der Operator S ist offenbar selbstadjungiert und positiv.

$$\left\| Sx - \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k}\langle e_k, x\rangle e_k \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\langle e_k, x\rangle e_k \right\|$$
$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} |\langle e_k, x\rangle| \leq \sup_{k\geq N+1} \sqrt{\lambda_k} \cdot \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle|}_{\leq \|x\| (\text{Bessel})}$$

Folglich gilt

$$\left\| S - \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k}\langle e_k, \cdot\rangle e_k \right\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und nach Korollar I.1.40 ist S kompakt.

Zur Eindeutigkeit: Sei $R \geq 0$, $R^2 = T$, $R = R^* \in \mathcal{K}(X)$. Nach dem Spektralsatz gilt $R = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k F_k$ für gewiße Zahlen ν_k und ortogonale Projektionen F_k. Betrachte

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k F_k \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j F_j \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \nu_k \nu_j \underbrace{F_k F_j}_{=\delta_{kj} F_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2 F_k = T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k. \end{aligned}$$

Also ist $\nu_k^2 = \mu_k$ und $E_k = F_k$. □

Seien nun X_1, X_2 Hilberträume, $T \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$. Betrachte $T^*T \in \mathcal{K}(X_1)$. Der Operator T^*T ist positiv, denn

$$\langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

Daher ist $(T^*T)^{1/2}$ definiert.

DEFINITION 6.28. *Der Operator $|T| := (T^*T)^{1/2}$ heißt der Betrag von T.*

DEFINITION 6.29. *Seien X_1, X_2 Hilberträume. Ein $U \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ heißt* partielle Isometrie *falls*

$$U|_{\mathrm{Kern}(U)^\perp} : \mathrm{Kern}(U)^\perp \to X_2$$

isometrisch ist. Der Teilraum $\mathrm{Kern}(U)^\perp$ *heißt der* Anfangsraum *von U,* $\mathrm{Bild}(U)$ *heißt der* Endraum. *Insbesondere sind Isometrien und Koisometrien partielle Isometrien.*

SATZ 6.30. *Sei $T \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$. Dann gibt es genau eine partielle Isometrie $U \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ mit* $\mathrm{Kern}(U) = \mathrm{Kern}(T)$ *so, dass die Polarzerlegung $T = U|T|$ gilt.*

BEWEIS. Zu jedem $x \in X_1$ setze $\widetilde{U}(|T|x) := Tx$.

$$(*) \quad \| \, |T|x \, \|^2 = \langle |T|x, |T|x \rangle = \langle x, |T|^2 x \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2$$

Somit ist $\widetilde{U} : \mathrm{Bild}(|T|) \to \mathrm{Bild}(T)$ isometrisch.

Sei $\widehat{U} : \overline{\mathrm{Bild}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Bild}(T)}$ die eindeutige stetige Fortsetzung von $\widetilde{U}$. Setze $Ux = 0$ für alle

$$x \in \mathrm{Bild}(|T|)^\perp = \mathrm{Kern}(|T|) \overset{(*)}{=} \mathrm{Kern}(T)$$

und $Ux = \widehat{U}x$ für alle $x \in \overline{\mathrm{Bild}(T)}$. □

BEMERKUNG. *Aus $(*)$ folgt, dass $\| \, |T| \, \| = \|T\|$.*

SATZ 6.31. *Seien X_1, X_2 Hilberträume, $T \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$. Dann existieren (gleichmächtige) Orthonormalsysteme $\{e_1, e_2, \dots\}$ von X_1 und $\{f_1, f_2, \dots\}$ von X_2 sowie Zahlen $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq 0$ mit $s_k \to 0$, sodass*

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle e_k, x \rangle f_k \quad \text{für alle} \quad x \in X_1.$$

Die Zahlen s_k^2 sind die in ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T^*T, s_k heißen die singulären Zahlen *von T.*

BEWEIS.

$$\left.\begin{array}{l} T = U|T| \\ |T|x = \sum_k s_k \langle e_k, x \rangle e_k \end{array}\right\} \Longrightarrow Tx = \sum_k s_k \langle e_k, x \rangle \underbrace{Ue_k}_{:= f_k}$$

$$\langle f_k, f_j \rangle = \langle Ue_k, Ue_j \rangle = \langle e_k, U^*Ue_j \rangle$$

$$U|_{\mathrm{Kern}(T)^\perp} : \mathrm{Kern}(T)^\perp \to X_2 \text{ Isometrie } \overset{V*V=\mathrm{id}}{\Longrightarrow} U^*Ue_j = e_j.$$

□

KOROLLAR 6.32. *Die Operatoren mit endlichdimensionalem Bild liegen dicht in $\mathcal{K}(X_1, X_2)$.*

6.5. Ideale kompakter Operatoren

DEFINITION 6.33. *Sei X ein Hilbertraum, $1 \leq p < \infty$. Die Menge kompakter Operatoren mit*

$$\|T\|_p := \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} s_j(T)^p \right)^{1/p} < \infty$$

heißt die p-te Schatten-von Neumann-Klasse *und wird mit* $\mathfrak{S}_p(X)$ *bezeichnet. Hier bezeichnen* $s_j(T)$ *die singulären Zahlen des Operators* T.

Einige Eigenschaften der singulären Zahlen:

(1) Für jedes $c \in \mathbb{K}$ ist $s_j(cT) = |c| s_j(T)$, denn $(cT)^* cT = |c|^2 T^* T$.

(2) Ist T normal, so gilt

$$s_j(T) = |\lambda_j(T)|.$$

Beweis: Sei $\lambda_j(T)$ ein Eigenwert von T mit Eigenvektor x, d.h.

$$Tx = \lambda_j(T)x \overset{\text{Satz 6.21(b)}}{\Longrightarrow} T^* x = \overline{\lambda_j(T)} x$$

$$\Longrightarrow T^* T x = |\lambda_j(T)|^2 x \Longrightarrow s_j(T) = |\lambda_j(T)|.$$

Umgekehrt sei $s_j(T)^2$ ein Eigenwert von $T^* T$ mit Vielfachheit m_j. Dann existiert eine Orthonormalbasis $x_1, \dots, x_{m_j}$ in $\mathrm{Kern}(T^* T - s_j(T)^2)$, d.h. $T^* T x_i = s_j(T)^2 x_i$. Betrachte

$$\begin{aligned} T^* T \cdot T x_i &= T(T^* T x_i) = s_j(T)^2 T x_i \\ &\Longrightarrow T x_i \in \mathrm{Kern}(T^* T - s_j(T)^2). \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} T^* T T^* x_i &= T^*(T^* T x_i) = s_j(T)^2 T^* x_i \\ &\Longrightarrow T^* x_i \in \mathrm{Kern}(T^* T - s_j(T)^2). \end{aligned}$$

Sei P die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Kern}(T^* T - s_j(T)^2)$, d.h.

$$Px = \sum_{i=1}^{m_j} x_i \langle x_i, x \rangle.$$

Behauptung: Es gibt eine Orthonormalbasis $y_1, \dots, y_{m_j}$ mit $T y_i = \lambda_i y_i$, $i = 1 \dots m_j$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Beweis.

$$T x_i = \sum_{\ell=1}^{m_j} T_{\ell i} T_{\ell i} x_\ell \text{ mit } T_{\ell i} := \langle x_\ell, K x_i \rangle.$$

Die Matrix $T_{\ell i}$ ist normal, denn

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{m_j} \overline{T}_{\ell i} T_{\ell p} &= \sum_{\ell=1}^{m_j} \overline{\langle x_\ell, T x_i \rangle} \\ &= \sum_{\ell=1}^{m_j} \langle T x_i, x_\ell \rangle \langle x_\ell, T x_p \rangle \\ &= \langle x_i, T^* P \underbrace{T x_p}_{\in \mathrm{Bild}(P)} \rangle \\ &= \langle x_i, T^* T x_p \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{m_j} T_{i\ell}\overline{T_{p\ell}} &= \sum_{\ell=1}^{m_j} \langle x_i, Tx_\ell\rangle \overline{\langle x_p, Tx_\ell\rangle} \\
&= \sum_{\ell=1}^{m_j} \langle T^* x_i, x_\ell\rangle \langle x_\ell, T^* x_p\rangle \\
&= \langle x_i, TP \underbrace{T^* x_p}_{\in \mathrm{Bild}(P)} \rangle \\
&= \langle x_i, TT^* x_p\rangle.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Nach Behauptung ist $T^*Ty_i = \lambda_i T^* y_i \overset{\text{Satz6.53(b)}}{=} |\lambda_i|^2 y_i \Rightarrow s_j(T) = |\lambda_j(T)|$.

(3) $s_j(T) = s_j(T^*)$.

Beweis. Nach Satz 6.22 gilt

$$\begin{aligned}
& Tx = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)\langle e_j, x\rangle f_j \\
\Longrightarrow\quad & T^*x = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)\langle f_j, x\rangle e_j \\
\Longrightarrow\quad & T^*Tx = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2\langle e_j, x\rangle e_j \\
\text{und}\quad & TT^*x = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2\langle f_j, x\rangle f_j.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Satz 6.34 (Min-Max-Prinzip). *Seien X, Y Hilberträume, $T, S \in \mathcal{K}(X, Y)$. Seien $s_n(T) \geq 0$ die der Größe nach fallend angeordneten singulären Werte von T.*

(a) *Es gilt $s_1(T) = \|T\|$ und*

$$s_{n+1} = \inf_{x_1 \ldots x_n \in X} \sup_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ x \perp x_1 \ldots x_n}} \|Tx\|, \; n \geq 1.$$

(b) $s_{j+k+1}(T+S) \leq s_{j+1}(T) + s_{k+1}(S),\; j,k \in \mathbb{N}_0$.
(c) $s_{j+k+1}(ST) \leq s_{j+1}(S)s_{k+1}(T),\; j,k \in \mathbb{N}_0$.
(d) $|s_j(T) - s_j(S)| \leq \|T - S\| \;\forall j \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) $s_1(T)$ ist der größte Eigenwert des selbstadjungierten Operators $|T| \Rightarrow s_1(T) = \|\,|T|\,\|$ (siehe Behauptung 4 im Beweis von Satz 6.54).

$$\begin{aligned}
\|\,|T|\,x\|^2 &= \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle x, |T|^2 x\rangle \\
&= \langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \\
&= \|Tx\|^2 \Longrightarrow \|\,|T|\,\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

Also ist $S_1(T) = \|T\|$.
Seien e_n die orthonormalen Elemente aus der Zerlegung

$$Tx = \sum_n S_n \langle e_n, x\rangle f_n.$$

Für $x \perp e_1 \dots e_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \Big\| \sum_{j>n} s_j \langle e_j, x\rangle f_j \Big\|^2 = \sum_{j>n} s_j^2 |\langle e_j, x\rangle|^2 \\
&\le s_{n+1}^2 \sum_{j>1} |\langle e_j, x\rangle|^2 \le s_{n+1}^2 \|x\|^2 \\
&\Rightarrow s_{n+1} \ge \inf_{x_1 \dots x_n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ x \perp x_1 \dots x_n}} \|Tx\|.
\end{aligned}$$

Seien nun $x_1 \dots x_n$ beliebig. Dann gibt es ein $x \in \operatorname{lin}\{e_1 \dots e_{n+1}\}$ mit $\|x\| = 1$ und $x \perp x_1 \dots x_n$ [denn $x = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j e_j$ und $\langle x, x_k\rangle = 0 \,\forall\, k = 1 \dots n$].

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \|Tx\|^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{n+1} S_j \langle e_j, x\rangle f_i \Big\|^2 \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n+1} S_j^2 |\langle e_j, x\rangle|^2 \ge s_{n+1}^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} |\langle e_j, x\rangle|^2}_{\|x\|^2} \\
\Longrightarrow \quad & s_{n+1} \le \inf_{x_1 \dots x_n} \sup_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ x \perp x_1 \dots x_n}} \|Tx\|.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
s_{j+k+1}(T+S) &= \inf_{x_1 \dots x_{j+k} \in X} \sup_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ x \perp x_1 \dots x_{j+k}}} \|(T+S)x\| \\
&\le \inf \sup (\|Tx\| + \|Sx\|) \\
&\le \inf_{x_1 \dots x_{j+k} \in X} \Big(\sup_{\substack{x \perp x_1 \dots x_j \\ x \in X, \|x\|=1}} \|Tx\| + \sup_{\substack{x \perp x_{j+k} \\ \|x\|=1}} \|Sx\| \Big) \\
&= \inf_{x_1 \dots x_j \in X} \sup_{\substack{x \perp x_{j+k} \\ \|x\|=1}} \|Tx\| + \underbrace{\inf_{x_{j+1} \dots x_{j+k} \in X}}_{\text{umbenennen!}} \sup_{x \perp x_{j+1} \dots x_{j+k}} \|Sx\| \\
&= s_{j+1}(T) + s_{k+1}(S).
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
s_{j+k+1}(ST) &= \inf_{x_1\dots x_{j+k}\in X} \sup_{\substack{x\perp x_1\dots x_{j+k}\\ \|x\|=1}} \|STx\| \\
&\le \inf_{x_1\dots x_k\in X} \sup_{\substack{x\perp x_1\dots x_k\\ x\perp T^*y_1\dots T^*y_j,\|x\|=1}} \|STx\| \ \forall\, y_1\dots y_j\in Y \\
&\le \inf_{\substack{x_1\dots x_k\in X\\ y_1\dots y_j\in Y}} \sup_{\substack{x\perp x_1\dots x_k\\ x\perp T^*y_1\dots T^*y_j,\|x\|=1}} \|STx\| \\
&= \inf_{\substack{x_1\dots x_k\in X\\ y_1\dots y_j\in Y}} \sup_{\substack{x\perp x_1\dots x_k\\ Tx\perp y_1\dots y_j,\|x\|=1}} \frac{\|STx\|}{\|Tx\|}\cdot\|Tx\| \ (\text{mit } \frac{a}{b}\cdot b = 0 \text{ für } b=0) \\
&\le \inf_{\substack{x_1\dots x_k\in X\\ y_1\dots y_j\in Y}} \sup_{\substack{y\perp y_1\dots y_j\\ \|y\|=1}} \|Sy\|\cdot \sup_{\substack{x\perp x_1\dots x_k\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \\
&= s_{j+1}(S)s_{k+1}(T).
\end{aligned}
$$

(d) Aus (b) folgt $s_j(T)\le s_j(S)+s_1(T-S)=s_j(S)+\|T-S\|$ und

$$s_j(S)\le s_j(T)+\|T-S\| \Longrightarrow |s_j(S)-s_j(T)|\le\|T-S\|.$$

□

Satz 6.35. *Für jedes $p>0$ ist $\sigma_p(X,Y)$ ein Vektorraum. Insbesondere gilt für $T_1,T_2\in\mathfrak{S}_p(X,Y)$*

$$
\begin{aligned}
\|T_1+T_2\|_p &\le 2^{1/2}(\|T_1\|_p+\|T_2\|_p), \quad p\ge 1,\\
\|T_1+T_2\|_p^p &\le 2(\|T_1\|_p^p+\|T_2\|_p^p), \quad 0<p<1.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. *Es gelten stärkere Ungleichungen*

$$
\begin{aligned}
\|T_1+T_2\|_p &\le \|T_1\|_p+\|T_2\|_p, \quad p\ge 1,\\
\|T_1+T_2\|_p^p &\le \|T_1\|_p^p+\|T_2\|_p^p, \quad 0<p<1.
\end{aligned}
$$

Für $p\ge 1$ ist $\mathfrak{S}_p$ ein separabler Banachraum. Für $0<p<1$ ist $\mathfrak{S}_p$ ein separabler vollständiger metrischer Raum. Die Separabilität folgt aus der Tatsache, dass Operatoren mit endlich-deminsionalem Bild in $\mathfrak{S}_p$ dicht liegen. [Warum?]

Beweis. Nach Satz 6.64 ist

$$
\begin{aligned}
\sum_j s_j(T_1+T_2)^p &= \sum_j \Big(s_{2j-1}(T_1+T_2)^p + s_{2j}(T_1+T_2)^p\Big)\\
&\le \sum_j \Big(\big(s_j(T_1)+s_j(T_2)\big)^p + \big(s_j(T_1)+s_{j+1}(T_2)\big)^p \Big).
\end{aligned}
$$

Sei $p \geq 1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\|T_1+T_2\|_p^p &\leq \left(\Big(\sum_j s_j(T_1)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_j s_j(T_2)^p\Big)^{1/p}\right)^p \\
&\quad + \left(\Big(\sum_j s_j(T_1)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_j s_{j+1}(T_2)^p\Big)^{1/2}\right)^p \\
&\leq \Big(\|T_1\|_p + \|T_2\|_p\Big)^p + \Big(\|T_1\|_p + \|T_2\|_p\Big)^p \\
&= 2\Big(\||T_1\|_p + \|T_2\|_p\Big)^p.
\end{aligned}$$

Sei $p < 1 \Longrightarrow$

$$\|T_1+T_2\|_p^p \overset{|\alpha+\beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p}{\leq} 2\sum_j s_j(T_1)^p + s_j(T_2)^p = 2(\|T_1\|_p^p + \|T_2\|_p^p).$$

□

Satz 6.36. *Ist $T \in \mathfrak{S}_p(X,Y)$, so sind $ST \in \mathfrak{S}_p(X,Z)$ und $TS \in \mathfrak{S}_p(Z,Y)$ für alle stetige S. Insbesondere ist $\mathfrak{S}_p(X)$ ein zweiseitiges Ideal in der Algebra Ł(X).*

Der Satz folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 6.37. *Sei $T \in \mathcal{K}$, $S \in \mathcal{L}$.*

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow s_j(ST) &\leq \|S\| s_j(T), \\
s_j(TS) &\leq \|S\| s_j(T).
\end{aligned}$$

Beweis. Mit Satz 6.64 gilt

$$\begin{aligned}
s_1(ST) &= \|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\| = \|S\| s_1(T) \\
s_{n+1}(ST) &= \inf_{x_1 \dots x_n} \sup_{\substack{x \perp x_1 \dots x_n \\ \|x\|=1}} \|STx\| \\
&\leq \|S\| \inf \sup_{x \perp x_1 \dots x_n} \|Tx\| = \|S\| s_{n+1}(T) \\
s_n(TS) &= s_n(S^*T^*) \leq \|S^*\| s_n(T^*) = \|S\| s_n(T).
\end{aligned}$$

□

Satz 6.38. *Seien X, Y, Z Hilberträume, $0 < p, p_1, p_2, \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, $T_1 \in \mathfrak{S}_{p_1}(X,Y)$, $T_2 \in \mathfrak{S}_{p_2}(Y,Z)$. Dann gilt $T_2T_1 \in \mathfrak{S}(X,Z)$ und*

$$\|T_2T_1\| \leq 2^{1/2} \|T_1\|_{p_1} \|T_2\|_{p_2}.$$

Bemerkung: Es gilt die stärkere Ungleichung

$$\|T_2T_1\|_p \leq \|T_1\|_{p_1} \|T_2\|_{p_2},$$

also a la Hölder.

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
s_{2j+1}(T_2T_1) &\le s_{j+1}(T_1)s_{j+1}(T_2),\ j \in \mathbb{N}_0 \\
s_{2j}(T_2T_1) &\le s_j(T_1)s_{j+1}(T_2),\ j \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \sum_j s_j(T_2T_1)^p &\le \sum_j \Big(s_{j+1}(T_1)^p s_{j+1}(T_2)^p + s_j(T_1)^p s_{j+1}(T_2)^p \Big) \\
&\overset{s_{j+1}\le s_j}{\le} 2\sum_j s_j(T_1)^p s_j(T_2)^p \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} 2\Big(\sum_j \Big(s_j(T_1)^p \Big)^{p_1/p} \Big)^{p/p_1} \Big(\sum_j \Big(s_j(T_2)^p \Big)^{p_2/p} \Big)^{p/p_2} \\
&= 2\Big(\sum_j s_j(T_1)^{p_1} \Big)^{p/p_1} \Big(\sum_j s_j(T_2)^{p_2} \Big)^{p/p_2} \\
&= 2\|T_1\|_{p_1}^p \|T_2\|_{p_2}^p .
\end{aligned}$$

□

Zwei besonders wichtige Schatten-Klassen sind

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_2(x) &= \text{Hilbert-Schmidt-Klasse}, \\
\mathfrak{S}_1(x) &= \text{Spurklasse (oder die Klasse nuklearer Operatoren.}
\end{aligned}$$

Der Einfachheit halber sei X separabel. (Alle Aussagen bleiben aber auch im nichtreparablen Fall richtig.)

SATZ 6.39. *Sei $T \in \sigma_1(x)$, (g_j) eine Orthonormalbasis in X. Dann konveriert die Reihe*

$$\sum_j \langle g_j, Tg_j \rangle$$

absolut und ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Die Größe

$$\text{tr } T := \sum_j \langle g_j, Tg_j \rangle$$

heißt die Spur von T. *Es gilt:* $|\text{ tr } T| \le \|T\|_1$.

BEWEIS. Nach Satz 6.61 gilt

$$\begin{aligned}
Tx &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle e_k, x\rangle f_k \text{ mit } f_k = Ue_k \text{ und } |T|e_k = s_k e_k \\
\Longrightarrow \sum_j \langle g_j, Tg_j\rangle &= \sum_j \sum_k s_k \langle g_j, f_k\rangle \langle e_k, g_j\rangle \\
&= \underbrace{\sum_k s_k \sum_j \langle e_k, g_j\rangle \langle g_j, f_k\rangle}_{(2)} \\
&= \underbrace{\sum_k s_k \langle e_k, f_k\rangle}_{(1)} \overset{f_k = Ue_k}{=} \sum_k s_k \langle U^* e_k, e_k\rangle \\
&= \sum_k \langle U^* e_k, |T| e_k\rangle = \sum_k \langle e_k, U|T|e_k\rangle \\
&= \sum_k \langle e_k, Te_k\rangle.
\end{aligned}$$

Diskussion der Absoluten Konvergenz:

(1) konvergiert absolut $\rightarrow$ (2) konvergiert absolut $\Rightarrow$ j und k können vertauscht werden.

Abschätzung:

$$|\operatorname{tr} T| \leq \sum_k s_k |\langle e_k, f_k\rangle| \leq \sum_k s_k = \|T\|_1.$$

□

SATZ 6.40. *Es gelte:*

(1) $T_1 \in \mathfrak{S}_p(Y, X), T_2 \in \mathfrak{S}_q(X, Y)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
oder
(2) $T_1 \in \mathcal{L}(Y, X), T_2 \in \mathfrak{S}_1(X, Y)$
oder
(3) $T_1 \in \mathfrak{S}_1(Y, X), T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Dann ist* $tr(T_1T_2) = tr(T_2T_1)$.

BEWEIS. Es gelte (1) oder (2). Betrachte $T_2 x = \sum_k S_k \langle e_k, x\rangle fx$.

Ergänze e_k zu einer Orthonormalbasis in X
f_k zu einer Orthonormalbasis in Y.

Betrachte

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(T_2T_1) &= \sum_k \langle f_k, T_2T_1 f_k\rangle \\
&= \sum_k \langle \underbrace{T_2^* f_k}_{S_k e_k}, T_1 f_k\rangle \\
&= \sum_k S_k \langle e_k, T_1 f_k\rangle
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(T_1 T_2) &= \sum_k \langle e_k, T_1 \underbrace{T_2 e_k}_{S_k f_k} \rangle \\
&= \sum_k S_k \langle e_k, T_1 f_k \rangle.
\end{aligned}
$$

(3) ist analog. □

Bezeichne $\mathfrak{S}_\infty(X) := \mathcal{K}(X)$ mit Operatornorm. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_p(X)' &\cong \mathfrak{S}_q(X) \quad \text{mit} \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\
\mathfrak{S}_1(X)' &\cong \mathcal{L}(X), \\
\sigma_\infty(X)' &\cong \mathfrak{S}_1(X).
\end{aligned}
$$

In allen Fällen ist der isometrische Isomorphismus definiert durch $\ell(T) = \operatorname{tr}(QT)$. Insbesondere gilt

$$\mathfrak{S}_2(X)' \cong \mathfrak{S}_2(X).$$

In der Tat ist $\mathfrak{S}_2(X)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle\langle T, S \rangle\rangle := \operatorname{tr}(T^* S).$$

Also gibt es die folgende Analogie zwischen den Schatten-von Neumann Idealen $\mathfrak{S}_p$ und Folgenräumen ℓ^p:

$$
\begin{aligned}
c_0 &\Leftrightarrow \mathcal{K}(X), \\
\ell^p &\Leftrightarrow \sigma_p(X), \qquad 1 \le p < \infty, \\
\ell^\infty &\Leftrightarrow \mathcal{L}(X).
\end{aligned}
$$

Der Dualraum zu $\mathcal{L}(X)$ ist ech größer als $\mathfrak{S}_1(X)$:

$$
\begin{aligned}
&\ell \in \mathcal{L}(X)' \iff \ell = \ell_1 + \ell_2 \text{ mit } \ell_1(T) = \operatorname{tr}(QT), Q \in \sigma_1(X) \\
&\text{und } l_2\Big|_{\mathcal{K}(X)} = 0, \|\ell\| = \|\ell_1\| + \|\ell_2\| \text{ (Satz von Dixmier).}
\end{aligned}
$$

Satz 6.41 (Lidskij). *Sei $T \in \mathfrak{S}_1(X)$. Dann ist* $\operatorname{tr} T = \sum_k \lambda_k(T)$.

Für T selbstadjungiert, ist die Aussage klar (wegen dem Spektralsatz). Im allgemeinen Fall ist der Beweis schwierig.

Satz 6.42 (Spurformel). *Sei $k \in C([0,1] \times [0,1]), k(s,t) = \overline{k(t,s)}$,*

$$(Tx)(s) = \int_0^1 k(s,t) x(t)\, dt, \; x \in L^2([0,1]).$$

Ist $T \ge 0$, so gilt

$$T \in \mathfrak{S}_1(L^2([0,1])) \textit{ und } \operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(T) = \int_0^1 k(s,s)\, ds.$$

Bemerkung: Aus $k(s,s) \ge 0$ folgt nicht, dass $T \ge 0$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(s,t) := |s-t| \quad &\Longrightarrow \quad \int_0^1 k(s,s)d = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_j(T) = 0 \text{ Widerspruch.}
\end{aligned}
$$

Dagegen ist für $k(s,t) := \min\{s,t\}$ $T \geq 0$.

KAPITEL 7

Unbeschränkte Operatoren

7.1. Grundbegriffe

Definition 7.1. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{D} \subset X$ ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$. Ein linearer Operator T von X nach Y mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}$ *ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{D}$ nach Y. In Zeichen: T mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}$ oder $(T, \mathcal{D})$. Ist $\mathcal{D}$ dicht in X, so heißt T* dicht definiert.

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(T) &:= \{Tx | x \in \mathcal{D}(T)\} \subset Y \\ \mathrm{Kern}(T) &:= \{x \in \mathcal{D} | Tx = 0\} \subset X. \end{aligned}$$

T heißt beschränkt, *falls es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|Tx\| \leq C\|x\| \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$. sonst unbeschränkt.*

Bemerkung.
1. *Ist $\mathcal{D}(T) = X$ so ist T ein linearer Operator im Sinne der Definition aus Teil I.*
2. *Wenn X ein Banachraum ist, so braucht $\mathcal{D}(T)$ nicht abgeschlossen zu sein, und somit ist $\mathcal{D}(T)$ kein Banachraum.*

Operationen mit Operatoren:

$$\begin{aligned} (T+S)x &= Tx + Sx \quad x \in \mathcal{D}(T+S) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) \\ (TS)x &= T(Sx) \quad x \in \mathcal{D}(TS) := \{x \in \mathcal{D}(S) \mid Sx \in \mathcal{D}(T)\} \end{aligned}$$

Satz 7.2. *Seien X, Y normierte Räume, T ein linearer Operator von X nach Y mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *T ist stetig (d.h. stetig in jedem Punkt von$\mathcal{D}(T)$).*
b) *T ist stetig im Nullpunkt.*
c) *T ist beschränkt.*

Beweis. Siehe Satz I.1.33.

Sei Kern $T = \{0\}$. Der zu T inverse Operator T^{-1} ist die lineare Abbildung mit

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathrm{Bild}(T) \quad \mathrm{Bild}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$$

Definition 7.3. *Seien X, Y normierte Räume, T, S lineare Operatoren von X nach Y mit Definitionsbereichen $\mathcal{D}(T), \mathcal{D}(S)$. Gilt $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ und $Sx = Tx \forall\, x \in \mathcal{D}(S)$, so heißt T eine Fortsetzung von S und S eine Einschränkung von T. In Zeichen: $S \subset T$.*

Beispiel (1): $X = Y = C([0,1])$. Betrachte

$$\begin{aligned} Tu(x) &= u'(x) \quad \textit{mit} \\ \mathcal{D}(T) &= C^1([0,1]); \\ \mathcal{D}(T_1) &= \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0\} \\ \mathcal{D}(T_2) &= \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\} \end{aligned}$$

Es gilt: $T_2 \subset T_1 \subset T$. T ist nicht invertierbar, denn Kern $T = \{u = \text{const}\}$. T_1 und T_2 sind invertierbar:

$$\begin{aligned} T_1^{-1}v(x) &= \int_0^x v(t)\,dt \quad \text{mit } \mathcal{D}(T_1^{-1}) = X \\ T_2^{-1}v(x) &= \int_0^x v(t)\,dt \quad \text{mit } \mathcal{D}(T_2^{-1}) = X\left\{v \in C([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 v(t)\,dt = 0\right\} \end{aligned}$$

Der Operator T ist nicht dicht definiert, die Operatoren T_1 und T_2 sind dicht definiert.

Behauptung: Die Operatoren T, T_1, T_2 sind unbeschränkt.

Beweis. Setze $u_n(x) = \sin(\pi n x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|u_n\|_\infty = 1$ und $\|u_n'\|_\infty = n$. $\boxed{\text{B}}$

Für die Untersuchung von Differentialoperatoren in L^p-Räumen brauchen wir folgenges Ergebnis.

Proposition 1. *Sei $v \in L^p([0,1])$ beliebig. Dann ist $u(x) = \int_0^x v(t)\,dt$ ebenfalls in $L^p([0,1])$.*

Diese Aussage lässt sich sehr einfach mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung beweisen. Wir geben einen anderen, nicht einfacheren Beweis, um die Jensensche Ungleichung kennenzulernen.

Behauptung 1. (Jensensche Ungleichung) Sei Ω eine Menge, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega, f \in L^1(\Omega)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$\varphi\left(\int_\Omega f(x)\,d\mu(x)\right) \le \int_\Omega \varphi(f(x))\,d\mu(x)$$

Behauptung 2. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$ monoton wachsend.

Beweis von Behauptung 2. Zunächst sei $x_0 < x < y$. Dann ist

$$x = \frac{y - x}{y - x_0}x_0 + \frac{x - x_0}{y - x_0}y$$

eine konvexe Kombination von x_0 und y. Daher ist

$$\varphi(x) \le \left(1 - \frac{x - x_0}{y - x_0}\right)\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{y - x_0}\varphi(y),$$

d.h.

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \le \frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0}.$$

Nun sei $x < x_0 < y$. Dann ist

$$x_0 = \frac{y - x_0}{y - x} x + \frac{x_0 - x}{y - x} y$$

eine konvexe Kombination von x und y. Daher ist

$$\varphi(x_0) \leq \left(1 - \frac{x_0 - x}{y - x}\right) \varphi(x) + \frac{x_0 - x}{y - x} \varphi(y),$$

d.h.

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}.$$

Sei $x < y < x_0$. Dann ist

$$y = \frac{y - x_0}{x - x_0} x + \frac{y - x}{x_0 - x} x_0$$

eine konvexe Kombination von x und x_0. Daher ist

$$\varphi(y) \leq \frac{y - x_0}{x - x_0} \varphi(x) + \left(1 - \frac{y - x_0}{x - x_0}\right) \varphi(x_0),$$

d.h.

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0} \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}.$$

$\boxed{\text{B2}}$

Behauptung 3. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es ein $c = c(x_0) \in \mathbb{R}$, sodass

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq c(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis von Behauptung 3. Für beliebiges $\lambda \in (0, 1]$ gilt

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \frac{\varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) - \varphi(x_0)}{\lambda(x - x_0)} (x - x_0).$$

Ist $x > x_0$, so gilt

$$\frac{\varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) - \varphi(x_0)}{\lambda(x - x_0)} \geq \inf_{z>0} \frac{\varphi(x_0 + z) - \varphi(x_0)}{z} > -\infty.$$

Ist $x < x_0$, so ist

$$\frac{\varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) - \varphi(x_0)}{\lambda(x - x_0)} \geq -\sup_{z>0} \frac{\varphi(x_0 - z) - \varphi(x_0)}{z} > -\infty.$$

$\boxed{\text{B3}}$

Beweis von Behauptung 1. Setze $x_0 := \int_\Omega f(s)\, d\mu(s)$, $x = f(t)$ für ein beliebiges $t \in \Omega$. Dann folgt aus Behauptung 4

$$\varphi(f(t)) - \varphi\left(\int_\Omega f(s)\, d\mu(s)\right) \geq c\left(f(t) - \int_\Omega f(s)\, d\mu(s)\right)$$

und folglich

$$\int_\Omega \varphi(f(t)) d\mu(t) \geq \varphi\left(\int_\Omega f(s)\, d\mu(s)\right).$$

$\boxed{\text{B1}}$

Beweis der Proposition. Beweis von Behauptung 1. Die Funktion $\varphi(t) := |t|^p$ ist konvex. Sei $x \in (0,1]$ beliebig. Mit der Jensenschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &= \varphi\left(\int_0^x v(t)\,dt\right) = \varphi\left(x\int_0^x v(t)\,\frac{dt}{x}\right) \\ &\leq \int_0^x \varphi\left(xv(t)\right)\frac{dt}{x} = x^{p-1}\int_0^x |v(t)|^p dt. \end{aligned}$$

□

Beispiel (2): $X = Y = L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T) &= \left\{u \in L^p([0,1]) \mid u' \in L^p([0,1])\right\} \\ &=: W^{1,p}([0,1]) \\ &= \left\{u \in L^p([0,1]) \mid u \text{ absolut stetig mit } u' \in L^p([0,1])\right\} \end{aligned}$$

$T_2 \subset T_1 \subset T$. Der Operator T ist nicht invertierbar.

$$\begin{aligned} T_1^{-1}v(x) &= \int_0^x v(t)\,dt \quad \text{mit } \mathcal{D}(T_1^{-1}) = X \\ T_2^{-1}v(x) &= \int_0^x v(t)\,dt \quad \text{mit } \mathcal{D}(T_2^{-1}) = \left\{v \in L^p([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 v(t)\,dt = 0\right\} \end{aligned}$$

Die Operatoren T, T_1 und T_2 sind dicht definiert.

Behauptung: Die Operatoren T, T_1, T_2 sind unbeschränkt.

Beweis. Setze $u_n(x) = \sin(\pi n x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u_n\|_p^p &= \int_0^1 |\sin(\pi n x)|^p dx \leq 1, \\ \|u_n'\|_p^p &= \pi n \int_0^1 |\cos(\pi n x)|^p dx = (*). \end{aligned}$$

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in $2n$ Teilintervalle $\left[\dfrac{k-1}{2n}, \dfrac{k}{2n}\right]$, $k = 1, \ldots, 2n$. Auf allen solchen Intervallen ist die Funktion $x \mapsto |\cos(\pi n x)|^p$ monoton und hat gleiche Integrale. Folglich ist

$$\begin{aligned} (*) &= 2n\int_0^{1/2n} \cos^p(\pi n x)dx \overset{s=\pi n x}{=} \frac{2n}{\pi n}\int_0^{\pi/2} \cos^p(s)ds \\ &\overset{t=\cos s}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^p}{\sqrt{1-t^2}}dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^p dt \\ &= \frac{2}{\pi(p+1)}. \end{aligned}$$

Also ist $\|u_n'\|_p^p \geq \frac{2n}{p+1} \to \infty$. B

7.2. Abgeschlossene Operatoren

Definition 7.4. (Vgl. Def. II.3.3.) *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein Operator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$.*

(1) *Der Operator T heißt* abgeschlossen, *wenn der Graph von T*

$$G(T) := \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \subset X \times Y$$

bezüglich der Norm $\|(x,y)\|_{(X\times Y)} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ abgeschlossen ist.

Ein Operator T heißt abschließbar, *wenn der Abschluss $\overline{G(T)}$ der Graph eines Operators $\overline{T} : X \to Y$ ist, d.h.*

$$\overline{G(T)} := \{(x, \overline{T}x) \mid x \in \mathcal{D}(\overline{T})\}$$

Der Operator $\overline{T}$ heißt der Abschluss *von T.*

(2) *Ist T ein abschließbarer Operator und $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T)$ ein Teilraum, so heißt $\mathcal{D}$ ein* determinierender Bereich *(oder* Core*) von T, wenn $\overline{T|_{\mathcal{D}}}$ eine Fortsetzung von T ist.*

Zunächst beweisen wir eine einfache Eigenschaft des determinierenden Bereiches.

Lemma 7.5. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Ein Vektoraum $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T)$ ist genau dann ein deterninierender Bereich von T, wenn gilt: $\overline{T|_{\mathcal{D}}} = T$.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Aus $\overline{T|_{\mathcal{D}}} = T$ folgt, dass $\overline{T|_{\mathcal{D}}}$ eine (triviale) Fortsetzung des Operators T ist.

($\Rightarrow$) Ist $\mathcal{D}$ ein determinierender Bereich von T, so ist $\overline{T|_{\mathcal{D}}}$ eine Fortsetzung von T. Andererseits gilt $\overline{T} = T$. Also ist $\overline{T|_{\mathcal{D}}} \supset \overline{T}$, d.h. $\overline{T|_{\mathcal{D}}} = T$. □

Satz 7.6. *Seien X, Y Banachräume.*

(a) Ein Operator $T : X \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge (x_n) aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ folgt $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$.

(b) Ein Operator $T : X \to Y$ ist genau dann abschließbar, wenn es eine abgeschlossene Fortsetzung von T gibt.

(c) Ein Operator $T : X \to Y$ ist genau dann abschließbar, wenn für jede Folge (x_n) aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y$ folgt $y = 0$. In diesem Fall wird der Abschluss $\overline{T}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{T}) = \Big\{ & x \in X \mid \textit{es gibt eine Folge } (x_n) \textit{ aus } \mathcal{D}(T), \\ & \textit{sodass } x_n \to x \textit{ und } Tx_n \textit{ konvergiert} \Big\}, \\ \overline{T}x = {} & \lim_{n\to\infty} Tx_n. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Beweis. (a) Der Graph $G(T) = \{(x, Tx) | x \in \mathcal{D}(T)\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ folgt $(x, y) \in G(T)$, d.h. $x \in \mathcal{D}(T)$ unf $Tx = y$.

(b) Ist T abschließbar, so ist $\overline{T}$ eine Fortsetzung von T. Umgekehrt, sei $\widetilde{T}$ eine abgeschlossene Fortsetzung von T. Dann ist $G(\widetilde{T})$ abgeschlossen mit $G(\widetilde{T}) \supset G(T)$. Also gilt $\overline{G(T)} \subset \overline{G(\widetilde{T})} = G(\widetilde{T})$, d.h. $\overline{G(T)}$ ist der Graph eines Operators.

(c) Der Abschluss $\overline{G(T)}$ ist genau dann der Graph eines Operators, wenn $\overline{G(T)}$ keine Elemente der Form $(0, y)$ mit $y \neq 0$ enthält. Also ist der

Operator genau dann abschließbar, wenn für jede Folge (x_n) aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y$ folgt $y = 0$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\overline{G(T)} &= \Big\{(x,y) \in X \times Y \,|\, \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ aus } \mathcal{D}(T), \\ &\qquad \text{sodass } (x_n, Tx_n) \to (x,y)\Big\}, \\ &= G(\overline{T}) = \{(x, \overline{T}x) | x \in \mathcal{D}(\overline{T})\}.\end{aligned}$$

Daraus folgt (7.1). □

Beispiele. *(1) Sei $l : C([0,1]) \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional mit $\mathcal{D}(l) = C^1([0,1])$, $u \mapsto u'(1)$. Das Funktional l ist unbeschränkt, denn für die Folge $u_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\|u_n\|_\infty = 1$ und $u_n'(1) = n \to \infty$ für $n \to \infty$. Das Funktional ist nicht abgeschlossen und auch nicht abschließbar, denn für die Folge $v_n(t) = n^{-1}t^n$ gilt $\|v_n\| = n^{-1} \to 0$ und $v_n'(1) = 1$.*

(2) Sei $(T_0 u)(t) = u'(t)$ mit $\mathcal{D}(T_0) = C^\infty([0,1])$ in $X = C([0,1])$. Sei $u \in C^1([0,1])$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $v_n \in C^\infty([0,1])$ mit $v_n \to u'$ (z.B. Polynome). Betrachte

$$u_n(t) = u(0) + \int_0^t v_n(s)ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} \left| u(0) + \int_0^t v_n(s)ds - u(0) - \int_0^t u'(s)ds \right| \\ &\le \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |v_n(s) - u'(s)|ds \\ &\le \|v_n - u'\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Also ist $u_n \to u$, $T_0 u_n \to u'$. Der Grenzwert $u \in C^1$ braucht aber nicht in $\mathcal{D}(T_0)$ zu liegen. Somit ist T_0 nicht abgeschlossen.

Sei nun (u_n) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $u_n \to 0$ und $T_0 u_n = u_n' \to v$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} \left| u_n(t) - \int_0^t v(s)ds \right| &= \sup_{t\in[0,1]} \left| u_n(0) + \int_0^t u_n'(s)ds - \int_0^t v(s)ds \right| \\ &\le |u_n(0)| + sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |u_n'(s) - v(s)|ds \\ &\le |u_n(0)| + \|u_n' - v\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Also gilt $u_n(t) \to \int_0^t v(t)dt$ gleichmäßig, d.h. $v = 0$. Somit ist der Operator T_0 abschließbar.

Nun bestimmen wir den Abschluss des Operators T_0. Dazu sei u_n eine beliebige Folge, sodass u_n und u_n' gleichmäßig konvergent sind, d.h. u_n ist konvergent bezüglich der C^1-Norm. Somit ist $\mathcal{D}(\overline{T_0}) = C^1([0,1])$ und $(\overline{T_0}u)(t) = u'(t)$ für alle $u \in \mathcal{D}(\overline{T_0})$.

Korollar 7.7. *(a) Ein stetiger Operator $T : X \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen ist.*

(b) Jeder stetige Operator T ist abschließbar mit $\mathcal{D}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{D}(T)}$. Der Abschluss $\overline{T}$ ist eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von T.

Beweis. Bei stetigen Operatoren folgt $Tx_n \to Tx$ aus $x_n \to x$. □

Satz 7.8. *(a) Ein injektiver Operator $T : X \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.*
(b) Sei T abschließbar und injektiv.

(1) *T^{-1} ist genau dann abschließbar, wenn auch $\overline{T}$ injektiv ist. Es gilt dann $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$.*
(2) *Ist $\overline{T}$ injektiv und $\overline{T}^{-1}$ stetig, so gilt* $\operatorname{Bild}(\overline{T}) = \overline{\operatorname{Bild}(T)}$.

Beweis. (a) Wir definieren die Abbildung $V : Y \times X \to X \times Y$ durch $V(y,x) = (x,y)$. Offenbar ist V ein isometrischer Isomorphismus. Wegen

$$\begin{aligned} G(T) &= \{(x,Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \\ &= \{(x,Tx) \mid x \in \operatorname{Bild}(T^{-1})\} \\ &\overset{x=T^{-1}y}{=} \{(T^{-1}y,y) \mid y \in \mathcal{D}(T^{-1})\} = VG(T^{-1}) \end{aligned}$$

sind Operatoren T und T^{-1} zugleich abgeschlossen oder nicht abgeschlossen.

(b) (1) ($\Leftarrow$) Ist $\overline{T}$ injektiv, so gilt

$$\mathcal{D}(\overline{T}^{-1}) = \operatorname{Bild}(\overline{T}) \supset \operatorname{Bild}(T) = \mathcal{D}(T^{-1}),$$

d.h. $\overline{T}^{-1}$ ist eine abgeschlossene Fortzetzung von T^{-1}. Also ist T^{-1} abschließbar.

($\Rightarrow$) Ist T^{-1} abschließbar, so ist $V^{-1}G(\overline{T}) = \{(\overline{T}x,x) \mid x \in \mathcal{D}(\overline{T})\}$ ein Graph, denn

$$\begin{aligned} V^{-1}G(\overline{T}) &= \overline{V^{-1}G(T)} = \overline{\{(Tx,x) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}} \\ &\overset{x=T^{-1}y}{=} \overline{\{(y,T^{-1}y) \mid y \in \mathcal{D}(T^{-1})\}} = \overline{G(T^{-1})} = G(\overline{T^{-1}}). \end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{T}$ injektiv und $\overline{T}^{-1} = \overline{T^{-1}}$.

(2) Ist $\overline{T}^{-1}$ stetig, so gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(\overline{T}) &= \mathcal{D}(\overline{T}^{-1}) = \mathcal{D}(\overline{T^{-1}}) \\ &= \overline{\mathcal{D}(T^{-1})} = \overline{\operatorname{Bild}(T)}. \end{aligned}$$

□

Satz 7.9 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X, Y Banachräume, T ein abgeschlossener linearer Operator von X nach Y mit abgeschlossenen Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Dann ist T beschränkt.*

Beweis selbst.

Korollar 7.10. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *T ist abgeschlossen und $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,*
(b) *T ist abgeschlossen und stetig,*
(c) *T ist stetig und $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Die Implikationen (a)⇒(b) und (a)⇒(c) folgen direkt aus Satz 7.9.

(b)⇒(a) Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x \in X$. Wegen der Stetigkeit von T ist die Folge (Tx_n) konvergent. Da T abgeschlossen ist, gilt $x \in \mathcal{D}(T)$. Also ist $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen.

(c)⇒(a)Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Tx_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{D}(T)$ ist $x \in \mathcal{D}(T)$. Es gilt auch $Tx_n \to Tx$, denn T ist stetig. Also ist $y = Tx$, d.h. T ist abgeschlossen. □

Beispiele. *(1) Sei $X = Y = C([0,1])$, $(Tu)(x) = u'(x)$ mit*

$$\mathcal{D}(T) = C^1([0,1]),$$
$$\mathcal{D}(T_1) = \{u \in \mathcal{D}(T) \,|\, u(0) = 0\},$$
$$\mathcal{D}(T_2) = \{u \in \mathcal{D}(T) \,|\, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Die Operatoren T_1^{-1} und T_2^{-1} sind beschränkt mit abgeschlossenen Definitionsbereichen und somit selbst abgeschloosen. Folglich sind T_1 und T_2 abgeschlossen.

Die Abgeschlossenheit von T haben wir bereits bewiesen, denn $\overline{T_0} = T$ mit $\mathcal{D}(T_0) = C^\infty([0,1])$. Man kann auch die Abgeschlossenheit von T aus der Abgeschlossenheit von T_1 oder T_2 folgern.

Definition 7.11. *Eine Fortsetzung T von S heißt* endlich, *wenn der Quotientenraum $\mathcal{D}(T)/\mathcal{D}(S)$ endlichdimensional ist.*

Lemma 7.12. *Eine endliche Fortsetzung eines abgeschlossenen Operators ist abgeschlossen.*

Beweis. Für den Beweis brauchen wir die Gleichheit

$$\dim G(T)/G(S) = \dim \mathcal{D}(T)/\mathcal{D}(S). \tag{7.2}$$

Da der Graph $G(S)$ abgeschlossen ist und der Quotientenraum $G(T)/G(S)$ endlichdimensional, ist $G(T)$ ebenfalls abgeschlossen.

Zum Beweis von (7.2) genügt es

$$G(T)/G(S) \ni [(x,Tx)] = \{(x+\tilde{x}, Tx + S\tilde{x}) \,|\, \tilde{x} \in \mathcal{D}(S)\}$$

und

$$\mathcal{D}(T)/\mathcal{D}(S) \ni [x] = \{(x+\tilde{x} \,|\, \tilde{x} \in \mathcal{D}(S)\}$$

zu vergleichen. □

Behauptung. Der Operator $(Tu)(x) = u'(x)$ mit $\mathcal{D}(T) = C^1([0,1])$ ist abgeschlossen.

Beweis. Der Quotientenraum $\mathcal{D}(T)/\mathcal{D}(T_1)$ ist eindimensional, d.h. T ist eine endliche Fortsetzung des abgeschlossenen Operators T_1. Somit ist T abgeschlossen. $\boxed{\text{B}}$

Satz 7.13. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Dann ist*

$$\mathrm{Kern}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) \,|\, Tx = 0\}$$

ein abgeschlossener Teilraum von X.

Beweis. Sei (x_n) eine beliebige konvergente Folge in $\text{Kern}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $Tx_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$, d.h. $x \in \text{Kern}(T)$. □

Satz 7.14. *Seien X, Y, Z Banachräume, $A : Y \to Z$, $B : X \to Y$ lineare Operatoren.*

(a) Sind A und B abgeschlossen und

(1) *B stetig*

oder

(2) *A stetig invertierbar,*

so ist AB mit $\mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) | Bx \in \mathcal{D}(A)\}$ abgeschlossen.

(b) Sind A und B abgeschließbar und

(1) *B stetig*

oder

(2) *A stetig invertierbar,*

so ist AB mit $\mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) | Bx \in \mathcal{D}(A)\}$ abschließbar.

Beweis. (a) unter Voraussetzung (1). Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(AB) \subset (B)$ mit $x_n \to x$ und $ABx_n \to z$. Der Operator B ist abgeschlossen und stetig, d.h. $\mathcal{D}(B)$ ist abgeschlossen. Daher gilt $x \in \mathcal{D}(B)$ und $Bx_n \to Bx$. Nun ist (Bx_n) eine Folge in $\mathcal{D}(A)$ mit $Bx_n \to Bx$ und $ABx_n \to z$. Da A abgeschlossen ist, gilt $Bx \in \mathcal{D}(A)$ und $z = ABx$. Also ist AB abgeschlossen.

(a) unter Voraussetzung (2). Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(AB) \subset (B)$ mit $x_n \to x$ und $ABx_n \to z$. Der Operator A^{-1} ist stetig. Damit gilt $Bx_n \to A^{-1}z$ und $A^{-1}z \in \text{Bild}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$. Da der Operator B abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert x der Folge (x_n) in $\mathcal{D}(B)$ und $Bx_n \to Bx$. Also gilt $A^{-1}z = Bx$, d.h. $x \in \mathcal{D}(AB)$ und $z = ABx$. Somit ist AB abgeschlossen.

(b) selbst. □

Bemerkungen. *(1) Das Produkt zweier abgeschlossener Operatoren braucht nicht abgeschlossen zu sein. Wir wählen $X = Y = Z = \ell^2(\mathbb{N})$ und definieren*

$$(Tx)_{2n-1} = nx_{2n}, \qquad (Tx)_{2n} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) | \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 |x_{2n}|^2 < \infty \right\}.$$

Offenbar gilt $T^2x = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(T^2) = \mathcal{D}(T)$, d.h. $T^2 = 0|_{\mathcal{D}(T)}$.

Behauptung 1. *$\mathcal{D}(T) \neq \ell^2(\mathbb{N})$ liegt dicht in $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Beweis. *Sei $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ beliebig. Setze*

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ x_n, & \text{falls } n \text{ gerade mit } n \leq m \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $x^{(m)} \in \mathcal{D}(T)$ *und*

$$\|x^{(m)} - x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{\substack{n>m \\ n \text{ gerade}}} |x_n|^2 \to 0.$$

B1

Als beschränkter Operator mit nicht abgeschlossenen Definitionsbereich ist der Operator $0|_{\mathcal{D}(T)}$ *nicht abgeschlossen.*

Behauptung 2. *Der Operator T ist abgeschlossen.*

Beweis. *Schreibe den Operator T als Produkt zweier Operatoren AB mit*

$$(Ax)_{2n-1} = nx_{2n-1}, \qquad (Ax)_{2n} = x_{2n}$$

auf

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (x(n)) \in \ell^2(\mathbb{N}) | \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 |x_{2n-1}|^2 < \infty \right\}$$

und

$$(Bx)_{2n-1} = x(2n), \qquad (Bx)_{2n} = 0$$

auf $\mathcal{D}(B) = \ell^2(\mathbb{N})$. *Der Operator B ist beschränkt, denn*

$$\|Bx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_{2n}|^2 \le \|x\|_{\ell^2}^2.$$

Der inverse Operator A^{-1} *ist abgeschlossen, denn*

$$(A^{-1}x)_{2n-1} = \frac{1}{n} x_{2n-1}, \qquad (A^{-1}x)_{2n} = x_{2n}$$

auf $\mathcal{D}(A^{-1}) = \ell^2(\mathbb{N})$. *Somit ist auch der Operator A abgeschlossen. Nach Satz 7.14 ist das Produkt AB abgeschlossen.*

(2) Ist A stetig und B abgeschlossen, so braucht das Produkt AB nicht abgeschlossen zu sein. Als Beispiel wählen wir $X = Y = C([0,1])$, $Z = \mathbb{K}$, $(Bu)(t) := u'(t)$ *mit* $\mathcal{D}(B) = C^1([0,1])$ *und* $Av := v(1)$ *mit* $\mathcal{D}(A) = C([0,1])$. *Der Operator B ist abgeschlossen und A ist stetig. Das Produkt AB mit* $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(B) = C^1([0,1])$, $u \mapsto u'(1)$ *ist nicht abgeschlossen und sogar nicht abschließbar. Um das zu zeigen, wähle die Funktionenfolge* $v_n(t) = t^n$ *in* $C([0,1])$ *und setze* $u_n(t) = \int_0^t v_n(s)ds = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. *Dann gilt* $u_n \to 0$ *gleichmäßig, aber* $ABu_n = 1$.

(3) Ist A abgeschlossen und B stetig invertierbar, so braucht das Produkt AB nicht abgeschlossen zu sein. Als Beispiel wählen wir $X = Y = C([0,1])$, $Z = \mathbb{K}$, $(Bu)(t) := u'(t)$ *mit* $\mathcal{D}(B) = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = 0\}$ *und* $Av := v(1)$ *mit* $\mathcal{D}(A) = C([0,1])$. *Der Operator B ist stetig invertierbar und A ist stetig und abgeschlossen. Das Produkt AB mit* $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(B) = C^1([0,1])$, $u \mapsto u'(1)$ *ist nicht abgeschlossen und sogar nicht abschließbar. Beweis wie oben in (2).*

Noch ein Kriterium der Abgeschlossenheit:

Satz 7.15. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Sei*

$$\|x\|_T := \left(\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2\right)^{1/2}$$

auf dem Vektorraum $\mathcal{D}(T)$. Der Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn der normierter Raum $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist.

Beweis. Der Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn sein Graph $G(T) \subset X \times Y$ bezüglich der Norm

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\right)^{1/2}$$

abgeschlossen ist. Also ist $(G(T), \|\cdot\|_{X\times Y})$ ein Banachraum. Somit ist jede Cauchyfolge (x_n, Tx_n), $x_n \in \mathcal{D}(T)$, konvergent, d.h. jede Cauchyfolge (x_n) in $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ konvergiert. □

7.3. Der adjungierte Operator

Definition 7.16. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Ein Operator $S : Y' \to X'$ heißt* formal adjungiert *zu T, falls gilt: $y'(Tx) = (Sy')(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und alle $y' \in \mathcal{D}(S)$.*

Im Allgemeinen ist der formal adjungierter Operator S nicht eindeutig bestimmt:

(1) Sei $S = 0$ mit $\mathcal{D}(S) = \{0\}$. Dann ist $y'(Tx) = (Sy')(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und $y' = 0$.

(2) Es gelte $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq X$. Sei $\ell \in X'$, $\ell \neq 0$, ein stetiges lineares Funktional mit $\ell(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Sei S ein formal adjungierter zu T Operator. Sei $f : \mathcal{D}(S) \to \mathbb{K}$ ein beliebiges lineares Funktional. Setze

$$\widetilde{S}y' := Sy' + f(y')\ell, \qquad \widetilde{S} : Y' \to X', \quad \mathcal{D}(\widetilde{S}) = \mathcal{D}(S).$$

Dann gilt

$$\left(\widetilde{S}y'\right) = (Sy')(x) + f(y')l(x) = (Sy')(x) = y'(Tx)$$

für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und alle $y' \in \mathcal{D}(S)$. Also ist $\widetilde{S}$ ebenfalls ein formal adjungierter zu T Operator.

Satz 7.17. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Ist T dicht definiert, so existiert ein eindetig bestimmter* maximaler *(d.h. mit maximalem Definitionsbereich) zu T formal adjungierter Operator. Dieser wird mit T' bezeichnet und heißt der zu T* adjungierter Operator.

Beweis. (1) Dei $\mathcal{D}'$ die Menge aller linearen stetigen Funktionale y' auf Y, für die die Abbildung $X \supset \mathcal{D}(T) \ni x \mapsto y'(Tx)$ stetig ist, d.h.

$$\mathcal{D}' := \Big\{ y' \in Y' \,|\, \text{es gibt ein } x' \in X', \text{ sodass} \\ y'(Tx) = x'(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T) \Big\}.$$

Diese Menge ist offensichtlich ein Vektorraum.

(2) Existiert ein $x' \in X'$ mit der Eigenschaft, dass $y'(Tx) = x'(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt, so ist es eindeutig. Um das zu sehen, nehmen wir an,

dass $y'(Tx) = x_1'(x)$ und $y'(Tx) = x_2'(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt. Also ist $x_1'(x) = x_2'(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$. Da $\mathcal{D}(T)$ dicht in X liegt, gilt $x_1' = x_2'$.

(3) Setze $T'y' := x'$ mit $\mathcal{D}(T') := \mathcal{D}'$. T' ist linear unf formal adjungiert zu T, denn

$$(T'y')(x) = x'(x) = y'(Tx) \qquad \text{gilt für alle } x \in \mathcal{D}(T) \text{ und } y' \in \mathcal{D}(T').$$

(4) Sei S ein formal adjungierter zu T Operator. Dann gilt $y'(Tx) = (Sy')(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und $y' \in \mathcal{D}(S)$, d.h. die Abbildung $\mathcal{D}(T) \ni x \mapsto y'(Tx)$ ist stetig für alle $y' \in \mathcal{D}(S)$. Also ist S eine Einschränkung von T', $S \subset T'$. □

Seien nun X, Y Hilberträume, $T : X \to Y$ dicht definiert. Man definiert den Hilbertraum-adjungierten Operator als

$$T^* := C_X^{-1} T' C_Y.$$

Hier sind $C_X : X \to X'$ und $C_Y : Y \to Y'$ Abbildungen, die jedem Element $x \in X$ bzw. $y \in Y$ stetige lineare Funktionale $\langle x, \cdot \rangle_X$ bzw. $\langle y, \cdot \rangle_Y$ zuordnen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz sind C_X und C_Y bijektive Isometrien. Die sind linear, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und konjugiert linear, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.

Nach Satz 7.17 (und dessen Beweis) ist der Hilbertraum-adjungierter zu T Operator $T^* : Y \to X$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T^*) = \Big\{ y \in Y \,|\, & \text{es gibt ein } \tilde{x} \in X \text{ mit} \\ & \langle y, Tx \rangle_Y = \langle \tilde{x}, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T), \\ T^* y := \tilde{x}. & \end{aligned}$$

Für einen unbeschränkten dicht definierten Operator ist a priori gar nicht klar, wie groß der Definitionsbereich des adjungierten Operators ist. Folgendes Beispiel zeigt, dass der Definitionsbereich des adjungierten Operators sogar trivial sein kann.

Beispiel. Behauptung. *Es gibt paarweise disjunkte unendliche Mengen $A_k = \{n_{k,l} \in \mathbb{N} \,|\, l \in \mathbb{N}\}$, $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.*

Beweis. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben:*

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}, \qquad p_i \neq p_j, i \neq j.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setze

$$A_k = \{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \,|\, p_1, p_2, \dots, p_k \quad \text{prim}, m_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, k\}.$$

Ordne das Element "1" einer beliebigen Menge zu. $\boxed{B}$

Sei $X = Y = \ell^2(\mathbb{N})$. Betrachte den Operator

$$Tx = \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{n_{1,l}}, \sum_{l=1}^{\infty} x_{n_{2,l}}, \dots \right)$$

auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T) = \ell_0^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \,|\, \text{nur endlich viele } x_n \neq 0 \right\}.$$

Der Operator T ist dicht definiert.

Sei $y' \in \mathcal{D}(T')$ beliebig. Setze $x' = T'y'$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{D}(T)$:

$$y'(Tx) = (T'y')(x) = x'(x) = \sum_n \xi_n x_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \xi_{n_{k,l}} x_{n_{k,l}} \tag{7.3}$$

für ein $(\xi_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Andererseits gilt

$$y'(Tx) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \eta_k x_{n_{k,l}} \tag{7.4}$$

für ein $(\eta_k) \in \ell^2$.

Für beliebige $k', l' \in \mathbb{N}$ setze nun $x = e_{n_{k',l'}}$, d.h. $x_n = \delta_{n,n_{k',l'}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Vergleichen von (7.9) und (7.4) liefert $\xi_{n_{k,l}} = \eta_k$ für alle $l, k \in \mathbb{N}$, d.h. die Teilfolgen $(\xi_{n_{k,l}})_{l\in\mathbb{N}}$ sind konstant für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist $(xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ genau dann, wenn $\xi_{n_{k,l}} = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$, d.h. $\eta_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $y' = 0$.

Der adjungierte Operator besitzt eine einfache geometrische Interpretation. Bevor wir zum entsprechenden Satz kommen, werden wir zunächst einige einfache Eigenschaften von Dualräumen diskutieren.

Bemerkungen. *(1) Ist der Raum $X \times Y$ mit der Norm $\|(x,y)\|_{X\times Y} = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$ ausgestattet, so ist $\|z'\| = \sqrt{\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2}$ die Operatornorm auf dem Dualraum $(X \times Y)'$. Zum* Beweis *bemerken wir, dass $z'(x,y) = z'(x,0) + z'(0,y)$ für alle $(x,y) \in X \times Y$ gilt. Folglich erhalten wir*

$$\begin{aligned}
\|z'\|_{(X\times Y)'} &= \sup_{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \le 1} |z'(x,y)| \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \sup_{\substack{\|x\|_X^2 \le t^2 \\ \|y\|_Y^2 \le 1-t^2}} \left(|z'(x,0)| + |z'(0,y)|\right) \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left(t\|z'(\cdot,0)\|_{X'} + \sqrt{1-t^2}\|z'(0,\cdot)\|_{Y'}\right).
\end{aligned}$$

Die Funktion $f(t) := t\|z'(\cdot,0)\|_{X'} + \sqrt{1-t^2}\|z'(0,\cdot)\|_{Y'}$ besitzt das absolute Maximum an der Stelle $t = \|z'(\cdot,0)\|_{X'} \left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{-1/2}$ und somit gilt

$$\begin{aligned}
\|z'\|_{(X\times Y)'} &\le \frac{\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2}{\left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{1/2}} \\
&= \left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Umgekehrt, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $(x,y) \in X \times Y$ mit $\|x\|_X = \|y\|_Y = 1$, sodass $z'(x,0) \ge \|z'(\cdot,0)\|_{X'} - \varepsilon$ und $z'(0,y) \ge \|z'(0,\cdot)\|_{Y'} - \varepsilon$. Setze

$$z = \left(tx, \sqrt{1-t^2}y\right)$$

mit

$$t = \|z'(\cdot,0)\|_{X'} \left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{-1/2}$$

und berechne

$$\begin{aligned}
z'(z) &= z'(tx,0) + z'(0,\sqrt{1-t^2}y) = tz'(x,0) + \sqrt{1-t^2}z'(0,y) \\
&\geq t\|z'(\cdot,0)\|_{X'} + \sqrt{1-t^2}\|z'(0,\cdot)\|_{Y'} - \varepsilon t - \varepsilon\sqrt{1-t^2} \\
&= \frac{\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2}{\left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{1/2}} - \varepsilon t - \varepsilon\sqrt{1-t^2} \\
&= \left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{1/2} - \varepsilon t - \varepsilon\sqrt{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus $\|z'\|_{(X\times Y)'} \geq \left(\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2\right)^{1/2}$.

(2) Ist der Raum $X \times Y$ mit der Norm $\|(x,y)\| = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$ ausgestattet, so sind die Räume $(X \times Y)'$ und $X' \times Y'$ mit der Norm $\|(x',y')\|_{X'\times Y'} = (\|x'\|_{X'}^2 + \|y'\|_{Y'}^2)^{1/2}$ isometrisch isomorph, $(X \times Y)' \cong X' \times Y'$. Beweis: *Die Abbildung $\varphi : (X \times Y)' \to X' \times Y'$, $z' \mapsto (z'(\cdot,0), z'(0,\cdot))$ ist bijektiv mit der inversen Abbildung $(z'(\cdot,0), z'(0,\cdot)) \mapsto z'(\cdot,0), z'(0,\cdot) = z'(\cdot,\cdot)$. Nach (1) gilt*

$$\|\varphi z'\|_{X'\times Y'} = \sqrt{\|z'(\cdot,0)\|_{X'}^2 + \|z'(0,\cdot)\|_{Y'}^2} = \|z'\|_{(X\times Y)'}.$$

Also ist φ eine Isometrie.

(3) Aus (2) folgt, dass

$$\varphi\left(G(T)^\perp\right) = \left\{(x',y') \in X' \times Y' \,|\, x'(x) + y'(Tx) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T)\right\}.$$

Satz 7.18. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ dicht definiert. Unter der Identifizierung von $(X \times Y)'$ mit $X' \times Y'$ gilt dann*

$$V'G(-T') = G(T)^\perp,$$

wobei $V' : Y' \times X' \to X' \times Y'$, $(y',x') \mapsto (x',y')$ und

$$G(T)^\perp := \left\{z' \in (X \times Y)' \,|\, z'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in G(T)\right\}$$

der Annihilator von $G(T)$ ist. Insbesondere ist der adjungierte Operator T' abgeschlossen.

Beweis. Sei S formal adjungiert zu T, d.h. für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und $y' \in \mathcal{D}(S)$ gilt

$$\begin{aligned}
y'(Tx) = (Sy')(x) &\Leftrightarrow -(Sy')(x) + y'(Tx) = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(-Sy',y')}_{\in X'\times Y'}\big(\underbrace{(x,Tx)}_{\in X\times Y}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow V'(y',-Sy')\left((x,Tx)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $V'G(-S) \subset G(T)^\perp$.

Sei nun $S = T'$. Sei $(-x',y') \in G(T)^\perp$ beliebig, d.h.

$$-x'(x) + (T'y')(x) = -x'(x) + y'(Tx) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T).$$

Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ ist dicht und somit $x' = T'y'$. Folglich gilt

$$(-x',y') = (-T'y',y') = V'(y',-T'y') \in V'G(-T').$$

Also ist $VG(-T') \supset G(T)^\perp$. $\square$

Korollar 7.19. *Seien X, Y Banachräume. Seien T und S dicht definierte Operatoren von X nach Y. Aus $S \subset T$ folgt $T' \subset S'$.*

Beweis. Ist $S \subset T$, so ist $G(S) \subset G(T)$ und somit $G(T)^\perp \subset G(S)^\perp$. Nach Satz 7.18 gilt $V'G(-T') \subset V'G(-S')$, d.h. $G(-T') \subset G(-S')$ und somit $G(T') \subset G(S')$. $\square$

Satz 7.20. *Seien X, Y Banachräume. Sei T ein dicht definierter injektiver Operator von X nach Y. Ist $\operatorname{Bild}(T)$ dicht, so ist T' injektiv und es gilt*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

Für Operatoren in Hilberträumen schreibt man oft T^{-*} statt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Für den Beweis des Satzes brauchen wir ein Hilfsergebnis.

Lemma 7.21. *Sei T ein dicht definierter Operator von X nach Y. Dann gilt*

$$\operatorname{Kern}(T') = \operatorname{Bild}(T)^\perp.$$

Beweis. $y' \in \operatorname{Kern}(T')$ gilt genau dann, wenn $y' \in \mathcal{D}(T')$ und $T'y' = 0$. Da T dicht definiert ist, gilt $T'y' = 0$ genau dann, wenn $y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, d.h. $y' \in \operatorname{Bild}(T)^\perp$. $\square$

Beweis von Satz 7.20. Nach Lemma 7.21 ist der Operator T' injektiv. Wir erinnern uns an die Formel $G(T'^{-1}) = V'G(T')$ (siehe den Beweis von Satz 7.8). Mit Satz 7.18 erhalten wir

$$\begin{aligned}
G(T'^{-1}) &= V'V'^{-1}G(-T)^\perp = G(-T)^\perp \\
&= \Big(V^{-1}VG(-T)\Big)^\perp = \Big(V^{-1}G(-T^{-1})\Big)^\perp \\
&= \Big\{z' \in (X\times Y)' \,|\, z'(V^{-1}(y, -T^{-1}y)) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T^{-1})\Big\} \\
&\cong \Big\{(x', y') \in X' \times Y' \,|\, (x', y')(V^{-1}(y, -T^{-1}y)) = 0 \\
&\qquad\qquad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T^{-1})\Big\} \\
&= V'^{-1}\Big\{(y', x') \in Y' \times X' \,|\, (y', x')((y, -T^{-1}y)) = 0 \\
&\qquad\qquad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T^{-1})\Big\} \\
&= V'^{-1}G(-T^{-1})^\perp = V'^{-1}V'G\left((T^{-1})'\right) = G\left((T^{-1})'\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 7.22. *Sei $T : X \to Y$ dicht definiert. Der Operator T ist genau dann beschränkt, wenn $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$. In diesem Fall gilt $\|T'\| = \|T\|$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist T beschränkt, so ist $\overline{T}$ die eindeutige stetige Fortsetzung von T mit $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Nach Korollar 7.19 ist $\overline{T}' \subset T'$, d.h. $\mathcal{D}(T') = Y'$ und $\overline{T}' = T'$. Nach Satz 5.7 ist $\|\overline{T}'\| = \|\overline{T}\|$. Also gilt $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ und $\|T'\| = \|T\|$.

($\Leftarrow$) Sei $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup\left\{|(T'y')(x)| \,\middle|\, x \in X, y' \in Y', \|x\|_X = \|y'\|_{Y'} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{|(T'y')(x)| \,\middle|\, x \in \mathcal{D}(T), y' \in Y', \|x\|_X = \|y'\|_{Y'} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{|(y')(Tx)| \,\middle|\, x \in \mathcal{D}(T), y' \in Y', \|x\|_X = \|y'\|_{Y'} = 1\right\} \\ &= \|T\|.\end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\|T\| = \|T'\| < \infty$. □

Sei nun $T : X \to Y$ dicht definiert mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, d.h. $\operatorname{Bild}(T) = Y$. Nach Satz 7.20 ist der Operator T' injektiv und es gilt

$$(T')^{-1} = (T^{-1})' \in \mathcal{L}(X', Y').$$

Also ist T' ebenfalls stetig invertierbar.

Die Umkehrung gilt auch:

Satz 7.23. *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen. Gilt $(T')^{-1} \in \mathcal{L}(X', Y')$, so ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ und es gilt $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.*

Beweis. Seien $l \in X'$ und $x \in \mathcal{D}(T)$ beliebig. Wegen $\operatorname{Bild}((T')^{-1}) = \mathcal{D}(T')$ gilt

$$\left((T')^{-1}l\right)(Tx) = (T'(T')^{-1}l)(x) = l(x). \tag{7.5}$$

Zu jedem $x \in X$ gibt es ein lineares stetiges Funktional $l \in X'$ mit $\|l\| = 1$ und $l(x) = \|x\|$. Folglich gilt für alle $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\begin{aligned}\|x\| = l(x) &\overset{(7.5)}{=} \left((T')^{-1}l\right)(Tx) \\ &\leq \|(T')^{-1}l\| \cdot \|Tx\| \leq \|(T')^{-1}\| \cdot \underbrace{\|l\|}_{=1} \cdot \|Tx\|\end{aligned}$$

und somit

$$\|Tx\| \geq \left\|(T')^{-1}\right\|^{-1} \|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T). \tag{7.6}$$

Behauptung. Aus der unteren Schranke (7.6) folgt, dass $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Diese Behauptung wurde früher für Operatoren $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bereits bewiesen. Hier beweisen wir diese Behauptung für dicht definierte Operatoren mit injektivem adjungiertem T'.

Beweis. Die untere Schranke (7.6) impliziert, dass T injektiv ist. Somit existiert T^{-1} mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = \operatorname{Bild}(T)$. In (7.6) setze $x = T^{-1}y$ für ein $y \in \mathcal{D}(T^{-1})$:

$$\|T^{-1}y\| \leq \left\|(T')^{-1}\right\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T^{-1}).$$

Also ist T^{-1} beschränkt. Da T^{-1} abgeschlossen ist, ist $\mathcal{D}(T^{-1}) = \operatorname{Bild}(T)$ abgeschlossen.

Angenommen, $\operatorname{Bild}(T) \neq Y$. Dann gäbe es ein $y' \in Y'$, $y' \neq 0$, sodass $y'(y) = 0$ für alle $y \in \operatorname{Bild}(T)$, d.h.

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T).$$

Da der Operator T dicht definiert ist, gilt $T'y' = 0$. Also ist T' nicht injektiv. Widerspruch!

Somit ist der Operator T^{-1} beschränkt mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = Y$, d.h. $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. $\boxed{\text{B}}$

Dass in diesem Fall $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ gilt, haben wir bereits bewiesen. $\square$

SATZ 7.24. *Seien X, Y, Z Banachräume, lineare Operatoren $T : Y \to Z$, $S : X \to Y$ dicht definiert.*

(1) Ist $TS : X \to Z$ dicht definiert, so gilt

$$(TS)' \supset S'T'.$$

(2) Ist $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, so ist TS dicht definiert und es gilt

$$(TS)' = S'T'.$$

(3) Ist S injektiv mit $S^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, so ist TS dicht definiert und es gilt

$$(TS)' = S'T'.$$

BEMERKUNG. *Im Allgemeinen gilt die Gleichheit in (1) nicht! Als Beispiel wählen wir $X = Y = Z = \ell^2(\mathbb{N})$. Sei*

$$(Tx)_n = nx_n \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{D}(T) = \{(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid (nx_n) \in \ell^2(\mathbb{N})\}$$

und $S = T^{-1}$. Dann gilt $T^* = T$, $S^* = S$, $TS = \mathrm{id}_{\ell^2}$ und $ST = \mathrm{id}|_{\mathcal{D}(T)}$. Folglich ist

$$(TS)^* = \mathrm{id}_{\ell^2}^* = \mathrm{id}_{\ell^2} \neq \mathrm{id}|_{\mathcal{D}(T)} = ST = S^*T^*.$$

BEWEIS. (1) Betrachte

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(S'T') &= \{z' \in \mathcal{D}(T') \mid T'z' \in \mathcal{D}(S')\} \\
&= \{z' \in \mathcal{D}(T') \mid \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit} \\
&\qquad\quad (T'z')(Sx) = x'(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(S)\} \\
&\subset \{z' \in \mathcal{D}(T') \mid \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit} \\
&\qquad\quad (T'z')(Sx) = x'(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(TS) \subset \mathcal{D}(S)\} \\
&= \{z' \in \mathcal{D}(T') \mid \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit} \\
&\qquad\quad z'(TSx) = x'(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(TS) \subset \mathcal{D}(S)\} \\
&= \mathcal{D}((TS)').
\end{aligned}$$

Ferner gilt für jedes $z' \in \mathcal{D}(S'T')$ und jedes $x \in \mathcal{D}(TS)$

$$\big((TS)'z'\big)(x) = z'(TSx) = (T'z')(Sx) = \big(S'T'z'\big)(x).$$

(2) Wegen $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ ist $\mathcal{D}(TS) = \mathcal{D}(S)$ und $T' \in \mathcal{L}(Z',Y')$. Nun betrachte

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(S'T') &= \{z' \in Z' \,|\, T'z' \in \mathcal{D}(S')\} \\
&= \{z' \in Z' \,|\, \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit} \\
&\qquad\quad (T'z')(Sx) = x'(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(S)\} \\
&= \{z' \in Z' \,|\, \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit} \\
&\qquad\quad z'(TSx) = x'(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(S)\} \\
&= \mathcal{D}((TS)').
\end{aligned}$$

(3) Wegen (1) genügt es nur noch $\mathcal{D}((TS)') \subset \mathcal{D}(S'T')$ zu zeigen. Wir beginnen mit folgenden einfachen Beobachtungen:

(a) $\mathcal{D}(TS) = S^{-1}\mathcal{D}(T)$. Somit ist $\mathcal{D}(TS)$ dicht in X, denn zu jedem $x \in X$ existiert eine kovergente Folge in Y mit dem Grenzwert Sx;
(b) Die Abbildung $\mathcal{D}(T) \ni y \mapsto x = S^{-1}y \in \mathcal{D}(TS)$ ist stetig;
(c) Ist $\mathcal{D}(T) \ni y \mapsto z'(Ty)$ stetig, so ist $z' \in \mathcal{D}(T')$.

Nun sei $z' \in \mathcal{D}((TS)')$ beliebig. Dann ist die Abbildung $\mathcal{D}(TS) \ni x \mapsto z'(TSx)$ stetig. Mit (b) folgt daraus, dass die Abbildung

$$\mathcal{D}(T) \ni y \mapsto z'(TSS^{-1}y) = z'(Ty)$$

stetig ist. Mit (c) ist $z' \in \mathcal{D}(T')$, d.h. $\mathcal{D}((TS)') \subset \mathcal{D}(T')$.

Sei $x \in \mathcal{D}(TS)$ beliebig. Einerseits gilt

$$z'(TSx) = (T'z')(Sx)$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
z'(TSx) &= z'\left((TS)S^{-1}Sx\right) = \left((TS)'z'\right)\left(S^{-1}Sx\right) \\
&= \left((S^{-1})'(TS)'z'\right)(Sx).
\end{aligned}$$

Die Menge $S\mathcal{D}(TS) = SS^{-1}\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ ist dicht in Y. Somit gilt

$$T'z' = (S^{-1})'(TS)'z' \overset{\text{Satz 7.20}}{=} (S')^{-1}(TS)'z' \in \mathcal{D}(S').$$

Also ist $z' \in \mathcal{D}(S'T')$ und folglich $\mathcal{D}((TS)') \subset \mathcal{D}(S'T')$. □

Satz 7.25. *Seien X, Y Banachräume, T und S Operatoren von X nach Y.*
(a) Ist $T + S$ dicht definiert, so gilt

$$(T+S)' \supset T' + S'.$$

(b) Ist $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ und T dicht definiert, so gilt

$$(T+S)' = T' + S'.$$

Bemerkung. *In Teil (a) gilt die Gleichheit im Allgemeinen nicht. Sei T ein dicht definierter unbeschränkter Operator. Setze $S = -T$. Dann gilt*

$$(T+S)' = \left(0|_{\mathcal{D}(T)}\right)' = 0 \neq 0|_{\mathcal{D}(T)} = T' + S'.$$

Beweis. (a) Es genügt zu zeigen, dass die Operatoren $T+S$ und $T'+S'$ formal adjungiert sind. Seien $x \in \mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$ und $y' \in \mathcal{D}(T'+S') = \mathcal{D}(T') \cap \mathcal{D}(S')$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} y'((T+S)x) &= y'(Tx) + y'(Sx) = (T'y')(x) + (S'y')(x) \\ &= ((T'+S')y')(x). \end{aligned}$$

(b) Wegen (a) ist nur noch

$$\mathcal{D}((T+S)') \subset \mathcal{D}(T') \cap \mathcal{D}(S') = \mathcal{D}(T')$$

zu zeigen. Aus (a) folgt

$$\mathcal{D}((T+S)') = \mathcal{D}((T+S)' - S') \subset \mathcal{D}(T').$$

□

Satz 7.26. *Seien X, Y reflexive Banachräume, $T : X \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann ist T abschließbar genau dann, wenn T' dicht definiert ist. In diesem Fall gilt*

$$\overline{T} = J_Y^{-1} T'' J_X.$$

Hierbei sind $J_X : X \to X''$, $J_Y : Y \to Y''$ kanonische Einbettungen. Insbesondere für X, Y Hilberträume gilt $T^{**} = \overline{T}$.

Bemerkungen. *(1) Ist T beschränkt, so ist $J_Y^{-1} T'' J_X$ die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von T auf ganz X.*

(2) Die Implikation

„T' ist dicht definiert $\Rightarrow$ T ist abschließbar"

gilt auch für allgemeine nicht reflexive Banachräume. Beweis *selbst.*

(3) Nach Bemerkung (2) vor Satz 7.18 oben sind $(X \times Y)''$ und $X'' \times Y''$ isometrisch isomotph. Unter der Identifizierung von $(X \times Y)''$ mit $X'' \times Y''$ gilt $J_{X \times Y} = (J_X, J_Y)$.

Beweis. Behauptung 1. Sei Z ein reflexiver Banachraum. Sei $U \subset Z$ ein Teilraum. Dann ist $J_Z^{-1} U^{\perp\perp} = \overline{U}$.

Beweis. Wegen

$$U^{\perp\perp} = \{z'' \in Z'' \,|\, z''(z') = 0 \quad \text{für alle } z' \in U^\perp\}$$

gilt

$$\begin{aligned} J_Z^{-1} U^{\perp\perp} &= \{z \in Z \,|\, (J_Z z)(z') = 0 \quad \text{für alle } z' \in U^\perp\} \\ &= \{z \in Z \,|\, z'(z) = 0 \quad \text{für alle } z' \in U^\perp\} \\ &= \overline{U}. \end{aligned}$$

B1

($\Leftarrow$) Sei T' dicht definiert. Nach der Behauptung ist $\overline{G(T)} = J_{X \times Y}^{-1} G(T)^{\perp\perp}$. Setze

$$V'' : X'' \times Y'' \to Y'' \times X'', \qquad (x'', y'') \mapsto (y'', x'').$$

Wegen $G(T)^\perp = V'G(-T')$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{G(T)} &= J_{X\times Y}^{-1}\left(V'G(-T')\right)^\perp = J_{X\times Y}^{-1}V''^{-1}G(-T')^\perp \\ &= J_{X\times Y}^{-1}V''^{-1}V''G(T'') = J_{X\times Y}^{-1}G(T'') \\ &= J_{X\times Y}^{-1}\left\{(x'', T''x'') \mid x'' \in \mathcal{D}(T'')\right\} \\ &= \left\{(J_X^{-1}x'', J_Y^{-1}T''x'') \mid x'' \in \mathcal{D}(T'')\right\} \\ &= \left\{(x, J_Y^{-1}T''J_X x) \mid x \in J_X^{-1}\mathcal{D}(T'')\right\}.\end{aligned}$$

Also ist T abschließbar und $\overline{T} = J_Y^{-1}T''J_X$.

($\Rightarrow$) Sei T abschließbar. Angenommen, T' wäre nicht dicht definiert. Nach der Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach gäbe es ein $y'' \in Y''$, sodass $y'' \in \mathcal{D}(T')^\perp$, $y'' \neq 0$. Sei $z'' = (0, y'') \in X'' \times Y''$.

Behauptung 2. $z'' \in V''^{-1}G(T')^\perp$.

Beweis. Sei $z' \in G(T')$ beliebig, d.h. $z' = (y', T'y') \in Y' \times X'$ für ein $y' \in \mathcal{D}(T')$. Dann ist $z''(V'z') = y''(y') = 0$. Also ist $z'' \in (V'G(T'))^\perp = V''^{-1}G(T')^\perp$. $\boxed{\text{B2}}$

Somit ist der Teilraum $V''^{-1}G(T')^\perp$ kein Graph eines Operators. Wegen $J_{X\times Y}^{-1}V''^{-1}G(T')^\perp = \overline{G(-T)}$ ist der Operator T nicht abschließbar. Widerspruch! □

7.4. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Definition 7.27. *Sei X ein Hilbertraum.*

(a) Ein Operator $T : X \to X$ heißt hermitesch*, wenn er zu sich selbst formal adjungiert ist, d.h. wenn gilt*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \textit{für alle } x, y \in \mathcal{D}(T).$$

(b) Ein Operator $T : X \to X$ heißt symmetrisch*, wenn er dicht definiert ist und $T \subset T^*$ gilt.*

(c) Ein Operator $T : X \to X$ heißt selbstadjungiert*, wenn er dicht definiert ist und $T = T^*$ gilt.*

Satz 7.28. *Sei X ein Hilbertraum.*

(a) Ein Operator $T : X \to X$ ist symmetrisch genau dann, wenn er dicht definiert und hermitesch ist.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ein dicht definierter Operator $T : X \to X$ ist symmetrisch genau dann, wenn sein numerischer Wertebereich

$$W(T) := \{\langle x, Tx\rangle \mid x \in \mathcal{D}(T), \quad \|x\| = 1\}$$

eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. (a) ($\Rightarrow$) ist klar.

($\Leftarrow$) Für alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Für den adjungierten Operator T^* gilt

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T) \text{ und } y \in \mathcal{D}(T^*).$$

Da T^* der maximale zu T formal adjungierte Operator ist, gilt $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ und Also ist

$$\langle T^* y, x\rangle = \langle Ty, x\rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{D}(T),$$

d.h. $T \subset T^*$.

(b) Für alle $x \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$ gilt

$$\overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^* x\rangle.$$

($\Rightarrow$) Ist T symmetrisch, so gilt $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ und $T^*|_{\mathcal{D}(T)} = T$ und folglich

$$\overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle x, Tx\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T),$$

d.h. $W(T) \subset \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Ist $W(T) \subset \mathbb{R}$, so ist $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$. Insbesondere für beliebige $x, y \in \mathcal{D}(T)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle x + iy, T(x+iy)\rangle = \langle x, Tx\rangle + \langle y, Ty\rangle \\ + i\langle x, Ty\rangle - i\langle y, Tx\rangle \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \langle x + iy, T(x+iy)\rangle &= \langle T(x+iy), x+iy\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + i\langle Tx, y\rangle - i\langle Ty, x\rangle \\ &= \overline{\langle x, Tx\rangle} + \overline{\langle y, Ty\rangle} + i\langle Tx, y\rangle - i\langle Ty, x\rangle \\ &= \langle x, Tx\rangle + \langle y, Ty\rangle + i\langle Tx, y\rangle - i\langle Ty, x\rangle. \end{aligned}$$

Also ist

$$\langle x, Ty\rangle - \langle y, Tx\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle. \tag{7.7}$$

Nun betrachte

$$\langle x + y, T(x+y)\rangle = \langle x, Tx\rangle + \langle y, Ty\rangle + \langle x, Ty\rangle + \langle y, Tx\rangle.$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \langle x + y, T(x+y)\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle \\ &= \langle x, Tx\rangle + \langle y, Ty\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle, \end{aligned}$$

d.h.

$$\langle x, Ty\rangle + \langle y, Tx\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle. \tag{7.8}$$

Die Summe von (7.7) und (7.8) ergibt $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$. Also ist T hermitesch. □

Satz 7.29. *(a) Jeder symmetrische Operator ist abschließbar. Sein Abschluss ist ebefalls symmetrisch.*

(b) Jeder selbstadjungierte Operator ist abgeschlossen.

Beweis. (a) Der Operator T ist eine Einschränkung des abgeschlossenen Operators T^*, d.h. T ist abschließbar. Aus $T \subset \overline{T}$ folgt $\overline{T}^* \subset T^*$.

Behauptung. Für alle $x \in \mathcal{D}(T^*)$ und $y \in \mathcal{D}(\overline{T})$ gilt

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, \overline{T} y\rangle.$$

BEWEIS. Sei $y \in \mathcal{D}(\overline{T})$ beliebig. Dann gibt es eine Folge y_n in $\mathcal{D}(T)$ mit $y_n \to y$ und $Ty_n \to \overline{T}y$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle T^* x, y_n \rangle = \langle x, Ty_n \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T^*)$$

und somit

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, \overline{T}y \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T^*).$$

$\boxed{\text{B}}$

Aus der Behauptung folgt, dass $T^* \subset \overline{T}^*$. Also ist $T^* = \overline{T}^*$. Folglich gilt $\overline{T} \subset T^* = \overline{T}^*$, d.h. $\overline{T}$ ist symmetrisch.

(b) $T = T^*$ abgeschlossen, denn T^* ist abgeschlossen. □

DEFINITION 7.30. *Ein symmetrischer Operator $T : X \to X$ heißt* wesentlich selbstadjungiert, *wenn $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.*

SATZ 7.31. *Sei $T : X \to X$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

(a) *T ist wesentlich selbstadjungiert,*
(b) *T^* ist symmetrisch,*
(c) *T^* ist selbstadjungiert,*
(d) *T^{**} ist selbstadjungiert.*

BEWEIS. (a)⇔(d) ist klar wegen $T^{**} = \overline{T}$ (Satz 7.28).

(c)⇒(d) ist klar wegen $T^* = T^{**}$.

(d)⇒(c) Ist T^{**} selbstadjungiert, so gilt $T^{***} = T^{**}$. Wegen $T^{**} = \overline{T}$ ist T^{***} dicht definiert. Folglich gilt

$$T^{**} = \overline{T^{**}} = T^{****} = T^{***} = \overline{T^*} = T^*,$$

d.h. T^* ist self-adjoint.

(c)⇒(b) ist klar.

(b)⇒(c) Aus $T^* \subset T^{**} = \overline{T}$ und $\overline{T} \subset T^*$ folgt $T^* = T^{**}$. □

BEISPIELE. *(1) Sei $X = Y = L^p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, $(Tu)(t) = u'(t)$ mit*

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in L^p([0,1]) \mid u \quad \text{ist absolut stetig mit } u' \in L^p([0,1])\},$$
$$\mathcal{D}(T_1) = \{u \in \mathcal{D}(T) \mid u(0) = 0\},$$
$$\mathcal{D}(T_2) = \{u \in \mathcal{D}(T) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Die Operatoren T, T_1 und T_2 sind dicht definiert.

Sei $j : L^p([0,1])' \to L^q([0,1])$, $\ell \mapsto g_\ell$ der isometrische Isomorphismus,

$$\ell(f) = \int_0^1 g_\ell(t) f(t) dt \quad \text{für alle } f \in L^p([0,1]).$$

BEHAUPTUNG 1. *$T' = -j^{-1} S_2 j$.*

BEWEIS. *Sei $\ell_g \in \mathcal{D}(T')$ beliebig, $g := j\ell_g$. Setze $\ell_f := T'\ell_g$, $f := j\ell_f$. Für beliebiges $u \in \mathcal{D}(T)$ betrachte*

$$\int_0^1 f(t) u(t) dt = \ell_f(u) = (T'\ell_g)(u) = \ell_g(Tu) = \int_0^1 g(t) u'(t) dt. \tag{7.9}$$

Setze

$$h(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Dann ist $h \in L^q$ absolut stetig, $f = h'$ fast überall mit $h(0) = 0$. Für beliebiges $u \in \mathcal{D}(T)$ betrachte

$$\int_0^1 f(t)u(t)dt = \int_0^1 h'(t)u(t)dt$$
$$= -\int_0^1 h(t)u'(t)dt + h(1)u(1).$$

Wegen (7.9) erhalten wir

$$\int_0^1 (g(t) + h(t))\, u'(t)dt = h(1)u(1). \tag{7.10}$$

Sei nun $v \in L^p([0,1])$ beliebig. Setze

$$\widetilde{u(t)} = -\int_0^1 v(s)ds.$$

Also ist $\tilde{u} \in L^p$, absolut stetig, $\tilde{u}' = v$ und $\tilde{u}(1) = 0$. Insbesondere ist $\tilde{u} \in \mathcal{D}(T)$.

Wegen (7.10) und $\tilde{u}(1) = 0$ gilt

$$(\ell_g + \ell_h)(v) = \int_0^1 (g(t) + h(t))\, \tilde{u}'(t)dt = h(1)\tilde{u}(1) = 0.$$

Somit gilt $\ell_g = -\ell_h$, d.h. $g = -h$. Nun folgt aus (7.10), dass $h(1)u(1) = 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(T)$. Folglich ist $h(1) = 0$, denn es gibt ein $u \in \mathcal{D}(T)$ mit $u(1) \neq 0$. Also ist g absolut stetig, $g' = -h' = -f$ und $g(0) = g(1) = 0$, d.h. $g \in \mathcal{D}(S_2)$. Das beweist die Inklusion $\mathcal{D}(T') = \mathcal{D}(j^{-1}S_2 j)$.

Umgekehrt gilt für alle $u \in \mathcal{D}(T)$ und $f \in \mathcal{D}(S_2)$

$$\ell_f(Tu) = \int_0^1 f(t)u'(t)dt = -\int_0^1 f'(t)u(t)dt = -\ell_{S_2 f}(u),$$

d.h. $j^{-1}S_2 j \subset \mathcal{D}(T')$. $\boxed{B1}$

Behauptung 2. *$T_2' = -j^{-1}Sj$.*

Beweis. *Sei $\ell_g \in \mathcal{D}(T_2')$ beliebig, $g = j\ell_g$. Setze $\ell_f = T_2'\ell_g$, $f = j\ell_f$. Für beliebiges $u \in \mathcal{D}(T_2)$ betrachte*

$$\int_0^1 f(t)u(t)dt = \ell_f(u) = (T_2'\ell_g)(u) = \ell_g(T_2 u) = \int_0^1 g(t)u'(t)dt. \tag{7.11}$$

Setze

$$h(t) = c + \int_0^t f(s)ds.$$

Wähle die Konstante c so, dass

$$\int_0^1 h(t)dt = -\int_0^1 g(t)dt. \tag{7.12}$$

also ist h absolut stetig, $h \in L^q$ und $f = h'$ fast überall. Für beliebiges $u \in \mathcal{D}(T_2)$ betrachte

$$\int_0^1 f(t)u(t)dt = \int_0^1 h'(t)u(t)dt = -\int_0^1 h(t)u'(t)dt.$$

Bilden man die Differenz von (7.11) und (7.12), so bekommt man

$$\int_0^1 (g(t) + h(t))\, u'(t)dt = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}(T_2). \tag{7.13}$$

Sei nun $v \in L^p([0,1])$ beliebig. Schreibe $v(t)$ als die Summe $\widetilde{v}(t) + \int_0^1 v(s)ds$, d.h. $\int_0^1 \widetilde{v}(t)dt = 0$. Setze

$$\widetilde{u}(t) := -\int_t^1 \widetilde{v}(s)ds.$$

Dann ist $\widetilde{u} \in L^p$, absolut stetig, $\widetilde{u}' = \widetilde{v}$ und $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(T_2)$. Betrachte

$$\begin{aligned}(\ell_g + \ell_h)(v) &= (\ell_g + \ell_h)(\widetilde{v}) + (\ell_g + \ell_h)\left(\int_0^1 v(s)ds\right) \\ &= \int_0^1 (g(t) + h(t))\,dt \cdot \int_0^1 v(s)ds + \int_0^1 (g(t) + h(t))\,\widetilde{u}'(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

wegen (7.12) und (7.13). Also ist $\ell_g = -\ell_h$, d.h. $g = -h$. Somit ist g absolut stetig, $g' = -h' = -f \in L^q$, d.h. $g \in \mathcal{D}(S)$.

Umgekehrt gilt für alle $u \in \mathcal{D}(T_2)$ und alle $f \in \mathcal{D}(S)$

$$\ell_f(T_2 u) = \int_0^1 f(t)u'(t)dt = -\int_0^1 f'(t)u(t)dt = -\ell_{Sf}(u).$$

Also gilt $j^{-1}Sj \subset T_2$. $\boxed{B2}$

Behauptung 3. $T_1' = -j^{-1}S_1 j$.

Beweis *selbst.*

Für $p = 2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhalten wir somit

$$(iT)^* = iT_2 \subset iT$$
$$(iT_2)^* = iT \subset iT_2.$$

Also ist der Operator iT_2 symmetrisch und iT nicht symmetrisch.

(2) Sei $X = Y = L^p([0,\infty))$, $1 \leq p < \infty$. Sei $(Tu)(t) = u'(t)$, $T : L^p([0,\infty)) \to L^p([0,\infty))$ mit

$$\mathcal{D}(T) = \left\{u \in L^p([0,\infty)) \,|\, u \text{ absolut stetig mit } u' \in L^p([0,\infty))\right\},$$
$$\mathcal{D}(T_1) = \{u \in \mathcal{D}(T) \,|\, u(0) = 0\}.$$

Ferner sei Sei $(S)v(t) = v'(t)$, $S : L^q([0,\infty)) \to L^q([0,\infty))$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < q \leq \infty$ mit

$$\mathcal{D}(S) = \left\{v \in L^q([0,\infty)) \,|\, v \text{ absolut stetig mit } v' \in L^q([0,\infty))\right\},$$
$$\mathcal{D}(S_1) = \{v \in \mathcal{D}(T) \,|\, v(0) = 0\}.$$

Sei $j : L^p([0,\infty))' \to L^q([0,\infty))$, $\ell \mapsto g_\ell$ der isometrische Isomorphismus,

$$\ell(f) = \int_0^\infty g_\ell(t)f(t)dt \quad \text{für alle } f \in L^p([0,\infty)).$$

Die Operatoren T und T_1 sind dicht definiert.
Wir baruchen folgendes Hilfsergebnis:

Proposition 2. *Für jedes $u \in \mathcal{D}(T)$ gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.*

Beweis. Wir beweisen diese Eigenschaft für $p = 2$. Mit der partiellen Integration erhalten wir

$$\int_0^t \overline{u(s)}u'(s)ds = |u(t)|^2 - |u(0)|^2 - \int_0^t \overline{u'(s)}u(s)ds.$$

Da u und u' in $L^2([0,\infty))$ sind, konvergieren die beiden Integrale füt $t \to \infty$. Also existiert $\lim_{t\to\infty} u(t)$. Notwendigerweise ist der Grenzwert Null.

Für $1 \leq p < \infty$ selbständig beweisen. □

Behauptung 1. $T' = -j^{-1}S_1 j$.

Beweis. *Sei $\ell_g \in \mathcal{D}(T')$ beliebig, $g := j\ell_g$. Setze $\ell_f := T'\ell_g$, $f := j\ell_f$. Für beliebige $u \in \mathcal{D}(T)$ und $f \in \mathcal{D}(S_1)$ wegen $u(t) \to 0$, $t \to \infty$, gilt*

$$\ell_f(Tu) = \int_0^\infty f(t)u'(t)dt = -\int_0^\infty f'(t)u(t)dt = -\ell_{S_1 f}(u),$$

d.h. $\mathcal{D}(j^{-1}S_1 j) \subset \mathcal{D}(T')$.

Umgekehrt, setze

$$h(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Die Funktion h ist absolut stetig, $f = h'$ fast überall mit $h(0) = 0$. Im Gegensatz zu beschränkten Intervallen, können wir a priori nicht behaupten, dass $h \in L^q([0,\infty))$. Stattdessen argumentieren wir wie folgt. Sei $u \in \mathcal{D}(T)$ mit $\operatorname{supp} u \subset [0,N]$, $N > 0$ beliebig. Dann ist $h \in L^q([0,N])$. Es gilt einerseits

$$\int_0^N f(t)u(t)dt = \ell_f(u) = (T'\ell_g)(u) = \ell_g(Tu) = \int_0^N g(t)u'(t)dt$$

und andererseits

$$\int_0^N f(t)u(t)dt = \int_0^N h'(t)u(t)dt = -\int_0^N h(t)u'(t)dt.$$

Folglich ist

$$\int_0^N (g(t) + h(t))\, u'(t)dt = 0. \tag{7.14}$$

Sei nun $v \in L^p([0,N])$ beliebig. Setze

$$\widetilde{u}(t) = -\int_t^N v(s)ds.$$

Dann ist $\widetilde{u} \in L^p([0,N])$, absolut stetig, $\widetilde{u}' = v$ fast überall und $\widetilde{u}(1) = 0$ und die Fortsetzung von $\widetilde{u}(t) = 0$ für $t > N$ ist in $\mathcal{D}(T)$.

Seien $\ell_g^{(N)}$ und $\ell_h^{(N)}$ die Funktionale auf $L^p([0,N])$ definiert durch

$$\ell_g^{(N)}(v) := \int_0^N g(t)v(t)dt \quad \text{und} \quad \ell_n^{(N)}(v:) = \int_0^N h(t)v(t)dt.$$

Sie sind linear und stetig. Wegen (7.14) erhalten wir

$$\ell_g^{(N)}(v) + \ell_h^{(N)}(v) = \int_0^N (g(t) + h(t))\, \widetilde{u}'(t)dt = 0.$$

Also ist $\ell_g^{(N)} = -\ell_h^{(N)}$. *Folglich gilt* $g = -h$ *für fast überall in* $[0, N]$. *Da* $N > 0$ *beliebig ist, gilt* $g(t) = -h(t)$ *für fast alle* $t \in [0, \infty)$. *Somit ist* g *absolut stetig,* $g' = -h' = -f \in L^q([0, \infty))$ *und* $g(0) = 1$, *d.h.* $\mathcal{D}(T') \subset \mathcal{D}(j^{-1})S_1 j$. $\boxed{B1}$

BEHAUPTUNG 2. $T_1' = -j^{-1}Sj$.

BEWEIS *selbst.*

(3) Sei $X = Y = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. *Sei* $(Tu)(t) = u'(t)$, $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ *mit*

$$\mathcal{D}(T) = \left\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid u \text{ absolut stetig mit } u' \in L^p(\mathbb{R})\right\}.$$

Ferner sei Sei $(S)v(t) = v'(t)$, $S : L^q(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ *mit* $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < q \leq \infty$ *mit*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{v \in L^q(\mathbb{R}) \mid v \text{ absolut stetig mit } v' \in L^q(\mathbb{R})\right\}.$$

Sei $j : L^p(\mathbb{R})' \to L^q(\mathbb{R})$, $\ell \mapsto g_\ell$ *der isometrische Isomorphismus,*

$$\ell(f) = \int_{\mathbb{R}} g_\ell(t) f(t) dt \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{R}).$$

BEHAUPTUNG. $T' = -j^{-1}Sj$.

BEWEIS *selbst.*

(4) Sei $X = Y = L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. *Sei* $(Tu)(t) = u''(t)$, $T : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ *mit*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T) &= \left\{u \in L^p([0,1]) \mid u \in C^1,\, u' \text{ absolut stetig mit } u'' \in L^p([0,\infty))\right\},\\
\mathcal{D}(T_1) &= \left\{u \in \mathcal{D}(T) \mid u(0) = u(1) = 0\right\},\\
\mathcal{D}(\dot{T}) &= C_0^\infty([0,1]).
\end{aligned}$$

Ferner sei Sei $(S)v(t) = v'(t)$, $S : L^q([0,1]) \to L^q([0,1])$ *mit* $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < q \leq \infty$ *mit*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(S) &= \left\{v \in L^q([0,1]) \mid v \in C^1,\, v' \text{ absolut stetig mit } v'' \in L^q([0,1])\right\},\\
\mathcal{D}(S_1) &= \left\{v \in \mathcal{D}(S) \mid v(0) = v(1) = 0\right\},
\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG. $\dot{T}' = j^{-1}Sj$ *und* $T_1^* = j^{-1}S_1 j$. *Insbesondere für* $p = 2$ *ist der Operator* $\dot{T}$ *symmetrisch und der Operator* T_1 *selbstajungiert.*

BEWEIS. *Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig. Sei* $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *eine gerade Funktion mit* $\operatorname{supp} \eta \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\eta(t) = 1$ *für* $t \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. *Setze* $k(t,s) = |t-s|\eta(t-s)$. *Sei* $w \in C^\infty$ *mit* $\operatorname{supp} w \subset (2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$ *beliebig. Setze*

$$u(t) = (Kw)(t) := \int_0^1 k(t,s) w(s) ds.$$

Folglich ist $\operatorname{supp} u \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. *Die Funktion* u *ist differenzierbar mit* $u' = K'w$, *wobei* K' *der Integraloperator mit dem Kern* $k'(t,s) := \dfrac{\partial}{\partial t} k(t,s)$. *Der Integralkern hat den Sprung der Höhe* 2 *an der Stelle* $t = s$. *Also gilt* $u'' = 2w + K''w$, *wobei K'' der Integraloperator mit dem Kern $k''(t,s) := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} k(t,s)$. Der Integralkern $k''(t,s)$ ist überall unendlich oft differenzierbar. Somit ist die Funktion unendlich oft differenzierbar und ist identisch Null außerhalb des Intervalls $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Folglich ist $u \in \mathcal{D}(\dot{T})$ mit*

$$\dot{T}u = 2w + K''w.$$

Sei nun $\ell_g \in \mathcal{D}(\dot{T}')$ beliebig, $g := j\ell_g$. Setze $\ell_f := \dot{T}'\ell_g$, $f := j\ell_f$. Für jede Funktion $u \in C_0^\infty([0,1])$ mit $u = Kw$ für eine Funktion $w \in C^\infty$ mit $\operatorname{supp} w \subset (2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$ gilt $\ell_g(\dot{T}u) = \ell_f(u)$ und daher

$$\ell_g(\dot{T}u) = \ell_g(2w + K''w) = 2\ell_g(w) + \ell_{K''g}(w) = \ell_f(u) = \ell_{Kf}(w).$$

Da die Funktionen $w \in C_0^\infty([0,1])$ mit $\operatorname{supp} w \subset (2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$ in $L^p((2\varepsilon, 1-2\varepsilon))$ dicht liegen, erahlten wir

$$g(s) = \frac{1}{2}\left(Kf(s) - K''g(s)\right).$$

Da $f, g \in L^q$ ist, ist g eine stetige Funktion. Ferner ist g stetig differenzierbar mit

$$g'(s) = \frac{1}{2}\left(K'f(s) - K'''g(s)\right).$$

Hier ist die rechte Seite absolut stetig und

$$g''(s) = \frac{1}{2}\left(2f(s) + K''f(s) - K''''g(s)\right).$$

Somit gilt $g'' \in L^q$, denn $g''(s) - f(s)$ stetig ist. Also gilt $\mathcal{D}(\dot{T}') \subset \mathcal{D}(j^{-1}Sj)$.

Umgekehrt, seien $u \in \mathcal{D}(\dot{T})$ und $g \in \mathcal{D}(S)$ beliebig. Dann ist

$$\ell_g(Tu) = \int_0^1 g(t)u''(t)dt = \int_0^1 g''(t)u(t)dt = -\ell_{Sg}(u),$$

d.h. $j^{-1}Sj \subset \dot{T}'$.

Wegen $\dot{T} \subset T_1$ ist $T_1' \subset \dot{T}' = S$. Seien nun $u \in \mathcal{D}(T_1)$ und $\ell_g \in \mathcal{D}(T_1') \subset \mathcal{D}(S)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \ell_g(T_1u) - (T_1'\ell_g)(u) = \ell_g(T_1u) - (j^{-1}Sj\ell_g)(u) \\
&= \ell_g(T_1u) - \ell_{Sg}(u) \\
&= \int_0^1 g(t)u''(t)dt - \int_0^1 g''(t)u(t)dt \\
&= -\int_0^1 g'(t)u'(t)dt + g(t)u'(t)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad + \int_0^1 g'(t)u'(t)dt - g'(t)u(t)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= g(1)u'(1) - g(0)u'(0).
\end{aligned}$$

Da die Werte $u'(0)$ und $u'(1)$ beliebig sein können, gilt somit $g(0) = g(1) = 0$, d.h. $T_1' \subset j^{-1}S_1j$. Umgekehrt gilt für alle $u \in \mathcal{D}(T_1)$ und $f \in \mathcal{D}(S_1)$

$$\ell_f(T_1u) = \int_0^1 f(t)u''(t)dt = \int_0^1 f''(t)u(t)dt = \ell_{S_1f}(u),$$

d.h. $T_1' \supset j^{-1}S_1j$.

7.5. Das Spektrum

Definition 7.32. *Sei X ein Banachraum, $T : X \to X$ ein linearer Operator.*
(a) Die Resolventenmenge *von T ist*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, (T-\lambda) \quad \textit{ist bijektiv als Abbildung von } \mathcal{D}(T) \textit{ nach } X \\ \textit{und} (T-\lambda)^{-1} : X \to X \quad \textit{ist stetig.}\}$$

(b) Die Abbildung $R_T : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$, $R_T(\lambda) := (T-\lambda)^{-1}$ heißt die Resolvente *von T.*
(c) Das Spektrum *von T ist $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$.*

Wir beginnen mit einigen Anmerkungen.
(1) Ist T nicht abgeschlossen, so gilt $\rho(T) = \varnothing$.

Beweis. Ist T nicht abgeschlossen, so ist auch $(T-\lambda)^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ nicht abgeschlossen.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Angenommen, dass $T-\lambda$ als Abbildung von $\mathcal{D}(T)$ nach X bijektiv ist. Dann existiert $(T-\lambda)^{-1}$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}\left((T-\lambda)^{-1}\right) = X$. Da $(T-\lambda)^{-1}$ nicht abgeschlossen ist, ist nach dem Satz von abgeschlossenen Graphen $(T-\lambda)^{-1}$ nicht stetig, d.h. $\lambda \notin \rho(T)$. $\square$

(2) Ist T abgeschlossen, so gilt

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, (T-\lambda) \quad \text{ist bijektiv als Abbildung von } \mathcal{D}(T) \text{ nach } X\}.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig, sodass $(T-\lambda)$ bijektiv als Abbildung von $\mathcal{D}(T)$ nach X ist. Die inverse Abbildung $(T-\lambda)^{-1} : X \to X$ ist abgeschlossen und somit nach dem Satz von abgeschlossenen Graphen stetig. Also gilt $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

(3) Es gibt abgeschlossene Operatoren mit leerem Spektrum. Als Beispiel betrachten wir den abgeschlossenen Operator $T_1 u(t) = u'(t)$ auf $X = C([0,1];\mathbb{C})$ mit $\mathcal{D}(T_1) = \{u \in C^1([0,1]) \,|\, u(0) = 0\}$. Seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in X$ beliebig. Dann genügt ein $u \in X$ der Gleichung $(T_1 - \lambda)u = f$ genau dann, wenn

$$u(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds.$$

Also ist $(T_1 - \lambda) : \mathcal{D}(T) \to X$ bijektiv. Folglich ist $\lambda \in \rho(T_1)$, d.h. $\rho(T_1) = \mathbb{C}$.

Wir bemerken, dass der inverse Operator

$$\left(T_1^{-1} f\right)(t) = \int_0^t f(s) ds$$

nicht surjektiv als Abbildung von X nach X, d.h. $0 \in \sigma(T_1^{-1})$. Mit „$1/0 = \infty$“ kann man diese Eigenschaft folgendermaßen interpretieren: Das Spektrum von T_1 liegt im Unendlichen.

Definition 7.33. *Sei X ein Banachraum, sei $T : X \to X$ ein abgeschlossener Operator. Die Teilmengen der erweiterten komplexen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$*

$$\widetilde{\sigma}(T) := \begin{cases} \sigma(T), & \text{falls } T \in \mathcal{L}(X), \\ \sigma(T) \cup \{\infty\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\widetilde{\rho}(T) := \begin{cases} \rho(T) \cup \{\infty\}, & \text{falls } T \in \mathcal{L}(X), \\ \rho(T) & \text{sonst} \end{cases}$$

heißen erweitertes Spektrum *und* erweiterte Resosolventenmenge.

Wir bemerken, dass $\widetilde{\sigma}(T) \neq \varnothing$.

Satz 7.34. *Sei X ein Banachraum, sei $T : X \to X$ ein abgeschlossener injektiver Operator. Dann bildet die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \varphi(0) = \infty, \qquad \varphi(\infty) = 0$$

$\widetilde{\sigma}(T)$ nach $\widetilde{\sigma}(T^{-1})$ bijektiv ab, d.h.

$$\widetilde{\sigma}(T^{-1}) = \{\varphi(\lambda) \mid \lambda \in \widetilde{\sigma}(T)\}.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \widetilde{\rho}(T)$ beliebig.

(1) Ist $\lambda \notin \{0, \infty\}$, so ist $R_T(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$. Betrachte

$S(\lambda) := TR_T(\lambda) = (T - \lambda)R_T(\lambda) + \lambda R_T(\lambda) = I + \lambda R_T(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

Für jedes $x \in X$ gilt

$$\lambda T^{-1} S(\lambda)x = \lambda R_T(\lambda)x = \frac{1}{(}S(\lambda) - I)x,$$

d.h.

$$-\lambda(T^{-1} - \lambda^{-1})S(\lambda)x = x.$$

Also ist $T^{-1} - \lambda^{-1}$ surjektiv.

Sei nun $v \in X$ beliebig mit $\left(T^{-1} - \lambda^{-1}\right) v = 0$. Dann ist $v - \lambda T^{-1} v = 0$ und folglich $(T - \lambda)v = 0$. Da die Abbildung $T - \lambda$ bijektiv ist, gilt $v = 0$.

Somit ist $T^{-1} - \lambda^{-1}$ bijektiv, d.h. $\lambda^{-1} \in \rho(T^{-1})$.

(2) Sei nun $\lambda = 0$. Dann ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und $0^{-1} = \infty \in \widetilde{\rho}(T^{-1})$.

(3) Sei nun $\lambda = \infty$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X)$ und folglich $T : X \to \text{Bild}(T)$ eine Bijektion. Somit ist $T^{-1} : \mathcal{D}(T^{-1}) = \text{Bild}(T) \to X$ eine Bijektion, d.h. $\infty^{-1} = 0 \in \rho(T^{-1})$. □

KAPITEL 8

Der Spektralsatz

8.1. Der Monotoniesatz

Definition 8.1. *Seien $S, T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert. Wir definieren*

$$S \leq T :\Leftrightarrow T - S \geq 0 \Leftrightarrow \langle x, Sx\rangle \leq \langle x, Tx\rangle \quad \forall x \in X.$$

Eine Folge selbstadjungierter Operatoren (T_n) heißt monoton wachsend, *falls $T_n \leq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung. *Bei „$\leq$“handelt es sich um eine Halbordnung.*

Satz 8.2 (Monotoniesatz). *Sei (T_n) eine beschränkte, monotone Folge selbstadjungierter Opertatoren. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.*

Beweis. Sei (T_n) monoton wachsend und es gelte $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$s(x,y) := \langle x, (T_n - T_m)y\rangle$$

für fest gewählte n, m mit $n > m$. Die Sesquilinearform $s(\cdot,\cdot)$ ist ein Semiskalarprodukt auf X, denn aus $T_n - T_m \geq 0$ folgt $s(x,x) \geq 0$. Für jedes $x \in X$ gilt

(8.1)

$$\begin{aligned}
\|(T_n - T_m)x\|^2 &= \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x\rangle = s((T_n - T_m)x, x) \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} s((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x)^{1/2} s(x,x)^{1/2} \\
&= \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)^2 x\rangle^{1/2} \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2} \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|(T_n - T_m)x\|^{1/2} \|(T_n - T_m)^2 x\|^{1/2} \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2} \\
&\leq (\|(T_n - T_m)\|\|x\|)^{1/2} \left(\|(T_n - T_m)^2\|\|x\|\right)^{1/2} \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2} \\
&\leq (2C\|x\|)^{1/2} \left(\|(T_n - T_m)\|^2\|x\|\right)^{1/2} \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2} \\
&\leq (2C\|x\|)^{1/2} \left((2C)^2\|x\|\right)^{1/2} \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2} \\
&\leq (2C)^{3/2}\|x\|\langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{1/2}.
\end{aligned}$$

Die Folge $\langle x, T_n x\rangle$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Mit (8.1) folgt also, dass $(T_n x)$ konvergent in X ist.

Wir defnieren $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Offensichtlich ist T linear. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\langle x, T_n y\rangle = \langle T_n x, y\rangle \quad \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow &\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x, y \in X
\end{aligned}$$

Nach Satz von Hellinger-Toeplitz (Satz 5.4) ist T stetig und selbstadjungiert. $\square$

8.2. Spektralscharen

Sei X ein Hilbertraum.

Definition 8.3. *Eine* Spektralschar *in X ist eine Funktion*

$$E\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$$

mit

(a) *für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $E(t)$ ist eine Orthoprojektion,*
(b) $s \leq t \Rightarrow E(s) \leq E(t)$,
(c) $\operatorname*{s-lim}_{\delta \searrow 0} E(t+\delta) = E(t)$,
(d) $\operatorname*{s-lim}_{t \to -\infty} E(t) = 0$,
(e) $\operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} E(t) = I_X$.

Lemma 8.4. *Sei E eine Spektralschar. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert der starke linksseitige Limes*

$$\operatorname*{s-lim}_{\delta \searrow 0} E(t-\delta) =: E(t-0)$$

Beweis. Sei (δ_n) eine beliebige monotone Nullfolge mit $\delta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Folge von Orthoprojektionen $(P_n) := (E(t-\delta_n))$. (P_n) ist beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Monotoniesatz (Satz 8.2) existiert der starke Limes $P := \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} P_n$. Dieser ist selbstadjungiert und es gilt

$$P^2 = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n^2 = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n = P,$$

also ist P eine Orthoprojektion.

Sei nun (δ'_n) eine weitere Nullfolge mit den gleichen Eigenschaften wie (δ_n). Wir definieren analog zu oben den starken Limes

$$P' := \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P'_n = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E(t-\delta'_n).$$

Behauptung: Es gilt $P' = P$.

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig. Betrachte $f(t) := \langle x, E(t)x\rangle$. f ist monton wachsend und beschränkt. Also existiert

$$\lim_{\delta \searrow 0} f(t-\delta) =: f(t-0).$$

Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} f(t-\delta_n) = \lim_{n\to\infty} f(t-\delta'_n) = f(t-0).$$

Somit gilt $P' = P$. $\boxed{\text{B}}$

Somit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beispiele. (1) $X = L^2(\mathbb{R})$, $E(t)f := \chi_{(-\infty,t]}f$, $f \in X$.

(a) *klar*
(b) $\langle f, E(s)f\rangle = \int_{-\infty}^{s} |f(x)|^2\,dx \overset{s\leq t}{\leq} \int_{-\infty}^{t} |f(x)|^2\,dx = \langle f, E(t)f\rangle$

(c) $\|E(t+\delta)f - E(t)f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{(-\infty,t+\delta]}f(x) - \chi_{(-\infty,t]}f(x)|^2\,dx$
$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(-\infty,t+\delta]}(x) - \chi(-\infty,t](x)|^2|f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(t,t+\delta]}(x)|f(x)|^2\,dx$
$= \int_t^{t+\delta} |f(x)|^2\,dx \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$

(d) *klar*

(e) *klar*

(2) *Seien P_α, $\alpha \in I$, Orthoprojektionen in X, mit $P_\alpha P_\beta = 0$, falls $\alpha \neq \beta$. Es gelte $\sum_{\alpha\in I} P_\alpha x = x$ für alle $x \in X$. Seien λ_α, $\alpha \in I$, reelle Zahlen mit $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ für $\alpha \neq \beta$. Definiere*

$$E(t)x := \sum_{\substack{\alpha\in I\\ \lambda_\alpha\leq t}} P_\alpha x.$$

BEHAUPTUNG: *$E(\cdot)$ ist eine Spektralschar.*

BEWEIS:

(a) *Sei $x \in X$ beliebig. Also existiert eine Folge $(\alpha_j) \subset I$ so, dass*

$$E(t)x = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_{\alpha_j}x$$

Wir definieren eine Folge $(P^{(k)})$ von Orthoprojektionen, mit $P^{(k)} := \sum_{j=1}^{k} P_{\alpha_j}$. Die Folge ist monoton und beschränkt. Mit Satz 8.2 folgt die Existenz des starken Grenzwertes $P_x := s - \lim_{n\to\infty} P^{(k)}$. P_x ist eine Orthoprojektion. Folglich ist $E(t)x$ die Orthoprojektion auf $\mathrm{Bild}(P_x) = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Bild}(P_{\alpha_j})}$. Also ist $E(t)$ die Orthoprojektion auf $\overline{\bigcup_{\substack{\alpha\in I\\ \lambda_\alpha\leq t}} (P_{\alpha_j})}$.

(b) *klar*

(c) *Seien $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P_{\alpha_j}x\|^2 = \|x\|^2$$

Also gibt es jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j>n_0} \|P_{\alpha_j}x\|^2 < \varepsilon$. Wähle ein $\delta_0 > 0$ so klein, dass $\lambda_{\alpha_j} \notin (t, t+\delta_0]\ \forall j \leq n_0$.

$$\Rightarrow \|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \lambda_{\alpha_j}\in(t,t+\delta]}} \|P_{\alpha_j}x\|^2$$

$$\leq \sum_{j>n_0} \|P_{\alpha_j}x\|^2 < \varepsilon \quad \forall\delta \in (0,\delta_0]$$

(d) *Sei x fest. Es gibt höchstens abzählbar viele $\alpha_j \in I$ mit $P_{\alpha_j} \neq 0$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \|P_{\alpha_j}x\|^2 = \|x\|^2$*

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\colon \sum_{j>n_0} \|P_{\alpha_j}x\|^2 < \varepsilon$$

Es gibt ein $t_- \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_{\alpha_i} > t_- \, \forall i \leq n_0$.
Sei $t \leq t_-$ beliebig

$$\Rightarrow \|E(t)x\|^2 = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \lambda_{\alpha_i}\leq t}} \|P_{\alpha_i}x\|^2 \leq \sum_{i\geq n_0} \|P_{\alpha_i x\|^2 \leq \varepsilon}$$

$$\Rightarrow s - \lim_{t\to-\infty} E(t) = 0$$

(e) *Es existiert ein $t_+ \in \mathbb{R}$ mit $\mu_{\alpha_i} \leq t_+$, $\forall i \leq n_0$. Sei $t \geq t_+$ beliebig.*

$$\Rightarrow \|x - E(t)x\|^2 = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \lambda_{\alpha_i}> t}} \|P_{\alpha_i}x\|^2 \leq \sum_{i> n_0} \|P_{\alpha_i}x\|^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow s - \lim_{t\to\infty} E(t) = I$$

(3) *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert und kompakt.*

$$\Rightarrow \sigma(T) = \underbrace{\{0\}}_{=\lambda_0} \cup (\underbrace{\sigma_p(T) \setminus \{0\}}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}}) \subset \mathbb{R}$$

P_0 sei die Orthoprojektion auf Kern(T). *Und für $j \in \mathbb{N}$ sei P_j die Orthoprojektion auf* Kern$(T - \lambda_j)$. *Dann ist*

$$E(t)x := \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ \lambda_j\leq t}} P_j x$$

eine Spektralschar.

8.2.1. Elemente der Maßtheorie.

Definition 8.5. *Sei M ein topologischer Raum.*

(a) *Ein System $\mathfrak{A} \subset 2^M$ von Teilmengen von M heißt σ-*Algebra, *wenn gilt:*
  (a) $M \in \mathfrak{A}$
  (b) $M \supset A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$
  (c) $(A_n) \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$

(b) *Sei $\mathfrak{A} \subset 2^M$ eine σ-Algebra. Eine Abbildung $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ heißt ein* Maß *auf $(M, \mathfrak{A})$, wenn (1) $\mu(\emptyset) = 0$ und (2) für jede Folge $(A_n) \subset \mathfrak{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Ein Maß μ heißt endlich, *wenn $\mu(M) < \infty$ ist.*

(c) *Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt μ-messbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$.*

(d) *Die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}(M)$, die alle offenen Teilmengen von M enthält heißt die* Borelsche σ-Algebra auf *M, ihre Elemente heißen* Borelmengen.

(e) *Ein Maß $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ heißt* Borelmaß

Bemerkungen. (1) *Die Lebesgue-messbaren Teilmengen bilden eine σ-Algebra.*

(2) *Jede Borelmenge ist Lebesgue-messbar.*

(3) *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge, so existieren $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, mit $F \subset A \subset G$ und $\mu(A \setminus F) = \mu(G \setminus A) = 0$.*

Seien $M = \mathbb{R}$, μ ein endliches Borelmaß. Betrachte

$$\rho(t) := \mu((-\infty, t]).$$

Offenbar ist ρ monoton wachsend. Aus der σ-Additivität von μ folgt, dass ρ rechtsstetig ist.

Beweis. Sei $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $\delta_1 = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\rho(t + \delta_n) = \rho(t) + \mu((t, t + \delta_n]).$$

Bezeichne $A_n := (t, t + \delta_n]$. Offenbar ist (A_n) eine geschachtelte Folge, d.h. $A_{n+1} \subset A_n$. Folglich lässt sich das Intervall $(t, t + 1]$ als disjunkte Vereinigung

$$(t, t + 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n+1}$$

darstellen. Mit der σ-Additivität des Maßes μ folgt nun

$$\begin{aligned} \mu((t, t + 1]) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A_{n+1}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n \setminus A_{n+1}). \end{aligned}$$

Wegen $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus A_{n+1}) + \mu(A_{n+1})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu((t, t + 1]) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{m\to\infty} A_{m+1} \\ &= \mu((t, t + 1]) - \lim_{m\to\infty} A_{m+1}, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = 0$. $\boxed{\text{B}}$

Umgekehrt, sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte monoton wachsende rechtsstetige Funktion. Wir setzen

$$\mu_\rho((a, b]) := \rho(b) - \rho(a), \qquad a < b.$$

Die σ-Additivität von μ folgt aus der Rechtsstetigkeit von ρ: Sei

$$(a, b] = \bigcup_{k=0}^{\infty} (a_k, b_k] \quad \text{mit} \quad b_0 = b \quad \text{und} \quad a_k = b_{k+1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_\rho((a, b]) &= \rho(b) - \rho(a) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (\rho(b_k) - \rho(a_k)) + \rho(a_m) - \rho(a). \end{aligned}$$

Wegen $\rho(a_m) \to \rho(a)$ gilt

$$\mu_\rho((a, b]) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho(b_k) - \rho(a_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_\rho((a_k, b_k]).$$

Halboffene Intervalle bilden einen Halbring, d.h.

(1) $\varnothing \in \mathcal{H}$,
(2) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$,
(3) für alle $A, B \in \mathcal{H}$ gibt es paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$, so dass $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

Die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}$, die den Halbring $\mathcal{H}$ umfaßt, ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, denn

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{A}$$

und

$$(a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Nach dem Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz von Caratheodory existiert genau ein endliches Borelmaß μ, so dass $\mu|_{\mathcal{H}} = \mu_\rho$. Dieses Maß ist durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\middle|\, A_n \in \mathcal{H}, \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

gegeben.

Definition 8.6. *Sind μ und ν Maße auf $\mathbb{R}$, so heißt ν* absolut stetig *bezüglich μ, $\nu \ll \mu$, falls jede μ-messbare Menge auch ν-messbar ist und jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.*

Beispiele. (1) *Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Betrachte $\nu(A) := \int_A f(x)\, d\mu(x)$, wobei $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar sei. Dann gilt $\nu \ll \mu$.*

(2) *Sei $\mathfrak{A} = 2^{\mathbb{R}}$. Die Abbildung*

$$\delta\colon \mathfrak{A} \to [0,1], \ \delta(A) := \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

heißt Dirac-Maß. Es gilt $\delta \not\ll \mu$, da $1 = \delta(\{0\}) \neq \mu(\{0\}) = 0$.

8.2.2. Spektralmaß. Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, sowie $x \in X$ beliebig. Betrachte

$$\rho_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad \rho_x(t) := \|E(t)x\|^2.$$

Die Funktion ρ ist monoton wachsend, rechtsstetig und es gilt

$$\rho_x(t) \to \begin{cases} 0, & t \to -\infty \\ \|x\|^2 & , t \to \infty \end{cases}$$

Es gibt genau ein Borelmaß μ_x mit $\rho_x(t) = \mu_x((-\infty, t])$, μ_x heißt das durch x erzeugte *Spektralmaß*.

Definition 8.7.

$$H_x := \overline{\operatorname{lin}\{E(t)x \mid t \in \mathbb{R}\}} \subset X$$

heißt der durch x erzeugte Teilraum.

SATZ 8.8. *Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X und $x \in X$ beliebig. Dann ist die Abbildung*

$$V\colon \operatorname{lin}\{E(t)x \mid t \in \mathbb{R}\} \to L^2(\mathbb{R}, \mu_x),$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j E(t_j)x \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(-\infty,t_j]}$$

isometrisch. Die stetige Fortsetzung $U := \overline{V}\colon H_x \to L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ ist unitär. Mit $E_x(t) := E(t)|_{H_x}$ gilt $UE_x(t) = M_{\chi_{(-\infty,t]}}U$, wobei $M_{\chi_{(-\infty,t]}}$ den Multiplikationsoperator mit $\chi_{(-\infty,t]}$ in $L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ bezeichnet.

BEWEIS. (1) Sei $y \in \operatorname{lin}\{E(t)x \mid t \in \mathbb{R}\}$ beliebig. Dann ist

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j E(t_j)x$$

für gewisse $t_1 < t_2 < \ldots < t_j$ und somit

$$y = \sum_{k=1}^{n} d_k (E(a_{k+1}) - E(a_k))x$$

für gewisse Koeffizienten d_k und $a_1 = -\infty$, $a_k = t_{k-1}$ für $k = 2, \ldots, n+1$. Nach der Definition des Operators V erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|Vy\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{(a_k, a_{k+1}]} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}, \mu_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 \|\chi_{(a_k,a_{k+1}]}\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 \int_{(a_k,a_{k+1}]} d\mu_x(t) = \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 \mu_x((a_k, a_{k+1}]) \qquad (8.2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 \left(\rho_x(a_{k+1}) - \rho(a_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 \left(\|E(a_{k+1})x\|^2 - \|E(a_k)x\|^2\right).
\end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
\|(E(a_{k+1}) - E(a_k))x\|^2 &= \langle (E(b_k) - E(a_k))x, (E(b_k) - E(a_k))x \\
&= \|E(b_k)x\|^2 + \|E(a_k)x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle E(b_k)x, E(a_k)x \rangle. \qquad (8.3)
\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 1: Seien P, Q Orthoprojektionen mit $P \leq Q$. Dann gilt $PQ = QP = P$.

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
P \leq Q &\Rightarrow \langle x, Px \rangle \leq \langle x, Qx \rangle \ \forall x \in X \\
&\Rightarrow \operatorname{Kern}(Q) \subset \operatorname{Kern}(P) \Rightarrow \operatorname{Bild}(P) \subset \operatorname{Bild}(Q) \\
&\Rightarrow Qx = x \ \forall x \in \operatorname{Bild}(P) \Rightarrow QP = P
\end{aligned}$$

Da PQ selbstadjungiert ist, folgt mit (8.2) $PQ = P$. $\boxed{\text{B1}}$

Aus Behauptung 1 folgt

$$E(t)E(s) = E(\min\{t,s\}) \Rightarrow E(b_k)E(a_k) = E(a_k)$$

$$\Rightarrow (8.3) = \|E(b_k)x\|^2 - \|E(a_k)x\|^2$$

$$(***) \qquad \Rightarrow (8.2) = \sum_{k=1}^{m} |d_k|^2 \|(E(b_k) - E(a_k))x\|^2$$

Wir definieren

$$P_k := E(b_k) - E(a_k) \Rightarrow P_k^2 = P_k.$$

Behauptung 2: $P_k P_j = 0$ für alle $k \neq j$.

Beweis. selbst.

Mit Behauptung 2 folgt:

$$(***) = \sum_{k=1}^{m} |d_k|^2 \|P_k x\|^2 = \| \sum_{k=1}^{m} d_k P_k x\|^2$$

$$= \| \sum_{k=1}^{m} d_k (E(b_k) - E(a_k))x\|^2 = \|y\|^2.$$

Damit ist V isometrisch.

(2) Da Bild(V) die Menge aller linksstetigen Treppenfunktionen ist, gilt

$$\overline{\text{Bild}(V)} = L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$$

also ist U unitär.

(3) Sei $y = \sum_{k=1}^{m} c_k E(t_k)x$, dann gilt

$$UE(t)y = U \sum_{k=1}^{m} c_k E(\min\{t, t_k\})x = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(-\infty, \min\{t,t_k\}]}$$

$$\chi_{(-\infty,t]} \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(-\infty,t_k]} = \chi_{(-\infty,t]} Uy$$

$$\Rightarrow UE_x(t)y = \chi_{(-\infty,t]} Uy \quad \forall y \in H_x.$$

□

Lemma 8.9. (a) *Für alle $x \in X$ gilt $x \in H_x$.*

(b) *Für alle $y \in H_x$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $E(t)y \in H_x$. Insbesondere gilt $H_y \subset H_x$.*

(c) *Aus $y \perp H_x$ folgt $E(t)y \perp H_x$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $H_y \perp H_x$ und $\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y$.*

(d) $\mu_y \ll \mu_x \quad \forall y \in H_x$

Beweis. (a) Sei $x_n := E(n)x \Rightarrow x_n \in H_x$, $x_n \to x$. Da H_x abgeschossen ist, gilt $x \in H_x$.

(b) Sei (y_n) eine konvergente Folge in $\text{lin}\{E(t)x \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ mit $y_n \to y$.

$$\Rightarrow E(s)y_n \in \text{lin}\{E(t)x \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow E(s)y = \lim_{n\to\infty} E(t)y_n \in H_x.$$

(c)

$$\begin{aligned} y \perp H_x &\Rightarrow y \perp E(t)x \ \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \langle E(s)y, E(t)x\rangle = \langle y, E(s)E(t)x\rangle = \langle y, E(\min\{s,t\})x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow E(s)y \perp \operatorname{lin}\{E(t)x \mid t \in \mathbb{R}\} \ \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{x+y}(t) = \|E(t)(x+y)\|^2 = \|E(t)x + E(t)y\|^2 \stackrel{\perp}{=} \|E(t)x\|^2 + \|E(t)y\|^2 \\ = \rho_x(t) + \rho_y(t) \end{aligned}$$

(d) Seien $y \in H_x$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachte $\rho_y(t) = \|E(t)y\|^2 = \|UE(t)y\|_Y^2$ für alle unitären $U \in \mathcal{L}(X)$. Wähle U wie in Satz 8.8, also

$$\begin{aligned} UE_x(t) &= \chi_{(-\infty,t]}U \\ \Rightarrow \rho_y(t) &= \|\chi_{(-\infty,t]}Uy\|^2 = \int_{(-\infty,t]} \underbrace{|(Uy)(s)|^2}_{:=\varphi \in L^1(\mathbb{R},\mu_x)} \, d\mu_x(s) \\ \Rightarrow \mu_y((-\infty,t]) &= \int_{(-\infty,t])} \varphi(s)\, d\mu_x(s) \\ \Rightarrow \mu_y &\ll \mu_x \end{aligned}$$

□

SATZ 8.10. *Ist E ein Spektralschar im separabelen Hilbertraum X, so gibt es beschränkte Borelmaße μ_j ($j = 1, \ldots, N$ mit $N \leq \infty$) auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung*

$$U\colon X \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_j)$$

so, dass gilt

$$UE(t)U^{-1} = \chi_{(-\infty,t]} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

BEMERKUNG. ...

BEWEIS. Sei $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, totale Teilmenge von X. Sei $X_1 := H_{x_1}$. Wir definieren nun rekursiv eine Folge von Teilräumen $(H_j)_{j=1,\ldots,N}$, wobei $H_j := H_{h_j}$ mit $h_{j+1} := (I - \sum_{k=1}^{j} P_k)x_{j+1}$. Sei P_j jeweils die Orthoprojektion auf H_j. Es gilt $H_{j+1} \perp H_k \ \forall k = 1, \ldots, j$, also gilt mit Lemma 8.9(c) $H_i \perp H_j \ \forall i \neq j$.

$$\Rightarrow X = \bigoplus_{j=1}^{N} H_j$$

Setze $\mu_j := \mu_{h_j}$. Definiere

$$\begin{aligned} V_j\colon \operatorname{lin}\{E(t)h_j \mid t \in \mathbb{R}\} &\to L^2(\mathbb{R}, \mu_j) \\ \sum_{l=1}^{m} c_l E(t_l) h_j &\mapsto \sum_{l=1}^{m} c_l \chi_{(-\infty,t_l]} \end{aligned}$$

Mit Satz 8.8 gilt nun, dass

$$U_j := \overline{V}_j\colon H_j \to L^2(\mathbb{R}, \mu_j)$$

unitär ist.

$$\Rightarrow U := \bigoplus_{j=1}^{N} U_j \colon X = \bigoplus_{j=1}^{N} H_j \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_j)$$

ist unitär. Sei $x = (y_j) \in X = \bigoplus_{j=1}^{N} H_j$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} UE(t)x = U(E(t)y_j)_j &= (U_j E(t) y_j)_j = (\chi_{(-\infty,t]} U_j y_j)_j \\ &= \chi_{(-\infty,t]}(U_j y_j)_j = \chi_{(-\infty,t]} Ux \end{aligned}$$

□

8.2.3. Integral bezüglich einer Spektralschar.

DEFINITION 8.11. *Eine Funktion $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt E-*messbar*, wenn sie für alle $x \in X$ μ_x-messbar ist.*

Für I_j, $j = 1, \dots, n$, paarweise disjunkte Intervalle definieren wir eine Treppenfunktion

$$u(t) := \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}(t), \quad c_j \in \mathbb{C}$$

Wir definieren weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\, dE(t) := \sum_{j=1}^{n} c_j F(I_j)$$

mit

$$F(I_j) := \begin{cases} E(b_j) - E(a_j), & I_j = (a_j, b_j], \\ E(b_j) - E(a_j - 0), & I_j = [a_j, b_j], \\ E(b_j - 0) - E(a_j), & I_j = (a_j, b_j), \\ E(b_j - 0) - E(a_j - 0), & I_j = [a_j, b_j) \end{cases}$$

und $F(a) = E(a) - E(a-0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} u(t)\, dE(t) x \right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \|F(I_j)x\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \mu_x(I_j) = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2\, d\mu_x(t) \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu_x(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|^2 \mu_x(\mathbb{R}) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\, dE(t) \in \mathcal{L}(X)$$

und es gilt

$$\| \int_{\mathbb{R}} u(t)\, dE(t) \| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|.$$

Sei $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beliebige E-messbare Funktion, d.h. u ist μ_x-messbar für alle $x \in X$. Für alle $x \in X$ mit $u \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ gibt es eine Folge (u_n) von

Treppenfunktion mit $u_n \to u$ punktweise und $|u_n| \leq |u|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\|u_m - u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)} = \int_{\mathbb{R}} |u_m(t)|^2 \, d\mu_x(t) + \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 \, d\mu_x(t) \\ - 2\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \overline{u_m(t)} u(t) \, d\mu_x(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist (u_m) eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ und folglich

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{R}} u_m(t) \, dE(t)x - \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, dE(t)x \right\|^2 \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (u_m(t) - u_n(t)) \, dE(t)x \right\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u_m(t) - u_n(t)|^2 \, d\mu_x(t) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist die Folge $\left(\int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, dE(t)x\right)_n$ in X konvergent.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, dE(t)x$ hängt nicht von der Wahl von (u_n) ab. Ohne Beweis.

Definition 8.12. *Sei $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion. Dann heißt*

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) \, dE(t)x := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, dE(t)x$$

das Integral bezüglich der Spektralschar. *Es gilt*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} u(t) \, dE(t)x \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, dE(t)x \right\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |u_n(t)|^2 \, d\mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 \, d\mu_x(t) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} (au(t) + bv(t)) \, dE(t)x = a \int_{\mathbb{R}} u(t) \, dE(t)x + b \int_{\mathbb{R}} v(t) \, dE(t)x$$

8.3. Normale Operatoren als Integrale über Spetralscharen

8.3.1. Normale Operatoren.

Definition 8.13. *Ein dicht definierter Operator T im Hilbertraum X heißt* normal, *wenn $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt.*

Ist $T \in \mathcal{L}(X)$, so gilt für beliebige $x \in X$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2.$$

Mit der Polarisierungsidentität für die Sesquilinearform $(x, y) \mapsto \langle Tx, Ty \rangle$ folgt dann auch

$$\langle x, T^*Ty \rangle = \langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle = \langle x, TT^*y \rangle$$

für alle $x, y \in X$, d.h. $T^*T = TT^*$.

SATZ 8.14. *(a) Jeder normale Operator ist abgeschlossen und maximal normal, d.h. für jeden normalen Operator N mit $T \subset N$ gilt $T = N$.*

(b) Für einen dicht definierten abgeschlossenen Operator T sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) *T ist normal,*
(2) *T^* ist normal,*
(3) *$T^*T = TT^*$.*

AUFGABE. *Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator. Dann ist T^*T ein positiver selbst-adjungierter Operator. Sein Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^*T)$ ist determinierender Bereich von T.*

BEWEIS. (a) Der Operator T^* ist abgeschlossen. Somit ist der normierte Raum $(\mathcal{D}(T^*), \|\cdot\|_{T^*})$ mit $\|x\|_{T^*} = \|x\| + \|T^*x\|$ vollständig. Also ist der normierte Raum $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ ebenfalls vollständig, d.h. T ist abgeschlossen.

Ist nun N normal mit $T \subset N$, so gilt

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*) \subset \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T),$$

also $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(T)$ und somit $N = T$.

(b) Da T abgeschlossen ist, gilt $T = T^{**}$. Deshal folgt die Äquivalenz (1)$\Leftrightarrow$(2) unmittelbar aus der Definition der Normalität.

(1),(2)$\Leftrightarrow$(3) Aus $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für $x \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ folgt mit Hilfe der Polarisierungsidentität

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T^*T) &= \{x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx \in \mathcal{D}(T^*)\} \\
&= \big\{x \in \mathcal{D}(T) \mid \text{es gibt ein } y \in X \text{ s.d. für alle } z \in \mathcal{D}(T) \\
&\qquad \langle y, z\rangle = \langle Tx, Tz\rangle \\
&= \big\{x \in \mathcal{D}(T^*) \mid \text{es gibt ein } y \in X \text{ s.d. für alle } z \in \mathcal{D}(T^*) \\
&\qquad \langle y, z\rangle = \langle T^*x, T^*z\rangle \\
&= \{x \in \mathcal{D}(T^*) \mid T^*x \in \mathcal{D}(T^{**})\} = \mathcal{D}(TT^*).
\end{aligned}$$

und $T^*Tx = y = TT^*x$ für $x \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$.

Umgekehrt folgt für $x \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$ aus $T^*T = TT^*$, dass

$$\|Tx\|^2 = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

Da $\mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$ determinierender Bereich von T und T^* ist, und da $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T^*}$ auf $\mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$ übereinstimmen, folgt

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*) \quad \text{und} \quad \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$$

durch Abschließung. □

8.3.2. Integrale über Spetralscharen. Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, sowie $x, y \in X$ beliebig. Betrachte

$$\rho_{y,x}(t) := \langle y, E(t)x\rangle.$$

Bei $\langle\cdot, E(t)\cdot\rangle$ handelt es sich um eine Sesquilinearform. Mit der Polarisierungsidentität (Satz I.1.40) gilt

$$\begin{aligned}\langle y, E(t)x\rangle &= \frac{1}{4}(\langle y+x, E(t)(y+x)\rangle - \langle y-x, E(t)(y-x)\rangle \\ &\quad + \mathrm{i}\langle y-\mathrm{i}x, E(t)(y-\mathrm{i}x)\rangle - \mathrm{i}\langle y+\mathrm{i}x, E(t)(y+\mathrm{i}x)\rangle) \\ &= \frac{1}{4}(\rho_{x+y}(t) - \rho_{y-x}(t) + \mathrm{i}\rho_{y-\mathrm{i}x}(t) - \mathrm{i}\rho_{y+\mathrm{i}x}(t)).\end{aligned}$$

Damit induziert $\rho_{y,x}$ ein komplexwertiges Maß:

$$\rho_{y,x}(t) \rightsquigarrow \mu_{y,x}(\cdot) := \frac{1}{4}(\mu_{y+x}(\cdot) + \mu_{y-x}(\cdot) + \mathrm{i}\mu_{y-\mathrm{i}x}(\cdot) + \mathrm{i}\mu_{y+\mathrm{i}x}(\cdot)).$$

Es gilt $\mu_{y,x}(\cdot) = \overline{\mu_{x,y}(\cdot)}$.

Satz 8.15. *Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, sowie $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion. Dann wird durch*

$$u_E x := \int u(t)dE(t)x \qquad \text{für} \qquad x \in \mathcal{D}(u_E)$$

mit

$$\mathcal{D}(u_E) := \{x \in X \mid u \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)\}$$

ein normaler Operator definiert. Man schreibt

$$u_E = \int_{\mathbb{R}} u(t)dE(t).$$

Ist u reellwertig, so ist u_E selbstadjungiert.

Sind $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ E-messbar, so gilt:

(a) *Für $x \in \mathcal{D}(u_E)$ und $y \in \mathcal{D}(v_E)$ gilt*

$$\langle v_E y, u_E x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(v(t))}\varphi_n(u(t))$$

mit

$$\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_n(z) = \begin{cases} z, & \text{für } |z| \le n. \\ 0, & \text{für } |z| > n. \end{cases}$$

(b) *Für $x \in \mathcal{D}(u_E)$ gilt $\|u_E x\|^2 = \int |u(t)|^2 d\mu_x(t) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)}$.*

(c) *Ist $|u(t)| \le C$ für E-fast alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. für μ_x-fast alle $t \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$, so ist $u_E \in \mathcal{L}(X)$ und $\|u_E\| \le C$.*

(d) *Für die Einsfunktion 1 gilt $1_E = \mathrm{id}_X$.*

(e) *Für $x \in \mathcal{D}(u_E)$ und alle $y \in X$ gilt $\langle y, u_E x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(u(t))d\mu_{y,x}(t)$.*

(f) *Ist $u(t) \ge c$ für E-fast alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $u_E \ge c\,\mathrm{id}_X$.*

(g) *$(u+v)_E \supset u_E + v_E$ und $\mathcal{D}(u_E + v_E) = \mathcal{D}((|u| + |v|)_E)$.*

(h) *$(uv)_E \supset u_E v_E$ und $\mathcal{D}(u_E v_E) = \mathcal{D}(v_E) \cap \mathcal{D}((uv)_E)$.*

(i) *$\mathcal{D}(u_E)$ ist dicht, $\mathcal{D}(u_E) = \mathcal{D}(\overline{u}_E)$ und $(u_E)^* = \overline{u}_E$.*

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst, dass u_E ein linearer Operator ist, d.h. $D(u_E)$ ist ein Vektorraum und u_E ist linear. Offensichtlich ist $ax \in \mathcal{D}(u_E)$ und $u_E(ax) = au_E x$ für alle $x \in \mathcal{D}(u_E)$ und $a \in \mathbb{C}$. Bleibt also zu zeigen, dass aus $x, y \in \mathcal{D}(u_E)$ folgt $x + y \in \mathcal{D}(u_E)$ und $u_E(x + y) = u_E x + u_E y$.

Sei zunächst u beschränkt. Dann ist $\mathcal{D}(u_E) = X$ und somit ist $x + y \in \mathcal{D}(u_E)$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(u_E)$. Sei $\mu = \mu_x + \mu_y$. Dann ist $\mu_x \ll \mu$ und $\mu_y \ll \mu$.

BEHAUPTUNG. $\mu_{x+y} \ll \mu$.

BEWEIS. Schreibe y als $y_1 + y_2$ mit $y_1 \in H_x$ und $y_2 \perp H_x$. Dann gilt $y_1 \in H_{y_1} \subset H_x$ und daher $y_2 \perp H_{y_1}$. Folglich ist $\mu_y = \mu_{y_1} + \mu_{y_2}$ und μ_1 ist absolut stetig bezüglich μ_y. Weiterhin ist $x + y_1 \in H_x$ und folglich $x + y_1 \in H_{x+y_1} \subset H_x$, d.h. $y_2 \perp H_{x+y_1}$. Somit ist $\mu_{x+y} = \mu_{x+y_1} + \mu_{y_2}$ und μ_{x+y_1} ist absolut stetig bezüglich μ_x.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist $\mu_x(A) = \mu_y(A) = 0$ und folglich $\mu_{x+y_1}(A) = \mu_{y_2}(A) = 0$. Also ist $\mu_{x+y}(A) = 0$. $\boxed{\text{B}}$

Sei $u_n(t)$ eine beschränkte Folge von Treppenfunktionen mit $u_n \to u$ μ-fast überall. Somit ist nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz $u_n \to u$ im Sinne von $L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$, $L^2(\mathbb{R}, \mu_y)$ und $L^2(\mathbb{R}, \mu_{x+y})$. Also gilt

$$\begin{aligned} u_E(x+y) &= \lim_{n\to\infty} (u_n)_E(x+y) = \lim_{n\to\infty} (u_n)_E x + \lim_{n\to\infty} (u_n)_E y \\ &= u_E x + u_E y. \end{aligned}$$

Sei nun u eine beliebige E-messbare Funktion mit $x, y \in \mathcal{D}(u_E)$. Die Folge $(|\varphi_n \circ u|)$ ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen $|u|$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_n \circ u\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu_{x+y})} &= \left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 d\mu_{x+y}(t) \right)^{1/2} = \|(\varphi_n \circ u)_E(x+y)\| \\ &= \|(\varphi_n \circ u)_E x + (\varphi_n \circ u)_E y\| \\ &\le \|(\varphi_n \circ u)_E x\| + \|(\varphi_n \circ u)_E y\| \\ &= \left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 d\mu_x(t) \right)^{1/2} + \left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 d\mu_y(t) \right)^{1/2} \\ &= \|u_E x\| + \|u_E y\| < \infty. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt $u \in L^2(\mathbb{R}; \mu_{x+y})$ und $\varphi_n \circ u - u$ in $L^2(\mathbb{R}; \mu_{x+y})$, d.h. $x + y \in \mathcal{D}(u_E)$ und

$$\begin{aligned} u_E(x+y) &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E(x+y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E x + \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E y \\ &= u_E x + u_E y. \end{aligned}$$

Die Normalität bzw. Selbstadjungiertheit wird unten bewiesen.

(2) Hier beweisen wir (a). Die Aussage ist offensichtlich für Treppenfunktionen. Sie gilt auch für alle beschränkten E-messbaren Funktionen u und v, wobei in der Formel der Grenzübergang $n \to \infty$ entfällt, da für große n gilt $\varphi_n \circ u = u$ und $\varphi_n \circ v = v$. Sind u und v beliebige E-messbare Funktionen, so gilt für $x \in \mathcal{D}(u_E)$ und $y \in \mathcal{D}(v_E)$

$$\begin{aligned} \langle v_E y, u_E x \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle (\varphi \circ v)_E y, (\varphi \circ u)_E u \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(v(t))} \varphi_n(u(t)) d\mu_{y,x}(t). \end{aligned}$$

(3) Teil (b) folgt aus Teil (a) indem man $v = u$ und $y = x$ wählt. Dabei gilt
$$\lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n(u(t))| d\mu_x(t) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)}.$$
(4) Teil (c) folgt aus Teil (b):
$$\|u_E x\|^2 = \int |u(t)|^2 d\mu_x(t) \leq C^2 \int d\mu_x(t) = C^2 \|x\|^2.$$
(5) Nach Teil (c) ist $1_E \in \mathcal{L}(X)$. Es gilt $\chi_{(-n,n]} \to 1$ in $L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$. Folglich ist
$$1_E x = \lim_{n\to\infty} \left(\chi_{(-n,n]}\right)_E x = \lim_{n\to\infty} \left(E(n) - E(-n)\right) x = 0$$
für alle $x \in X$. Somit ist Teil (d) bewiesen.

(6) Teil (e) folgt (a) und (d) mit $v = 1$.

(7) Aus Teil (e) folgt
$$\langle x, u_E x\rangle = \int u(t) d\mu_x \geq c \int d\mu_x(t) = c\|x\|^2.$$
Somit ist Teil (f) bewiesen.

(8) Ist $x \in \mathcal{D}(u_E + v_E) = \mathcal{D}(u_E) \cap \mathcal{D}(v_E)$, so gilt $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ und somit $u + v \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$, d.h. $x \in \mathcal{D}((u + v)_E)$. Also ist $\mathcal{D}(u_E + v_E) \subset \mathcal{D}((u + v)_E)$. Die Linearität des Integrals liefert $(u + v)_E x = u_E x + v_E x$.

Seien u, v E-messbar. Es gilt $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ genau dann, wenn $|u| + |v| \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ gilt. Also ist $\mathcal{D}(u_E + v_E) = \mathcal{D}((|u| + |v|)_E)$. Somit ist Teil (g) bewiesen.

(9) Für eine beschränkte E-messbare Funktion u und beliebige $x, y \in X$ gilt nach Teil (e)
$$\langle y, u_E x\rangle = \int u(t) d\mu_{y,x} = \overline{\int \overline{u(t)} d\mu_{x,y}} = \overline{\langle x, \overline{u}_E y} = \langle \overline{u}_E y, x\rangle.$$
Mit $v_E x$ statt x erhält daraus
$$\langle y, u_E v_E x\rangle = \langle \overline{u}_E y, v_E x\rangle.$$
Nach Teil (a) gilt somit
$$\langle y, u_E v_E x\rangle = \int u(t)v(t) d\mu_{y,x}(t) = \langle y, (uv)_E x\rangle,$$
d.h. $u_E v_E = (uv)_E$.

Seien nun u, v beliebige E-messbare Funktionen und $x \in \mathcal{D}(u_E v_E)$. Da $\varphi_n \circ u$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, gilt
$$(\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v) \to (\varphi_n \circ u)v \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}, \mu_x) \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$
Somit gilt
$$\begin{aligned}
u_E v_E x &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E v_E x \\
&= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E \lim_{n\to\infty} (\varphi_m \circ v)_E x \\
&\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E (\varphi_m \circ v)_E x \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left((\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v)\right)_E x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((\varphi_n \circ u)v\right)_E x.
\end{aligned}$$

Folglich ist die Folge $\left(((\varphi_n \circ u)v)_E\, x\right)_n$ konvergent in X und somit eine Cauchyfolge. Daher gilt mit (a)

$$\begin{aligned}
&\int |\varphi_n(u(t))v(t) - \varphi_m(u(t))v(t)|^2 d\mu_x(t) \\
&= \langle ((\varphi_n \circ u)v)_E\, x - ((\varphi_m \circ u)v)_E\, x, ((\varphi_n \circ u)v)_E\, x - ((\varphi_m \circ u)v)_E\, x\rangle \\
&\xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

d.h. die Folge $((\varphi_n \circ u)v)$ konvergiert in $L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$. Nach Konstruktion konvergiert sie gegen uv. Also ist $uv \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$. Folglich ist $x \in \mathcal{D}((uv)_E)$ und $(uv)_E x = u_E v_E x$, d.h. es gilt

$$\mathcal{D}(u_E v_E) \subset \mathcal{D}(v_E) \cap \mathcal{D}((uv)_E) \quad \text{und} \quad u_E v_E \subset (uv)_E.$$

Umgekehrt sei $x \in \mathcal{D}(v_E) \cap \mathcal{D}((uv)_E)$ beliebig. Wegen $|(\varphi_n \circ u)v| \leq |uv|$ ist dann

$$x \in \mathcal{D}\left(((\varphi_n \circ u)v)_E\right) \quad \text{und} \quad (\varphi_n \circ u)v \to uv \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}, \mu_x).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
(uv)_E x &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} ((\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v))_E\, x \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E (\varphi_m \circ u)_E x \\
&= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E v_E x.
\end{aligned}$$

Die hiermit gezeigte Existenz des Grenzwertes der Folge $((\varphi_n \circ u)_E v_E x)_n$ und

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}, \mu_{v_E x})} &= \int |u(t)|^2 d\mu_{v_E x}(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(u(t))} \varphi_n(u(t)) d\mu_{v_E x}(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle (\varphi_n \circ u)_E v_E x, \varphi_n \circ u)_E v_E x\rangle
\end{aligned}$$

liefern $u \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{v_E x})$, d.h. $v_E x \in \mathcal{D}(u_E)$. Also gilt $x \in \mathcal{D}(u_E v_E)$. Somit ist Teil (h) bewiesen.

(10) Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{D}(u_E)$ dicht ist. Setze

$$\chi_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } |z| \leq n, \\ 0, & \text{für } |z| < n. \end{cases}$$

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion. Die Funktionen $\chi_m \circ u$ und $u \cdot (\chi_m \circ u)$ beschränkt. Somit gilt nach Teil (h)

$$\mathcal{D}(u_E(\chi_m \circ u)_E) = \mathcal{D}\left((u \cdot (\chi_m \circ u))_E\right) \cap \mathcal{D}\left((\chi_m \circ u)_E\right) = X.$$

Wegen

$$x = \lim_{n\to\infty} (\chi_m \circ u)_E x$$

folgt die Dichtheit von $\mathcal{D}(u_E)$.

Die Gleichung $\mathcal{D}(\overline{u}_E) = \mathcal{D}(u_E)$ ist offensichtlich. Für alle $x, y \in \mathcal{D}(\overline{u}_E) = \mathcal{D}(u_E)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle y, u_E x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(u(t)) d\mu_{y,x}(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \overline{\int \overline{\varphi_n(u(t))} d\mu_{x,y}(t)} \\ &= \overline{\langle x, \overline{u}_E y\rangle} = \langle \overline{u}_E y, x\rangle,\end{aligned}$$

d.h. $\overline{u}_E \subset (u_E)^*$.

Sei $y \in \mathcal{D}((u_E)^*)$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{D}(u_E)$

$$\begin{aligned}\langle (u_E)^* y, x\rangle = \langle y, u_E x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle y, (\varphi_n \circ u)_E x\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle (\overline{\varphi_n \circ u})_E y, x\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle (\varphi_n \circ \overline{u})_E y, x\rangle.\end{aligned}$$

Da χ_m reellwertig ist und $(\chi \circ u)_E \in \mathcal{D}(u_E)$, gilt für jedes $x \in X$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\langle (\chi_m \circ u)_E (u_E)^* y, x\rangle \langle (u_E)^* y, (\chi_m \circ u)_E x\rangle \\ &\quad= \lim_{n\to\infty} \langle (\varphi_n \circ \overline{u})_E y, (\chi_m \circ u)_E x\rangle \\ &\quad= \lim_{n\to\infty} \langle ((\chi_m \circ u)(\varphi_n \circ \overline{u}))_E\, y, x\rangle = \langle (\varphi_n \circ \overline{u})_E y, x\rangle,\end{aligned}$$

d.h. es gilt für alle $y \in \mathcal{D}((u_E)^*)$

$$(u_E)^* y = \lim_{m\to\infty} (\chi_m \circ u)(u_E)^* y = \lim_{m\to\infty} (\varphi_m \circ \overline{u})_E y.$$

Die Existenz dieses Grenzwertes bedeutet $y \in \mathcal{D}(\overline{u}_E)$, d.h. $\mathcal{D}((u_E)^*) \subset \mathcal{D}(\overline{u}_E)$.

(11) Nun zeigen wir die Normalität von u_E. Es gilt $\mathcal{D}((u_E)^*) = \mathcal{D}(\overline{u}_E) = \mathcal{D}(u_E)$ und

$$\|(u_E)^* x\|^2 = \|\overline{u}_E x\|^2 = \int |u(t)|^2 d\mu_x(t) = \|u_E x\|^2.$$

Ist u reell, so ist u_E selbstadjungiert. □

Beispiele. *Sei E eine Spekralschar im Hilbertraum X.*

(1) *Der Operator*

$$T := \int t dE(t)$$

ist selbstadjungiert.

(2) *Der Operator*

$$U := \int e^{it} dE(t)$$

ist unitär, denn aus Teil (a) erhält man $U^*U = UU^* = \mathrm{id}_X$.

Satz 8.16. *Sei E eine Spekralschar im Hilbertraum X. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt E-messbar, wenn die charakteristische Funktion χ_A E-messbar ist. Für eine E-messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ sei der Operator $\mathcal{E}(A)$ in X definiert durch $\mathcal{E}(A) := (\chi_A)_E$, d.h.*

$$\mathcal{E}(A)x = \int \chi_A(t) dE(t) x \qquad \textit{mit} \qquad \mathcal{D}(\mathcal{E}(A)) = X.$$

(a) Für jede E-messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist $\mathcal{E}(A)$ eine orthogonale Projektion.

(b) Für disjunkte E-messbare Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{E}(A)\mathcal{E}(B) = 0, \qquad \mathcal{E}(A \cup B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B).$$

(c) Für E-messbare Teilmengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mathcal{E}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = s - \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\left(\bigcup_{n=1}^{N}\right).$$

Sind die Mengen A_n paarweise disjunkt, so gilt

$$\mathcal{E}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = s - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathcal{E}(A_n).$$

Also ist $\mathcal{E}$ ein σ-additives projektionswertiges Maß auf der σ-Algebra der E-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Beweis selbst.

Satz 8.17 (Spektralsatz von von Neumann). *Zu jedem selbstadjungierten Operator T im komplexen Hilbertraum X gibt es genau eine Spektralschar E mit $v_E = T$, für $v(t) = t$, d.h.*

$$T = \int_{\mathbb{R}} t \, dE(t).$$

Die Spektralschar $E(\cdot)$ ist durch die Stonesche Formel *gegeben:*
$(*)$

$$\langle y, E(t)x\rangle = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{t+\delta} \left\langle y, ((T-s-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (T-s+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1})x\right\rangle ds$$

für alle $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 8.18. *Sei μ ein endliches $\mathbb{C}$-wertiges Maß und*

$$f(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

(a)

$$\mu((-\infty, t]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{t+\delta} (f(s+\mathrm{i}\varepsilon) - f(s-\mathrm{i}\varepsilon))\, ds.$$

Insbesondere ist μ durch f eindeitig bestimmt.

(b) *Sei μ reellwertig, dann gilt*

$$\mu((-\infty, t]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \operatorname{Im} f(s+\mathrm{i}\varepsilon)\, ds$$

Lemma 8.19. *Sei $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $M \geq 0$. Sei f eine Herglotz-Funktion, d.h.*

$$f \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$
$$\operatorname{Im} f(z) \geq 0 \text{ und } |f(z)\operatorname{Im} z| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}_+$$

Dann gibt es genau ein endliches Maß μ mit

(1) $f(z) = \displaystyle\int \frac{d\mu(t)}{t-z} \ \forall z \in \mathbb{C}_+$

(2) $\mu(\mathbb{R}) \leq M$

(3) $\mu((-\infty, t]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \operatorname{Im} f(s + \mathrm{i}\varepsilon)\, ds$

Beweis von Satz 8.17. (1) Existenz. Zuerst zeigen wir, dass für jedes $x \in X$ durch

$$f_x : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad f_x(z) = \langle x, (T-z)^{-1}x \rangle$$

eine Herglotz-Funktion gegeben ist. Die Funktion f_x ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f_x(z) &= \operatorname{Im} \langle x, (T-z)^{-1}x \rangle \\
&= \operatorname{Im} \langle (T-z)(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \rangle \\
&= (2i)^{-1} \Big(\langle (T-z)(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \rangle - \langle (T-\overline{z})(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \rangle \Big) \\
&= (\operatorname{Im} z) \|(T-z)^{-1}x\|^2 > 0
\end{aligned}$$

und

$$|f_x(z) \operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z| |f_x(z)| \leq |\operatorname{Im} z| \|(T-z)^{-1}\| \|x\|^2.$$

Aus der ersten Resolventengleichung

$$(T-z)^{-1} - (T-\overline{z})^{-1} = 2i(\operatorname{Im} z)(T-\overline{z})^{-1}(T-z)^{-1}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\|(T-z)^{-1}x\|^2 = \langle \langle (T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \rangle &= \langle x, (T-\overline{z})^{-1}(T-z)^{-1}x \\
&= \frac{1}{2i(\operatorname{Im} z)} \Big(\langle x, (T-z)^{-1}x \rangle - \langle x, (T-\overline{z})^{-1}x \rangle \Big) \\
&= \left| \frac{1}{2i(\operatorname{Im} z)} \Big(\langle x, (T-z)^{-1}x \rangle - \langle x, (T-\overline{z})^{-1}x \rangle \Big) \right| \\
&\leq \frac{1}{2|\operatorname{Im} z|} \Big(\|(T-z)^{-1}\| \, \|x\|^2 + \|(T-\overline{z})^{-1}\| \, \|x\|^2 \Big) \\
&= |\operatorname{Im} z|^{-1} \|(T-z)^{-1}\| \, \|x\|^2,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}.$$

Also ist

$$|f_x(z) \operatorname{Im} z| \leq \|x\|^2.$$

Nach Lemma 8.19 gilt also

$$\langle x, (T-z)^{-1}x \rangle = \int \frac{d\nu_x(t)}{t-z} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

für ein endliches Maß ν_x mit der Verteilungsfunktion

$$\nu((-\infty, t]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \Big\langle x, \Big((T-s-i\varepsilon)^{-1} - (T-s+i\varepsilon)^{-1} \Big) \Big\rangle \, ds.$$

Es gilt $\nu((-\infty, t]) \to 0$ für $t \to -\infty$ und $\nu((-\infty, t]) \leq \|x\|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Polarisierungsidentität folgt auch

$$\langle y, (T-z)^{-1}x \rangle = \int \frac{d\nu_{y,x}(t)}{t-z} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{8.4}$$

für ein endliches komplexwertiges Maß $\nu_{y,x}$ mit der Verteilungsfunktion

$$\nu((-\infty,t]) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\left\langle y,\left((T-s-i\varepsilon)^{-1}-(T-s+i\varepsilon)^{-1}\right)\right\rangle ds.$$

Die Abbildung $X\times X\to\mathbb{C}$, $(y,x)\mapsto\nu_{y,x}(t)$ ist für jedes $t\in\mathbb{R}$ eine Sesquilinearform. Sie ist hermitesch und nichtnegativ, denn $\nu_{y,x}=\overline{\nu_{x,y}}$ und $\nu_{x,x}=\nu_x\geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\left\langle x,\left((T-s-i\varepsilon)^{-1}-(T-s+i\varepsilon)^{-1}\right)\right\rangle\\ &=\operatorname{Im}\langle x,(T-s-i\varepsilon)^{-1}x\rangle\geq 0\end{aligned}$$

ist die Abbildung

$$(y,x)\mapsto\frac{1}{2i}\left\langle y,\left((T-s-i\varepsilon)^{-1}-(T-s+i\varepsilon)^{-1}\right)\right\rangle$$

ein Semiskalarprodukt. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann

$$|\nu_{y,x}((-\infty,t])|^2\leq\nu_x((-\infty,t])\nu_y((-\infty,t])\leq\|y\|^2\|x\|^2.$$

Also ist die Sesquilinearform $(y,x)\mapsto\nu_{y,x}(t)$ beschränkt. Nach Satz I.4.36 gibt es für jedes $t\in\mathbb{R}$ einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator $E(t)\in\mathcal{L}(X)$ mit

$$\langle y,E(t)x\rangle=\nu_{y,x}(t)\quad\text{für alle}\quad x,y\in X.$$

Wir zeigen nun, dass $E(\cdot)$ eine Spektralschar ist. Seien $z,z'\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ mit $z\neq z'$ beliebig. Sei $y':=(T-\overline{z'})^{-1}y$. Mit (8.4) gilt dann

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t-z}d\nu_{y',x}&=\langle y',(T-z)^{-1}x\rangle=\langle(T-\overline{z'})^{-1}y,(T-z)^{-1}x\rangle\\ &=\langle y,(T-z')^{-1}(T-z)^{-1}x\rangle\\ &=\frac{1}{z-z'}\left(\langle y,(T-z)^{-1}x\rangle-\langle y,(T-z')^{-1}x\rangle\right)\\ &=\frac{1}{z-z'}\int\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z'}\right)d\nu_{y,x}(t)\\ &=\int\frac{1}{t-z}\frac{1}{t-z'}d\nu_{y,x}(t)\\ &=\int\frac{1}{t-z}d\widetilde{\nu}_{y,x}(t),\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\nu}_{y,x}$ das koplexwertiges endliches Maß mit der Verteilungsfunktion

$$\widetilde{\nu}_{y,x}((-\infty,t])=\int_{(-\infty,t]}\frac{1}{s-z'}d\nu_{y,x}(s).$$

Mit der Eindeutigkeitsaussage aus Lemma 8.18 folgt daraus

$$\langle(T-\overline{z'})^{-1}y,E(t)x\rangle=\nu_{y',x}((-\infty,t])=\int_{(-\infty,t]}\frac{1}{s-z'}d\nu_{y,x}(s).$$

Mit (8.4) erhält man somit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{s-z'} d\nu_{y,E(t)x}(s) &= \langle y, (T-z')^{-1}E(t)x\rangle \\ &= \langle (T-\overline{z'})^{-1}y, E(t)x\rangle \\ &= \int_{(-\infty,t]} \frac{1}{s-z'} d\nu_{y,x}(s).\end{aligned}$$

Nochmalige Anwendung der Eindeutigkeitsaussage aus Lemma 8.18 liefert

$$\nu_{y,E(t)x}((-\infty,s]) = \nu_{y,x}((-\infty,s]),$$

d.h.

$$\langle y, E(s)E(t)x\rangle = \begin{cases}\langle y, E(s)x\rangle & \text{für } s \leq t,\\ \langle y, E(t)x\rangle & \text{für } s \geq t.\end{cases}$$

Also gilt $E(s)E(t) = E(\min\{s,t\})$. Insbesondere ist $E(t)$ idempotent. Folglich ist $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ eine wachsende projektionswertige Abbildung.

Die starke Rechtsstetigkeit folgt aus der Rechtsstetigkeit von $t \mapsto \nu_x((-\infty,t])$:

$$\begin{aligned}\|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 &= \langle E(t+\delta)x - E(t)x, E(t+\delta)x - E(t)x\rangle \\ &= \|E(t+\delta)x\|^2 + \|E(t)x\|^2 \\ &\quad - \langle E(t+\delta)x, E(t)x\rangle - \langle E(t)x, E(t+\delta)x\rangle \\ &= \|E(t+\delta)x\|^2 - \|E(t)x\|^2 \\ &= \nu_x((-\infty,t+\delta]) - \nu_x((-\infty,t]) \to 0 \quad \text{für} \quad \delta \to 0.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\|E(t)x\|^2 = \nu_x((-\infty,t]) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to -\infty.$$

Behauptung. Sei P_n eine monoton wachsende Folge orthogonaler Projektionen. Dann existiert eine orthogonale Projektion P mit $P_n \xrightarrow{s} P$.

Beweis. Nach Satz 8.2 gibt es einen selbstadjungierten Operator $P \in \mathcal{L}(X)$ mit $P_n \xrightarrow{s} P$. Wegen

$$P^2 = s - \lim_{n\to\infty} P_n^2 = s - \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

ist P idempotent. $\boxed{\text{B}}$

Nach Behauptung existiert eine orthogonale Projektion E_∞ mit $E(t) \xrightarrow{s} E_\infty$ für $t \to \infty$ und $E(t) \leq E_\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $F := I - E_\infty$ gilt also

$$E(t)F = E(t)(I - E_\infty) = E(t) - E(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

und somit nach (8.4)

$$\langle y, (T-z)^{-1}Fx\rangle = \int \frac{1}{t-z} d\nu_{y,Fx}(t) = 0 \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

denn

$$\nu_{y,Fx}((-\infty,t]) = \langle y, E(t)Fx\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $(T-z)^{-1}F = 0$ und somit $F = 0$, d.h. $E_\infty = I$. E ist also eine Spektralschar.

(2) $w_E = T$ für $w(t) = t$. Sei $u_z(t) := (t-z)^{-1}$. Aus (8.4) folgt

$$(u_z)_E = \int_{\mathbb{R}} u_z(t)\, dE(t) = (T-z)^{-1}.$$

Setze $v_z(t) := t - z$. Mit Satz 8.15 gilt

$$\langle (u_z)_E^* x, (v_z)_E y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u_z(t) v_z(t)}_{=1}\, d\nu_{x,y}(t) = \nu_{x,y}(\mathbb{R}) = \langle x, y\rangle$$

für alle $x \in X$ und $y \in \mathcal{D}((v_z)_E)$. Also ist $(u_z)_E(v_z)_E y = y$ für alle $y \in \mathcal{D}((v_z)_E)$. Analog mit

$$\langle (v_z)_E^* y, (u_z)_E x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u_z(t) v_z(t)}_{=1}\, d\nu_{y,x}(t) = \nu_{y,x}(\mathbb{R}) = \langle y, x\rangle$$

für alle $x \in X$ und $y \in \mathcal{D}((v_z)_E)$ folgt $(v_z)_E(u_z)_E x = x$ für alle $x \in X$. Folglich gilt $(v_z)_E = (u_z)_E^{-1} = T - z$ und daher

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\, dE(t).$$

(3) Eindeutigkeit. Sei $\widetilde{E}$ eine weitere Spektralschar mit $T = w_E$. Mit Satz 8.15 folgt

$$(T-z)(u_z)_{\widetilde{E}} = I \quad \text{und} \quad (u_z)_{\widetilde{E}}(T-z) = I|_{\mathcal{D}(T)},$$

d.h. es gilt $(u_z)_{\widetilde{E}} = (T-z)^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nach Satz8.15 gilt

$$\langle y, (T-z)^{-1} x\rangle = \int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\nu}_{y,x}(t),$$

wobei

$$\widetilde{\nu}_{y,x}((-\infty, t]) = \langle x, \widetilde{E}(t) x\rangle.$$

Aus Lemma 8.18 folgt $\widetilde{\nu}_{y,x} = \nu_{y,x}$, d.h. $\widetilde{E}(t) = E(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □