Die Chaostheorie

Prof. Dr. Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Vorlesungsbegleitendes Skript
Wintersemester 2023/24

Stand: 2. Dezember 2023

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein Nachschlagewerk zur Vorlesung *Chaostheorie*. Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:
`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Frau Ulli Jacobi für die Erstellung der LaTeX-Version des Skriptums sowie Maikel Hajiabadi für seine Korrekturvorschläge.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen 2

Einleitung 1

Kapitel 1. Chaos nach Devaney 3
- 1.1. Dynamische Systeme 3
- 1.2. Die logistische Abbildung 4
- 1.3. Symbolische Dynamik, Bernoulli-Shift 12
- 1.4. Chaos 15
- 1.5. Topologische Transitivität 18
- 1.6. Topologisch transitive Intervallabbildungen sind chaotisch 26
- 1.7. Topologische Konjugation 28
- 1.8. Beispiele chaotischer dynamischer Systeme 30
- 1.9. Die Gauß-Abbildung 31
- 1.10. Die logistische Abbildung F_μ für $\mu > 4$ 36
- 1.11. Die Zelt-Abbildung T_3 42
- 1.12. Münzwurf und chaotische Intervall-Abbildungen 44

Kapitel 2. Chaos nach Li-Yorke 46
- 2.1. Satz von Li-Yorke, Scharkowskij-Ordnung und Satz von Scharkowskij 46
- 2.2. Primperiode 3 bei logistischer Intervall-Abbildung 50
- 2.3. Chaos nach Li-Yorke 54
- 2.4. Primperiode 3 impliziert Chaos 56
- 2.5. Der Bernoulli-Shift ist chaotisch 62
- 2.6. Chaos nach Li-Yorke und topologische Konjugation 63

Kapitel 3. Topologische Entropie 66
- 3.1. Topologische Entropie 66
- 3.2. Die Bowensche Formel 69
- 3.3. Entropie von expandierenden Abbildungen 74
- 3.4. Entropie und topologische Konjugation 79
- 3.5. Eine untere Schranke für die topologische Entropie 81
- 3.6. Positive topologische Entropie und Chaos 84

Kapitel 4. Invariantes Maß 87
- 4.1. Borel-Maße 87
- 4.2. Invariante Funktionale 93
- 4.3. Der Satz von Krylov-Bogoljubov 98
- 4.4. Der Wiederkehrsatz von Poincaré 99
- 4.5. Eine zahlentheoretische Anwendung 101
- 4.6. Invariantes Punktmaß und periodische Bahnen 104

Kapitel 5. Der Ergodensatz 107
5.1. Ergodische Abbildungen 107
5.2. Konvergenz von Maßfolgen 112
5.3. Existenz eines ergodischen Maßes 116
5.4. Der Ergodensatz von Birkhoff 124
5.5. Der Wiederkehrsatz von Kac 131
5.6. Ergodensatz für eindeutig ergodische Abbildungen 135

Einleitung

Der Begriff „Chaostheorie“ ist aus mathematischer Sicht ein bisschen umgangssprachlich oder populärwissenschaftlich. In der Mathematik spricht man eher von der Theorie chaotischer dynamischer Systeme. Also beschäftigen wir uns in der Vorlesung mit zwei Objekten: (a) dynamischen Systemen und (b) Chaos.

Unter einem dynamischen System versteht man ein mathematisches Modell zur Beschreibung zeitabhängiger Prozesse. Ein dynamisches System ist gegeben durch:

(1) Eine Menge X von Zuständen des Systems. X heißt *Zustandsraum* oder *Phasenraum*.
(2) „Zeit“ kann diskret oder kontinuierlich sein:
- diskret: $n \in \mathbb{N}_0$ oder $n \in \mathbb{Z}$.
- kontinuierlich: $t \in \mathbb{R}_+$ oder $t \in \mathbb{R}$.

(3) Ein Gesetz der Zeitentwicklung des Systems, z.B.:
- iterierte Abbildungen $x_{n+1} = F(x_n)$,
- gewöhnliche Differenzialgleichungen: $\dot{x} = f(x)$,
- partielle Differenzialgleichungen: $x_t = \Delta_y x + f(x)$.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns ausschließlich mit dynamischen Systemen mit diskreter Zeit.

Bemerkung. *Unsere physikalische Zeit ist kontinuierlich. Wo kommen dynamische Systeme mit diskreter Zeit her? Betrachten wir eine gewöhnliche Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. In der In der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen beweist man (unter gewissen Voraussetzungen) die Existenz einer Abbildung $\phi_t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig (der sogenannte Fluss) mit der Eigenschaft, dass*

$$x(t) := \phi_t(x_0)$$

die Lösung der Anfangswertaufgabe $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist. Der Fluss hat die Halbgruppeneigenschaft

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

Nun sei $x_n := x(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$x_{n+1} = \phi_{n+1}(x_0) = \phi_1\big(\phi_n(x_0)\big) = \phi_1(x_n).$$

Das ist ein dynamisches System mit diskreter Zeit und Abbildung ϕ_1.

Was ist Chaos? Intuitiv ist Chaos die Abwesenheit jeglicher Ordnung. Es gibt keine eindeutige mathematische Definition von Chaos. In der Vorlesung werden wir verschiedene Definitionen begegnen. Die sind sehr ähnlich, aber nicht äquivalent. Um eine grobe intuitive Vorstellung zu bekommen, was ein chaotisches dynamisches System ist, betrachten wir an dieser Stelle ein Beispiel.

Wir betrachten die sogenannte logistische Abbildung: Sei $X = [0,1]$, $F(x) = 4x(1-x)$.

Satz. *Zu jeder zufälligen Münzwurffolge $w : \mathbb{N} \to \{W, Z\}$ (Wappen, Zahl) gibt es einen Anfangspunkt $x_0 \in [0,1]$ s.d.*

$$F^k(x_0) := \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k-mal}(x_0) \in \begin{cases} [0,1/2] & \text{falls } w(k) = W \\ [1/2,1] & \text{falls } w(k) = Z \end{cases} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Chaotische dynamische Systeme unterliegen gewissen Gesetzen. Ein Beispiel dazu:

Satz (Ulam - von Neumann (1947)). *Seien $I \subset [0,1]$ ein Teilintervall, $F : [0,1] \to [0,1]$ die logistische Abbildung. Dann gilt für fast alle $x_0 \in [0,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, F^k(x_0) \in I, k \leq n\}\right|}{n} = \frac{1}{\pi}\int_I \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Dieser Satz ist ein Ergebnis aus der Ergodentheorie. Die Ergodentheorie charakterisiert das Langzeitverhalten von Trajektorien mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden. Mit dieser Theorie beschäftigen wir uns im zweiten Teil der Vorlesung.

Die Ergodentheorie hat sehr viele interessante Anwendungen, unter anderem in der Zahlentheorie.

Satz (Green - Tao (2005)). *Primzahlen enthalten arithmetische Progressionen beliebiger Länge, d.h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es $a, q \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$a, a+q, a+2q, \ldots, a+kq$$

prim sind.

Für die Vorlesung ist der Beweis des Satzes von Green-Tao zu kompliziert. Wir werden aber ein leichteres verwandtes Resultat beweisen:

Satz (Szemerédi (1975), Furstenberg (1977)). *Sei $S \subset \mathbb{N}$ unendlich mit*

$$\limsup_{|I|\to\infty} \frac{|S \cap I|}{|I|} > 0, \quad I = [a,b], \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Dann enthält S beliebig lange arithmetische Progressionen.

KAPITEL 1

Chaos nach Devaney

1.1. Dynamische Systeme

DEFINITION 1.1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $F : X \to X$ eine Abbildung. Das Paar (X, F) heißt ein* diskretes dynamisches System *(oder ein* dynamisches System mit diskreter Zeit*) mit Zustandsraum (oder* Phasenraum*) X und Abbildung F. Die* Bahn *(oder* Orbit *oder* Trajektorie*) mit Anfangspunkt $x_0 \in X$ ist die Folge*

$$\mathscr{O}(x_0) := \big(F^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

Ist $F(x) = x$, so heißt $x \in X$ Fixpunkt. *Ein Punkt $x \in X$ heißt* p-periodisch *$(p \in \mathbb{N})$, wenn $F^p(x) = x$. Die Zahl p heißt* Periode. *Die Periode $p \in \mathbb{N}$ heißt* Primperiode*, wenn $F^k(x) \neq x$ für alle $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Ist x ein periodischer Punkt mit Primperiode p, so heißt die geordnete Menge*

$$\mathscr{O}[x] := \big(x, F(x), \dots, F^{p-1}(x)\big)$$

periodische Bahn *(Orbit oder Trajektorie). Wir identifizieren $\mathscr{O}[x]$ mit $\mathscr{O}[F^k(x)]$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

AUFGABE 1.2. Sei X endlich, F surjektiv. Dann ist X eine Vereinigung von Fixpunkten und periodischen Bahnen.

DEFINITION 1.3. *Der* Anziehungsbereich *(engl.: basin of attraction) eines Fixpunktes $x \in X$ ist die Menge*

$$AB(x) := \Big\{ y \in X \,|\, d(F^k(y), x) = d\big(F^k(y), F^k(x)\big) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Big\}.$$

Der Anziehungsbereich einer periodischen Bahn $\mathscr{O}[x]$ ist die Menge

$$AB(\mathscr{O}[x]) := \Big\{ y \in X \,|\, \operatorname{dist}\big(F^k(y), \mathscr{O}[x]\big) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Big\}.$$

Hier ist

$$\operatorname{dist}\big(F^k(y), \mathscr{O}[x]\big) := \min_{z \in \mathscr{O}[x]} d\big(F^k(y), z\big).$$

BEMERKUNGEN. (1) *Der Anziehungsbereich ist nicht leer.*

(2) *Sei (X, d) vollständig, $F : X \to X$ eine Kontraktion, d.h.*

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq q d(x, y) \text{ für ein } q < 1.$$

Dann hat F genau einen Fixpunkt. Sein Anziehungsbereich ist ganz X (Fixpunktsatz von Banach).

(3) *Sei (X, d) kompakt, $F : X \to X$ genüge der Bedingung*

$$d\big(F(x), F(y)\big) < d(x, y),\ x \neq y.$$

Dann hat F genau einen Fixpunkt. Sein Anziehungsbereich ist ganz X. (Fixpunksatz von Edelstein). Ist $X \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so lässt *sich dieser Fixpunktsatz sehr einfach beweisen:*

Sei $X = [a, b]$. O.B.d.A. sei $F(a) \neq a$ und $F(b) \neq b$. Dann ist $F(a) > a$ und $F(b) < b$ (wegen $F : X \to X$). Betrachte

$$g(x) := F(x) - x \Rightarrow g(a) > 0, \quad g(b) < 0.$$

Da g stetig ist, erhalten wir mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $g(c) = 0$. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Fixpunkte $c_1, c_2 \in X$. Dann wäre

$$|c_1 - c_2| = |F(c_1) - F(c_2)| < |c_1 - c_2|.$$

Widerspruch!

1.2. Die logistische Abbildung

Hier betrachten wir eine allgemeinere Form der logistischen Abbildung. Seien

$$X = [0, 1], \quad F_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad \mu \in [0, 4].$$

Ist $\mu \in [0, 1]$, so besitzt die Gleichung $F_\mu(x) = x$ genau eine Lösung $x = 0$, denn

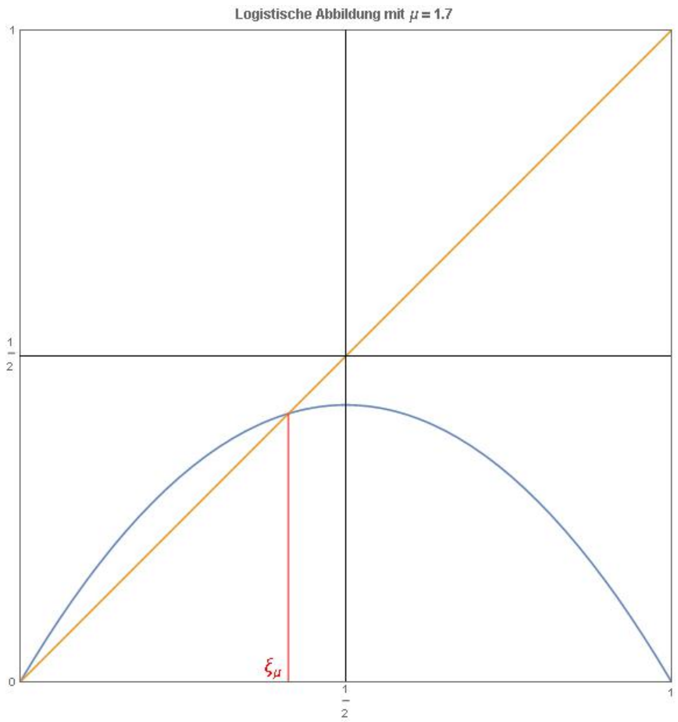
$$\mu \leq 1 \text{ und } 1 - x < 1 \Rightarrow \mu(1 - x) < 1 \Rightarrow \mu x(1 - x) < x \quad \forall x \in (0, 1].$$

Also ist $F_\mu(x) < x$ für alle $x \in (0, 1]$.

Berechne

$$\begin{aligned}
& F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x) \\
\Rightarrow \quad & |F'_\mu(x)| = \mu|1 - 2x| \\
\Rightarrow \quad & |F'_\mu(x)| < \mu \text{ für } x \in (0, 1) \\
\Rightarrow \quad & |F_\mu(x) - F_\mu(y)| = \left| \int_y^x F'_\mu(t)\, dt \right| \\
\overset{\text{o.B.d.A. } x \geq y}{\leq} \quad & \int_y^x |F'_\mu(t)|\, dt < \mu|x - y| \\
\overset{\text{Bem(2),(3)}}{\Rightarrow} \quad & F^k_\mu(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, x \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in (1, 3)$. Dann besitzt F_μ zwei Fixpunkte $x = 0$ und $\xi_\mu := 1 - \frac{1}{\mu} \in (0, \frac{2}{3})$.



PROPOSITION. *Sei $\mu \in (1,3)$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) = \begin{cases} \xi_\mu, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

BEWEIS. **(a)**: Sei $\mu \in (1,2) \Rightarrow \xi_\mu \in (0,1/2)$.

<u>Fall 1</u>: $x \in (0, \xi\mu)$.

$$\frac{F_\mu(x)}{x} = \mu(1-x) > \mu(1-\xi_\mu) = \frac{F_\mu(\xi_\mu)}{\xi_\mu} = 1 \Rightarrow F_\mu(x) > x.$$

Die Funktion $F_\mu(x)$ ist streng monoton wachsend auf $(0, \xi_\mu)$,

$$F_\mu(0) = 0, F_\mu(\xi_\mu) = \xi_\mu \Rightarrow F_\mu\big((0,\xi_\mu)\big) = (0,\xi_\mu) \Rightarrow F_\mu^k(x) < \xi_\mu.$$

Aus $F_\mu(x) > x$ folgt $F_\mu^{k+1}(x) > F_\mu^k(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz existiert der Grenzwert

$$\bar{x} := \lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) \in (0, \xi_\mu].$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x} = \xi_\mu$:

$$F_\mu^{k+1}(x) = \mu F_\mu^k(x)\big(1 - F_\mu^k(x)\big) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x} = \mu\bar{x}(1-\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = \xi_\mu.$$

<u>Fall 2</u>: $x \in \left(\xi_\mu, \frac{1}{2}\right)$.

Man zeigt analog, dass $F_\mu(x) < x$ für alle $x \in \left(\xi_\mu, \frac{1}{2}\right)$. Die Funktion $F_\mu(x)$ ist streng monoton wachsend auf $\left(\xi_\mu, \frac{1}{2}\right)$, $F_\mu(\xi_\mu) = \xi_\mu$ und

$$F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} < \frac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$F_\mu\big((\xi_\mu, 1/2)\big) \subset (\xi_\mu, 1/2)$$

und somit $F_\mu^k(x) > \xi_\mu$ für alle $x \in \big(\xi_\mu, \frac{1}{2}\big)$.

Aus $F_\mu(x) < x$ folgt $F_\mu^{k+1}(x) < F_\mu^k(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Folglich erhält man

$$\lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) = \xi_\mu.$$

<u>Fall 3</u>: $x \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$.

Die Funktion $F_\mu(x)$ ist streng monoton fallend auf $[\frac{1}{2}, 1)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad F_\mu(x) \in \Big(\underset{F_\mu(1)}{\underset{\|}{0}}, F_\mu\big(\frac{1}{2}\big)\Big] = \Big(0, \frac{\mu}{4}\Big] \subset \Big(0, \frac{1}{2}\Big) \\
&\overset{\text{Fall 1,2}}{\Rightarrow} \quad \lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) = \xi\mu.
\end{aligned}$$

(b): Sei $\mu = 2 \Rightarrow \xi_\mu = \frac{1}{2}$.

Ist $x \in (0, \frac{1}{2})$, so gilt $F_\mu^{k+1}(x) > F_\mu^k(x)$ und

$$F_\mu^k(x) < \xi_\mu \Rightarrow \lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) = \xi_\mu.$$

Ist $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, so ist $F_\mu(x) \in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} F_\mu^k(x) = \xi_\mu$.

Bemerkung. *Für $\mu = 2$ gilt die Formel*

$$F_\mu^n(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \exp\{2^n \log(1-2x)\}\big).$$

(c): Sei $\mu \in (2,3)$. Dann ist $\xi_\mu \in \big(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\big)$. Setze

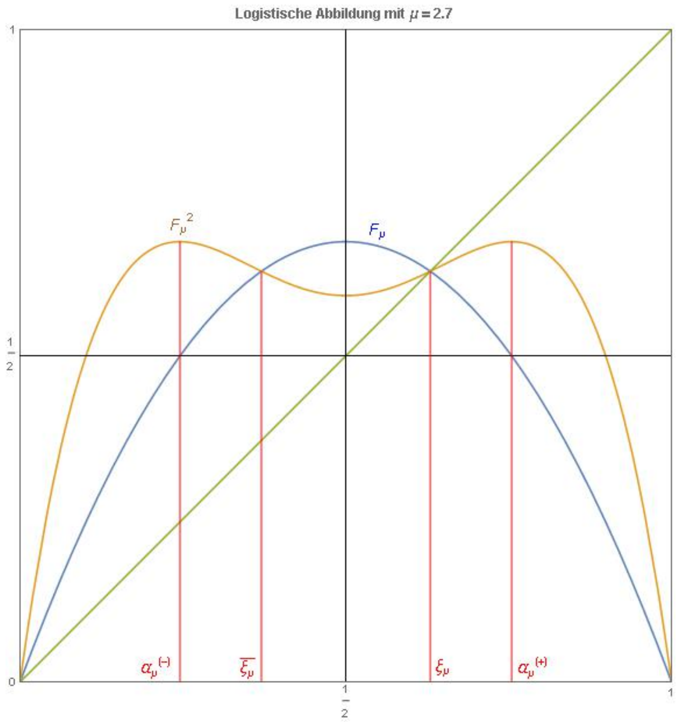
$$\overline{\xi}_\mu := 1 - \xi_\mu = \frac{1}{\mu} \Rightarrow F_\mu(\overline{\xi}_\mu) = \mu(1-\xi_\mu)\xi_\mu = F_\mu(\xi_\mu) = \xi_\mu.$$

Kurvendiskussion von $F_\mu^2(x)$:

$$\begin{aligned}
F_\mu^2(x) &= \mu F_\mu(x)(1 - F_\mu(x)) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x)) \\
&= \mu^2 x(1-x)(1-\mu x + \mu x^2) \\
\Rightarrow (F_\mu^2)'(x) &= \mu^2(1-2x)(1-\mu x+\mu x^2) + \mu^2(x-x^2)\underbrace{(-\mu+2\mu x)}_{=-\mu(1-2x)} \\
&= \mu^2(1-2x)[1-\mu x+\mu x^2 - \mu x + \mu x^2] \\
&= \mu^2(1-2x)(1-2\mu x+2\mu x^2) \\
\Rightarrow (F_\mu^2)' &= 0 \;\text{ falls } x = \frac{1}{2} \text{ oder } x = \alpha_\mu^{(\pm)} := \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-2}{\mu}}.
\end{aligned}$$

Berechne:

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu^{\pm}\Big(1-\alpha_\mu^{(\pm)}\Big) &= \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-2}{\mu}}\Big)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-2}{\mu}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\frac{\mu-2}{\mu} \\
&= \frac{1}{4}\Big(1-\frac{\mu-2}{\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2\mu} \\
\Rightarrow F_\mu\Big(\alpha_\mu^{(\pm)}\Big) &= \frac{1}{2} \Rightarrow F_\mu^2\Big(\alpha_\mu^{(\pm)}\Big) = F_\mu\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{\mu}{4}.
\end{aligned}$$



Behauptung 1. $F_\mu^2(x)$ hat genau einen Fixpunkt in $(0,1)$.

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(x) := \frac{F_\mu^2(x)}{x} &= \mu^2(1-x)\Big(1-\mu x(1-x)\Big) \\
&= \mu^2\Big(1-(\mu+1)x+2\mu x^2-\mu x^3\Big).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen

$$\frac{1}{\mu^2}\,\varphi_\mu'(x) = -(\mu+1)+4\mu x-3\mu x^2.$$

$\frac{1}{\mu^2}\,\varphi_\mu'(x)$ hat keine Nullstelle, denn

$$16\mu^2-12\mu(\mu+1) = 4\mu^2-12\mu = 4\mu(\mu-3) < 0.$$

Weiterhin ist $\frac{1}{\mu^2}\,\varphi'_\mu(0) = -(\mu+1) < 0$. Folglich ist φ_μ streng monoton fallend. Wegen

$$\varphi_\mu(0) = \mu^2 > 4, \quad \varphi_\mu(1) = \mu^2(1-\mu-1+2\mu-\mu) = 0.$$

gibt es genau ein $x \in (0,1)$ mit $\varphi_\mu(x) = 1$. $\boxed{\text{B1}}$

(i) Sei $x \in (0, \overline{\xi}_\mu)$.

Behauptung 2. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F_\mu^n(x) \in [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu]$.

Beweis. $F_\mu(x) - x = \mu x(1-x) - x = x(\mu - \mu x - 1)$

$$\begin{aligned} x < \overline{\xi}_\mu = \frac{1}{\mu} \quad &\Rightarrow \quad \mu x < 1 \Rightarrow \mu - \mu x - 1 > \mu - 2 =: q > 0 \\ &\Rightarrow \quad F_\mu(x) - x > qx. \end{aligned}$$

Ist $F_\mu(x) \in (0, \overline{\xi}_\mu)$, so gilt

$$\begin{aligned} F_\mu^2(x) - F_\mu(x) > qF_\mu(x) &\overset{F_\mu(x)>x}{>} qx \\ \Rightarrow \quad F_\mu^2(x) > qx + F_\mu(x) &> 2qx + x. \end{aligned}$$

Sind $F_\mu(x), F_\mu^2(x) \in (0, \overline{\xi}_\mu)$, so gilt

$$\begin{aligned} F_\mu^3(x) - F_\mu^2(x) > qF_\mu^2(x) &\overset{F_\mu^2(x)>x}{>} qx \\ \Rightarrow \quad F_\mu^3(x) > qx + F_\mu^2(x) &> 3qx + x. \end{aligned}$$

Wir erhalten folgendes Resultat: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $F_\mu^k(x) \in (0, \overline{\xi}_\mu)$ für alle $k = 1, \dots, n-1$ gilt

$$F_\mu^n(x) > nqx + x \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.d. } F_\mu^n(x) \geq \overline{\xi}_\mu \text{ und } F_\mu^{n-1}(x) < \overline{\xi}_\mu.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $F_\mu^n(x) \leq \xi_\mu$ ist. Da $F_\mu^{n-1}(x) < \overline{\xi}_\mu$ und F_μ streng monoton auf $[0, \frac{1}{2})$ ist, gilt

$$F_\mu^n(x) = F_\mu\big(F_\mu^{n-1}(x)\big) < F_\mu(\overline{\xi}_\mu) = \xi_\mu.$$

$\boxed{\text{B2}}$

(ii) Sei nun $x \in (\xi_\mu, 1)$. Dann ist $F_\mu(x) \in (0, F(\xi_\mu)) = (0, \xi_\mu)$. Mit (i) folgt daraus, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $F_\mu^n(x) \in [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu]$.

(iii) Sei $x \in [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu]$.

Behauptung 3. $F_\mu^2 : [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu] \to [1/2, \xi_\mu]$.

Beweis. Für alle $x \in [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu]$ gilt

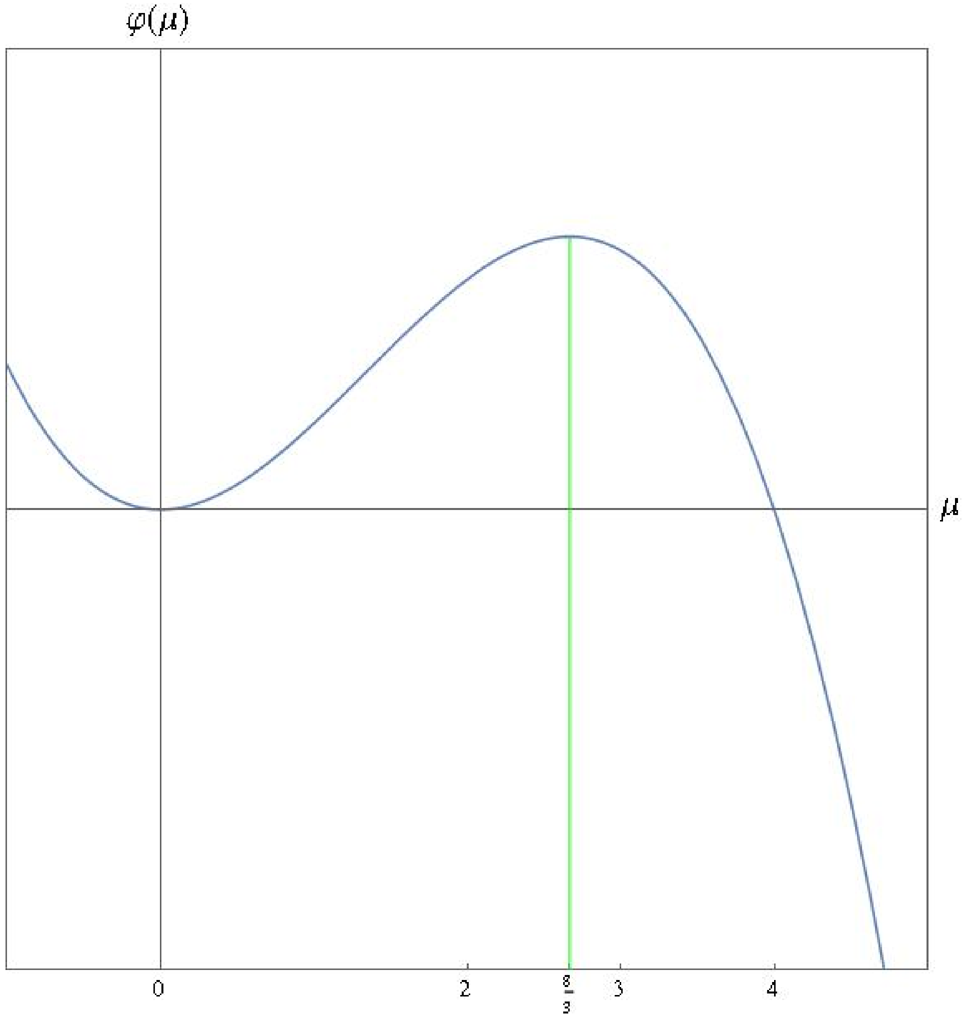
$$\xi_\mu \leq F_\mu(x) \leq F_\mu(1/2) = \frac{\mu}{4} \Rightarrow F_\mu : [\overline{\xi}_\mu, \xi_\mu] \to [\xi_\mu, \frac{\mu}{4}].$$

$F_\mu\big|_{[\xi_\mu, \frac{\mu}{4}]}$ ist monoton fallend

$$\Rightarrow F_\mu : \left[\xi_\mu, \frac{\mu}{4}\right] \to \left[F_\mu(\frac{\mu}{4}), \xi_\mu\right].$$

Sei $\varphi(\mu) := F_\mu(\frac{\mu}{4}) = \frac{\mu^2}{4}\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)$. Dann ist

$$\varphi'(\mu) = \frac{1}{2}\,\mu\Big(1 - \frac{3\mu}{8}\Big).$$



Also hat die Funktion $\varphi(\mu)$ im Intervall $(2,3)$ genau eine Extremstelle $\mu = 8/3$. Wegen

$$\varphi''(\mu) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\mu}{8}\right) - \frac{3\mu}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi''(8/3) = -\frac{1}{2} < 0$$

ist $\mu = 8/3$ ein globales Maximum im Intervall $(2,3)$. Folglich gilt für jedes $\mu \in (2,3)$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) > \min\{\varphi(2), \varphi(3)\} &= \frac{1}{4}\min\left\{2^2\left(1 - \frac{2}{4}\right), 3^2\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\min\left\{2, \frac{9}{4}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow F_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right) > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

B3

BEHAUPTUNG 4. $\lim_{n\to\infty} F_\mu^{2n}(x) = \xi_\mu$ für alle $x \in [1/2, \xi_\mu]$.

BEWEIS. F_μ^2 ist monoton steigend auf $[1/2, \xi_\mu]$. Daher gilt $F_\mu^2(x) < F_\mu^2(\xi_\mu) = \xi_\mu$. Aus

$$\underbrace{F_\mu^2(x)}_{\in[1/2,\xi_\mu)} > x$$

folgt

$$F_\mu^{2(n+1)}(x) > F_\mu^{2n}(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz zeigt man, dass $\lim_{n\to\infty} F_\mu^{2n}(x) = \xi_\mu$. $\boxed{\text{B4}}$

BEHAUPTUNG 5. $F_\mu^{2n+1}(x) = F_\mu(F_\mu^{2n}(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\mu(\xi_\mu) = \xi_\mu$. □

Was passiert für $\mu \in [3, 4]$?

AUFGABE 1.4. Zeigen Sie, dass für $\mu = 3$

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = \begin{cases} \xi_\mu, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie, wo in dem obigen Beweis die Bedingung $\mu < 3$ genutzt wurde.

BEHAUPTUNG. *Für $\mu > 3$ existiert ein periodischer Orbit mit Primperiode 2.*

BEWEIS. Fixpunkte von F_μ^2 sind Lösungen der Gleichung

$$F_\mu^2(x) - x = 0 \Leftrightarrow \mu^2 x(1-x)\big(1 - \mu x(1-x)\big) - x = 0.$$

Zwei Lösungen sind uns bereits bekannt:

$$x = 0 \text{ und } \xi_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad F_\mu^2(x) - x = x(\mu x - \mu + 1)g(x)$$

mit $g(x)$ Polynom zweiten Grades. Durch Polynomendivision erhält man

$$\begin{aligned} g(x) &= -\big(x^2\mu^2 - x\mu(\mu+1) + \mu + 1\big) \\ g(x) &= 0 \Leftrightarrow x_\pm = \frac{\mu+1}{2\mu} \pm \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}. \end{aligned}$$

□

Für $\mu \to 3+$ ist $x_+ = x_- = \xi_3 = \frac{2}{3}$.

SATZ 1.5. *Sei $\mu \in (3, \underbrace{1+\sqrt{6}}_{=3{,}449\ldots})$, $x \in (0,1) \setminus \{\xi_\mu\}$ beliebig. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}\Big(F^k(x), \{x_-, x_+\}\Big) = 0.$$

SATZ 1.6 (Feigenbaum). *Es gibt eine monoton wachsende Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1+\sqrt{6}$ mit Grenzwert $\mu_\infty = 3{,}569\ldots$ so, dass für $\mu \in (\mu_n, \mu_{n+1})$ gilt:*

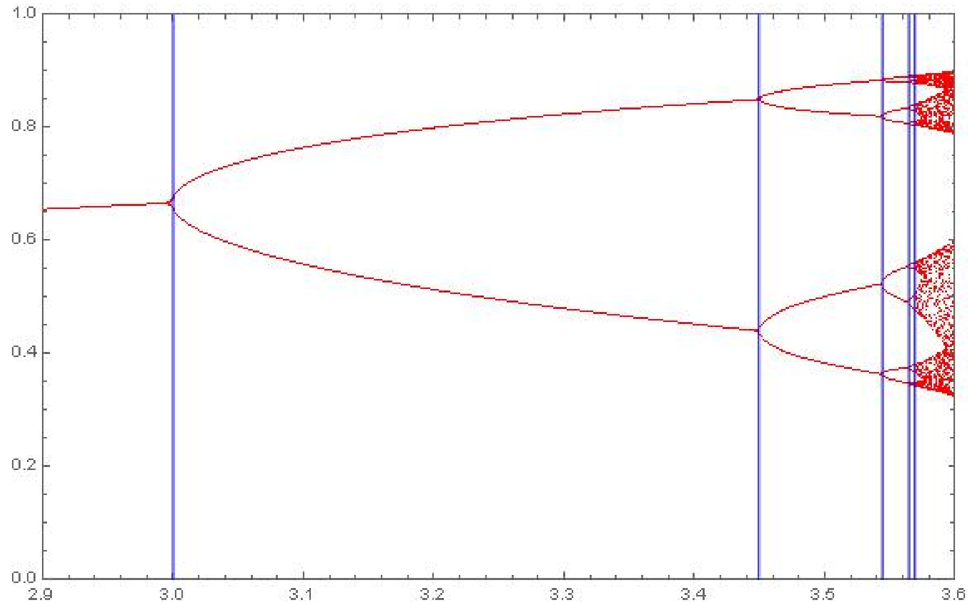
(a) *Es gibt einen periodischen Orbit* $\mathcal{O}_\mu$ *mit Primperiode* 2^n.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(F^k(x), \mathcal{O}_\mu\big) = 0$ *für fast alle* $x \in (0,1)$.

Weiterhin gilt

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n - \mu_{n-1}} = \Theta^{-1} \text{ und } \mu_\infty - \mu_n \sim C\Theta^{-n} \text{ mit } \Theta = 4{,}669\ldots$$

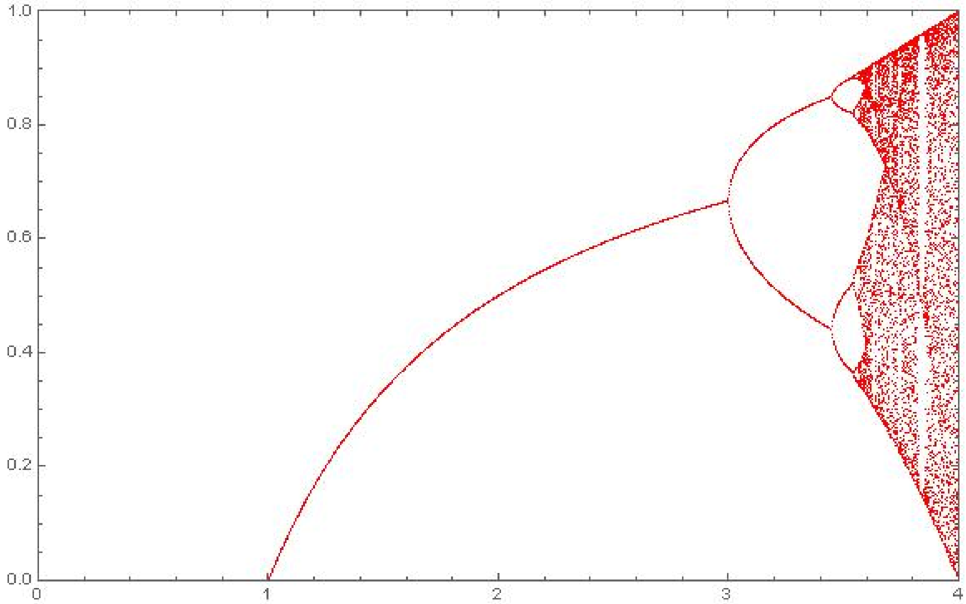
(Feigenbaum-Konstante).



Periodische Orbits der logistischen Abbildung. Die blauen Linien entsprechen den Werten $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 3{,}449\ldots$, $\mu_3 = 3{,}544\ldots$, $\mu_4 = 3{,}564\ldots$ und $\mu_\infty = 3{,}569\ldots$.

Die Vermutung von Feigenbaum: $(*)$ ist universell, d.h. gilt für die „meisten" Intervallabbildungen. Nur die Konstante C hängt von der Abbildung ab.

Was passiert für $\mu > \mu_\infty$? Im Weiteren werden wir uns viel mit dieser Frage beschäftigen.



1.3. Symbolische Dynamik, Bernoulli-Shift

Ein endliches *Alphabet* A ist eine endliche Menge, z.B. $A = \{0,1\}, A = \{0,\dots,9\}$, $A = \{a,b,\dots,z\}, A = \{\alpha,\beta,\dots,\omega\}$. Der Zustandsraum Σ ist die Menge aller einseitigen Folgen

$$\Sigma = \Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0} = \{s = (s_0, s_1, \dots) \mid s_i \in A\}.$$

Metrik auf Σ:

$$d(s,t) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{d_{\text{disk}}(s_j,t_j)}{2^j},$$

wobei d_{disk} die diskrete Metrik auf A ist, d.h.

$$d_{\text{disk}}(s_j,t_j) = \begin{cases} 0, & s_j = t_j, \\ 1, & s_j \neq t_j. \end{cases}$$

In diesem Abschnitt wird uns der Fall interessieren, wenn $A = \{0,1\}$. In diesem Fall lässt sich die Metrik d als

$$d(s,t) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{|s_j - t_j|}{2^j}$$

darstellen.

Beispiel. *Sei* $s = (0,0,\dots)$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$. *Die offene Kugel ist*

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(s) &:= \Big\{t \in \Sigma \mid d(s,t) < \varepsilon\Big\} \\ &= \Big\{t = (0,0,0,0,t_4,t_5,\dots) \mid \textit{mindestens ein } t_j = 0 \textit{ mit } j \geq 4\Big\}, \end{aligned}$$

denn

$$\sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Die abgeschlossene Kugel ist

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(s) &:= \big\{ t \in \Sigma \,|\, d(s,t) \leq \varepsilon \big\} \\ &= \big\{ t = (t_0, t_1, \dots) \,|\, t_3 = 1, t_j = 0 \,\forall\, j \neq 3 \big\} \\ &\cup \big\{ t = (t_0, t_1, \dots) \,|\, t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 \big\} \\ &\cup \big\{ t = (t_0, t_1, \dots) \,|\, t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0, t_j = 1 \forall j \geq 4 \big\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Die Topologie von Σ stimmt mit der Produkttopologie überein, d.h. mit der Topologie, die von Zylindermengen*

$$Z^{i_1 \dots i_k}_{a_1 \dots a_k} := \{ s \in \Sigma \,|\, s_{i1} = a_1, \dots, s_{ik} = a_k \}.$$

erzeugt ist.

Behauptung. *Aus $d(s,t) < 2^{-n}$ folgt $s_j = t_j$ für alle $j \leq n$.*

Beweis. Angenommen, $s_j \neq t_j$, für ein $j \leq n$. Dann gilt

$$d(s,t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{d_{\text{disk}}(s_j, t_j)}{2^j} \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}. \quad \text{Widerspruch!}$$

□

Behauptung. *Σ_A ist überabzählbar.*

Beweis (für $A = \{0,1\}$). Betrachte die Abbildung

$$H : s = (s_0, s_1, \dots) \mapsto H(s) = \underbrace{0.s_0 s_1 \dots}_{\text{Dual- oder Binärbruch}} := \sum_{j=1}^{\infty} s_j 2^{-j}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} H : \Sigma_A \to [0,1] & \text{surjektiv} \\ [0,1] & \text{ist überabzählbar} \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma_A \quad \text{überabzählbar}$$

□

Bemerkung. *H ist nicht injektiv, denn*

$$H\big((0,1,1,\dots)\big) = \frac{1}{2} = H\big((1,0,0,\dots)\big).$$

Aufgabe 1.7. *Beweisen Sie, dass (Σ_A, d) keine isolierten Punkte enthält.*

Aufgabe 1.8. *Beweisen Sie, dass (Σ_A, d) folgenkompakt ist.*

Bemerkung. *Mit dem Satz von Tychonoff lässt sich die Kompakheit des metrischen Raums (Σ_A, d) direkt beweisen: A ist endlich und somit kompakt. Daher ist $A^{\mathbb{N}_0}$ kompakt in der Produkttopologie.*

Definition 1.9. *Die Shiftabbildung (Shift, Schiebung) ist*

$$\sigma(s) = \sigma\big((s_0, s_1, s_2, \dots)\big) = (s_1, s_2, \dots).$$

Offenbar ist σ surjektiv, aber nicht injektiv.

Lemma 1.10. *Die Schiftabbildung σ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Es gelte $d(s,t) < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(\sigma(s),\sigma(t)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{\text{disk}}(\sigma(s)_j,\sigma(t)_j)}{2^j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{\text{disk}}(s_{j+1},t_{j+1})}{2^j} \\ &= 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{\text{disk}}(s_{j+1},t_{j+1})}{2^{j+1}} \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{\text{disk}}(s_k,t_k)}{2^k} \\ &= 2d(s,t) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definition 1.11. *Für beliebiges Alphabet A heißt das dynamische System (Σ_A,σ)* symbolische Dynamik *oder speziell für $A = \{0,1\}$* Bernoulli-Dynamik *oder* Bernoulli-Shift*.*

Die symbolische Dynamik besitzt genau $|A|$ Fixpunkte

$$s_a = (a,a,\dots), \quad a \in A.$$

Behauptung. *$d(\sigma^k(s),\sigma^k(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ gilt genau dann, wenn es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt so, dass $s_j = t_j$ für alle $j \geq k_0$.*

Beweis. $(\Leftarrow)$ klar.
$(\Rightarrow)$ Sei $k_1,k_2,\dots$ eine unendliche Folge mit $s_{kj} \neq t_{kj}$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$d(\sigma^{k_j}(s),\sigma^{k_j}(t)) \geq 1. \qquad \text{Widerspruch!}$$

□

Der Anziehungsbereich eines Fixpunktes s_a ist die Menge

$$AB(s_a) = \{t \in \Sigma_A \mid \exists\, k_0 \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \sigma^k(t) = s_a \quad \forall\, k \geq k_0\}.$$

Periodische Punkte: $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ sei die Menge aller periodischen Punkte mit Periode n (nicht Primperiode!). Ein Punkt $s \in \Sigma_A$ ist genau dann n-periodisch, wenn

$$s = (s_0,s_1,\dots,s_{n-1},s_0,s_1,\dots,s_{n-1},s_0,\dots).$$

Daher ist $|\mathrm{Per}_n(\sigma)|$ gleich der Anzahl der endlichen Folgen der Länge n, d.h. $|\mathrm{Per}_n(\sigma)| = |A|^n$. Der Anziehungsbereich einer periodischen Bahn $\mathscr{O}[s]$ mit Primperiode p ist die Menge

$$\begin{aligned} &\Big\{t \in \Sigma_A \mid d(\sigma^k(t),\mathscr{O}[s]) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\Big\} \\ = &\Big\{t \in \Sigma_A \mid \exists\, k_0 \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \exists\, \ell \in \{0,\dots,p-1\} \\ &\text{mit } \sigma^k(t) = \sigma^{k+\ell}(s) \quad \forall\, k \geq k_0\Big\}. \end{aligned}$$

Behauptung. *Der Anziehungsbereich eines Fixpunktes oder einer periodischen Bahn liegt dicht in* Σ_A.

Beweis. Seien $t \in \Sigma_A$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass $2^{-(n-1)} < \varepsilon$ ist. Sei $u \in \mathscr{O}[s]$ beliebig. Setze

$$\tilde{t} := (\underbrace{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}}_{\text{die ersten } n \text{ Elemente von } t}, u) \in AB\left(\mathscr{O}[s]\right).$$

Betrachte

$$d(\tilde{t}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{\text{disk}}(\tilde{t}_j, t_j)}{2^j} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2^{-(n-1)} < \varepsilon.$$

□

1.4. Chaos

Definition 1.12. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum,* $F : X \to X$*. Das dynamische System* (X, F) *heißt chaotisch nach Devaney, falls*

(a) *periodische Punkte dicht in* X *sind,*
(b) *es eine dichte Bahn gibt, d.h.*

$$\exists\, x \in X \text{ mit } \overline{\{F^k(x) \mid k \in \mathbb{N}_0\}} = X.$$

Satz 1.13. *Die symbolische Dynamik* (Σ_A, σ) *ist chaotisch nach Devaney.*

Beweis. **(a)** Seien $t \in \Sigma_A$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n - 1 > -\log_2(\varepsilon) \Leftrightarrow 2^{-(n-1)} < \varepsilon$. Dann gilt

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-(n-1)} < \varepsilon.$$

Folglich gilt $d(t, s) < \varepsilon$ für beliebiges $s \in \Sigma_A$ mit $s_j = t_j$ für $0 \leq j < n$. Setze $s_{\ell n + j} = t_j$, $0 \leq j < n$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann ist s n-periodisch mit $d(t, s) < \varepsilon$.

(b) Beweis für $A = \{0, 1\}$. Für ein beliebiges endliches Alphabet ist der Beweis analog.

Setze

$$s = (\underbrace{0, 1,}_{\substack{\text{alle Blöcke der Länge 1} \\ (2^1 \text{ Stück})}} \underbrace{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1}_{\substack{\text{alle Blöcke der Länge 2} \\ (2^2 \text{ Stück})}}, \ldots).$$

Seien $t \in \Sigma_A$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n - 1 > -\log_2(\varepsilon) \Leftrightarrow 2^{-(n-1)} < \varepsilon$. Betrachte die ersten n Elemente von t: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$. Finde diesen Block in s, wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sigma^k(s) = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, \ldots) \Rightarrow d(t, \sigma^k(s)) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

□

Warum (a) und (b) aus Definition 1.12 Chaos bedeuten, ist nicht ersichtlich. Nun diskutieren wir eine Folgerung dieser Eigenschaften, die von recht chaotischer Natur ist.

DEFINITION 1.14. *Ein dynamisches System* (X, F) *hat* empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspuknt, *wenn es ein* $\varepsilon_0 > 0$ *(Empfindlichkeitsschranke) gibt, sodass zu jedem* $x \in X$ *und jedem* $\delta > 0$ *ein* $y \in B_\delta(x)$ *und ein* $k = k(x,y)$ *existieren mit* $d(F^k(x), F^k(y)) \geq \varepsilon_0$. *Kurz gefasst: In jeder beliebig kleinen Umgebung von* $x \in X$ *gibt es mindestens einen Punkt* y *mit der Eigenschaft* $d(F^k(x), F^k(y)) \geq \varepsilon_0$ *für ein* $k \in \mathbb{N}_0$.

SATZ 1.15. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum mit* $|X| = \infty$, $F : X \to X$ *stetig. Das dynamische System* (X, F) *sei chaotisch. Dann hat* (X, F) *empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspuknt.*

Bevor wir den Satz beweisen, diskutieren wir Definition 1.14.

BEMERKUNGEN.
(1) *Die empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt bedeutet Unvorhersagbarkeit eines Systems, sobald der Anfangszustand nicht exakt, sondern nur beliebig genau bekannt ist.*
(2) *Numerische Simulationen einer Bahn konvergieren i.A. zur tatsächlichen Bahn nicht, egal wie genau die Rechnung ist.*

Wir besprechen einen direkten (sehr einfachen) Beweis davon, dass die symbolische Dynamik empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspuknt hat.

PROPOSITION 1.16. (Σ_A, σ) *hat empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt.*

BEWEIS. Sei $t \in \Sigma_A$ beliebig. Für ein $j_0 \in \mathbb{N}_0$ wähle ein $s \in \Sigma_A$ mit

$$s_j = \begin{cases} \neq t_j, & j = j_0, \\ = t_j, & j \neq j_0. \end{cases}$$

Zu beliebigem $\delta > 0$ wähle ein $j_0 > -\log_2(\delta)$ ($\Leftrightarrow 2^{-j_0} < \delta$). Dann ist $d(t,s) = 2^{-j_0} < \delta$ und

$$d\big(\sigma^{j_0}(t), \sigma^{j_0}(s)\big) = 1 =: \varepsilon_0 > 0.$$

$\square$

BEWEIS VON SATZ 1.15. **(1)** WAHL EINES GLOBALEN $\varepsilon_0 > 0$. Wähle zwei beliebige verschiedene periodische Bahnen $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$, d.h. $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.
Setze $\varepsilon_0 := \frac{1}{8}\, d(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) > 0$.

(2) VORBEREITUNGEN.

BEHAUPTUNG 1. Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt $d(x, \mathcal{O}_1) \geq 4\varepsilon_0$ oder $d(x, \mathcal{O}_2) \geq 4\varepsilon_0$.

BEWEIS mit der Dreiecksungleichung:

$$d(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = 8\varepsilon_0 \leq d(\mathcal{O}_1, x) + d(\mathcal{O}_2, x).$$

$\boxed{\text{B1}}$

Falls $d(x, \mathcal{O}_i) \geq 4\varepsilon_0$, setze $\mathcal{O} := \mathcal{O}_i, i = 1, 2$. Sei $q := |\mathcal{O}|$, d.h. q ist die Primperiode. Wähle $x_q \in \mathcal{O}$ beliebig. Wähle ein $0 < \delta < \varepsilon_0$ beliebig.
Die offene Kugel $B_\delta(x)$ enthält

- einen periodischen Punkt x_p mit Primperiode $p \in \mathbb{N}$,

- einen Punkt y mit $\overline{\{F^k(y)\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}}=X$. In der Tat sei

$$\big(\overline{y},F(\overline{y}),F^2(\overline{y}),\dots\big)$$

eine dichte Bahn in X. Dann gibt es ein $j\in\mathbb{N}_0$ so, dass $F^j(\overline{y})\in B_\delta(x)$. Nun setze $y:=F^j(\overline{y})$.

(3) Wir zeigen nun: Es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$F^{np}(y)\in B_{\varepsilon_0}\big(F^m(x_q)\big)\text{ für ein }0\le m<p.$$

Behauptung 2. Es gibt ein $0<\widetilde{\delta}<\delta$ sodass

$$d\big(F^m(\xi),F^m(x_q)\big)<\varepsilon_0$$

für alle $\xi\in B_{\widetilde{\delta}}(x_q)$ und alle $m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\le m<p$.

Beweis: Die Abbildung F^m ist stetig. Daher existiert ein $0<\delta_m<\delta$ mit

$$d\big(F^m(\xi),F^m(x_q)\big)<\varepsilon_0\quad\text{für alle}\quad\xi\in B_{\delta_m}(x_q).$$

Setze $\widetilde{\delta}:=\min\{\delta_0,\delta_1,\dots,\delta_{p-1}\}<\delta$. $\boxed{\text{B3}}$

Wegen $\overline{\{F^k(y)\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}}=X$ gibt es ein $\ell\in\mathbb{N}$ mit $F^\ell(y)\in B_{\widetilde{\delta}}(x_q)$. Schreibe $\ell=np-m$, $m\in\mathbb{N}$, $m\in\{0,1,\dots,p-1\}$. Dann ist

$$F^{np}(y)=F^m\big(\underbrace{F^{np-m}(y)}_{\substack{\|\\ F^\ell(y)\in B_{\widetilde{\delta}}(x_q)}}\big)\overset{\text{Beh. 2}}{\in}B_{\varepsilon_0}\big(F^m(x_q)\big).$$

(4) Aus der Dreiecksungleichung fogt:

$$\begin{aligned}d\big(x,F^m(x_q)\big)&\le d(x,x_p)+d\big(\underbrace{F^{np}(x_p)}_{\substack{\|\\ x_p}},F^{np}(y)\big)\\&\quad+d\big(F^{np}(y),F^m(x_q)\big).\end{aligned}$$

Abschätzung einzelner Terme:

$$\begin{aligned}&d\big(x,F^m(x_q)\big)\ge d(x,\mathscr{O})\ge 4\varepsilon_0,\\&d(x,x_p)<\delta<\varepsilon_0\ [\text{wegen }x_p\in B_\delta(x)],\\&d\big(F^{np}(y),F^m(x_q)\big)<\varepsilon_0\ [\text{nach (3)}].\end{aligned}$$

Folglich ist $d\big(F^{np}(x_p),F^{np}(y)\big)>4\varepsilon_0-2\varepsilon_0=2\varepsilon_0$. Daher gibt es ein $k:=np$ mit $d\big(F^k(x_p),F^k(y)\big)>2\varepsilon_0$. Mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$d\big(F^k(x),F^k(x_p)\big)+d\big(F^k(x),F^k(y)\big)\ge d\big(F^k(x_p),F^k(y)\big)>2\varepsilon_0.$$

Somit gilt $d\big(F^k(x),F^k(x_p)\big)>\varepsilon_0$ oder $d\big(F^k(x),F^k(y)\big)>\varepsilon_0$. □

Bemerkungen. *(1) Hat ein dynamisches System empfingliche Abhängigkeit vom Anfangspuknt, braucht das dynamische System nicht chaotisch zu sein. Sei*

$g : (1,\infty) \to (1,\infty), g(x) = x^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} & x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j}y^j \,\forall\, n \in \mathbb{N} \\ \overset{\text{sei } x>y}{\Rightarrow} \quad & x^n - y^n \geq (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j}y^j \\ = \quad & (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1} = (x-y)ny^{n-1} \\ \Rightarrow \quad & g^k(x) - g^k(y) = x^{2^k} - y^{2^k} \geq (x-y)2^k y^{2^k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon_0 > 0$ beliebig groß (die Empfindlichkeitsschranke). Sei $t \in (1,\infty)$ beliebig. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $s \in B_\delta(t) \cap (1,\infty)$ und ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|g^k(t) - g^k(s)| \geq \varepsilon_0.$$

Also hat das dynamische System $\big((1,\infty), g\big)$ empfindliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt. $\big((1,\infty), g\big)$ besitzt aber keine periodischen Punkte und somit ist nicht chaotisch.

(2) Ohne die Voraussetzung, dass die Abbildung $F : X \to X$ stetig ist, ist die Aussage von Satz 1.15 im Allgemeinen falsch. Ist der metrische Raum (X, d) hinreichend „groß" (genauer nicht total beschränkt), so gilt die Aussage auch für nicht stetige Abbildungen (Vu Dong Tô (2004)).

AUFGABE 1.17. Sei

$$\Sigma' := \{s \in \Sigma_{\{0,1\}} \,|\, s_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = 1\} \subset \Sigma_{\{0,1\}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Shiftabbildung σ lässt die Menge Σ' invariant und Σ' ist abgeschlossen in $\Sigma_{\{0,1\}}$.
(b) (Σ', σ') mit $\sigma' := \sigma\big|_{\Sigma'}$ ist chaotisch.

BEMERKUNG. *Das dynamische System (Σ', σ') heißt Teilshift (oder Subshift) von (Σ, σ).*

1.5. Topologische Transitivität

DEFINITION 1.18. *Ein dynamisches System (X, F) heißt* topologisch transitiv, *wenn für alle Paare nichtleerer offener Teilmengen $U, V \subset X$ ein $k = k(U, V) \in \mathbb{N}$ existiert mit $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Vorsicht: Die Terminologie ist nicht einheitlich. Die topologische Transitivität ist „fast" äquivalent zur Existenz einer dichten Bahn.

SATZ 1.19. *Sei $F : X \to X$ stetig.*

(1) *X besitze keine isolierten Punkte. Existiert eine dichte Bahn, so ist das dynamische System (X, F) topologisch transitiv.*
(2) *Sei X ein vollständiger separabler metrischer Raum. Ist das dynamische System (X, F) topologisch transitiv, so existiert eine dichte Bahn.*

BEMERKUNG. *Ein vollständiger separabler metrischer Raum heißt* polnischer Raum.

BEWEIS. (1) Sei der Orbit $\{F^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ dicht in X. Seien $U, V \subset X$ beliebige offene Mengen. Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $F^\ell(x) \in U$. Da X keine isolierten Punkte hat, iat $\{F^j(x)\}_{j>\ell}$ auch dicht in X. Somit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, $m > \ell$, mit $F^m(x) \in V$. Setze

$$k := m - \ell \Rightarrow F^k\big(\underbrace{F^\ell(x)}_{\in U}\big) \in V \Rightarrow F^k(U) \cap V \neq \varnothing.$$

(2) BEHAUPTUNG 1. Es gibt ein abzählbares Mengensystem $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von Kugeln B_i so, dass für jedes $x \in X$ und jede offene Menge $U \subset X$, $x \in U$ ein B_i mit $x \in B_i \subset U$ existiert.

BEWEIS. Nach der Voraussetzung ist X separabel. Daher existiert eine dichte abzählbare Teilmenge $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Wähle $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ als $\{B_r(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Q}, r>0}$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wähle ein x_j mit $d(x_j, x) < \varepsilon/3$ und ein $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, mit $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $x \in B_r(x_j) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. $\boxed{\text{B1}}$

Aus Behauptung 1 folgt: Ein Orbit $\{F^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ liegt in X dicht genau dann, wenn für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $F^k(x) \in B_i$.

Angenommen, dass das dynamische System (X, F) keinen dichten Orbit besitzt. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $i(x) \in \mathbb{N}$ so, dass $F^k(x) \notin B_{i(x)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Sei

$$A(x) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(B_{i(x)}).$$

Das Mengensystem $\{A(x)\}_{x\in X}$ enthält höchstens *abzählbar viele verschiedene* Mengen, $A(x)$ ist offenbar offen.

BEHAUPTUNG 2. $A(x) \cap U \neq \varnothing$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$, d.h. $A(x)$ liegt dicht in X.

BEWEIS. Angenommen, $A(x) \cap U = \varnothing$ für eine offene Menge $U \subset X$. Dann ist $F^{-k}(B_{i(x)}) \cap U = \varnothing$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $F^k(M_1 \cap M_2) = F^k(M_1) \cap F^k(M_2)$ gilt dann $B_{i(x)} \cap F^k(U) = \varnothing$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Widerspruch! $\boxed{\text{B2}}$

Nun brauchen wir ein Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

DER BAIRESCHE KATEGORIENSATZ: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und (Y_n), $Y_n \subset X$, eine Folge offener dichter Teilmengen. Dann ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ dicht.

Da $\bigcap\limits_{x\in X} A(x)$ ein abzählbarer Durchschnitt ist, ist mit dem Satz von Baire $\bigcap\limits_{x\in X} A(x)$ dicht in X.

BEHAUPTUNG 3. Für alle $x \in X$ gilt $x \in A(x)^c$.

BEWEIS. $F^k(x) \notin B_{i(x)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist $x \notin F^{-k}(B_{i(x)})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt $x \notin A(x)$. $\boxed{\text{B3}}$

Aus Behauptung 3 folgt:

$$\bigcup_{x\in X} A(x)^c = X \Rightarrow \bigcap_{x\in X} A(x) = \varnothing \qquad \text{Widerspruch!}$$

□

BEISPIELE. (1) *Sei* $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ *mit der euklidischen Metrik,* $F(0) = 0$ *und* $F\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. *Die Abbildung* F *ist stetig.* $\{F^k(1)\}$ *ist eine dichte Bahn.*
Sei $U = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $V = \{1\} \Rightarrow F^k(U) = \left\{\frac{1}{k+2}, \quad k \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow F^k(U) \cap V = \varnothing$. *Somit ist* (X, F) *nicht topologisch transitiv.*

(2) *Sei* $I = [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \quad \textit{(Zeltabbildung).}$$

Sei $X = \mathrm{Per}(f) := \{x \in I \,|\, f^m(x) = x \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$, $F := f|_X$. (X, F) *hat keinen dichten Orbit, ist aber topologisch transitiv.*

AUFGABE 1.20. Zeigen Sie, dass das dynamische System (X, F) aus dem zweiten Beispiel topologisch transitiv ist.
Hinweis: Zu jedem abgeschlossenen Intervall $J \subset I$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ s.d. $f^k(J) = I$. Folgern Sie daraus, dass für alle offenen Intervalle $J_1, J_2 \subset I$ ein periodischer Orbit mit $\mathcal{O} \cap J_i \neq \varnothing, i = 1, 2$, existiert.

BEMERKUNG. *Sei* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum,* $F : X \to X$ *stetig. Ist das dynamische System* (X, F) *topologisch transitiv, so ist* F *surjektiv.*
BEWEIS: *Für alle offenen nichtleeren Teilmengen* $V \subset X$ *gilt*

$$F(X) \cap V = F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^n(X)\right) \cap V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(X) \cap V \neq \varnothing$$

und somit liegt $F(X)$ *dicht in* X. *Da* X *kompakt ist und* F *stetig, ist das Bild* $F(X)$ *abgeschlossen. Folglich gilt* $F(X) = X$.

SATZ 1.21. *Sei* (X, d) *ein polnischer Raum. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) *Das dynamische System* (X, F) *ist topologisch transitiv;*
(2) *Für alle Paare nichtleerer offener Teilmengen* $U, V \subset X$ *existiert ein* $k = k(U, V) \in \mathbb{N}_0$ *mit* $F^k(U) \cap V \neq \varnothing$;
(3) *Für jede nichtleere offene Teilmenge* $U \subset X$ *ist* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(U)$ *dicht in* X;
(4) *Für jede nichtleere offene Teilmenge* $U \subset X$ *ist* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^n(U)$ *dicht in* X;
(5) *Für alle Paare nichtleerer offener Teilmengen* $U, V \subset X$ *existiert ein* $k = k(U, V) \in \mathbb{N}$ *mit* $F^{-k}(U) \cap V \neq \varnothing$;
(6) *Für alle Paare nichtleerer offener Teilmengen* $U, V \subset X$ *existiert ein* $k = k(U, V) \in \mathbb{N}_0$ *mit* $F^{-k}(U) \cap V \neq \varnothing$;
(7) *Für jede nichtleere offene Teilmenge* $U \subset X$ *ist* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(U)$ *dicht in* X;
(8) *Für jede nichtleere offene Teilmenge* $U \subset X$ *ist* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U)$ *dicht in* X;

(9) *Ist $E \subset X$ abgeschlossen und $F(E) \subset E$, dann ist entweder $E = X$ oder E nirgends dicht in X;*
(10) *Ist $U \subset X$ offen und $F^{-1}(U) \subset U$, dann ist entweder $U = \varnothing$ oder U dicht in X;*
(11) *Die Menge*

$$\{x \in X | (F^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{ist dicht in } X\}$$

ist eine dichte G_δ-Menge, d.h. ein abzählbarer Durchschnitt offener Teilmengen.

Bemerkungen. (1) *Die topologische Transitivität bedeutet „Unzerlegbarkeit" des dynamischen Systems.*
(2) *Eine Teilmenge $E \subset X$ heißt nirgends dicht, falls das Innere des Abschlusses von E leer ist, $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$. Eine abgeschlossene Teilmenge $E \subset X$ ist genau dann nirgends dicht, wenn das Komplement $E^c := X \setminus E$ in X dicht liegt, denn*

$$\mathring{E} = \varnothing \iff X = \left(\mathring{E}\right)^c = \overline{E^c}.$$

(3) *Die Invarianzbedingung $F(E) \subset E$ in (10) ist äquivalent zu Bedingung $E \subset F^{-1}(E)$.* Beweis: *Aus $F(E) \subset E$ folgt*

$$E \subset F^{-1}(F(E)) \subset F^{-1}(E).$$

Umgekehrt folgt aus $E \subset F^{-1}(E)$ die Inklusion $F(E) \subset F(F^{-1}(E)) \subset E$.

Beweis. **(1)** $\Leftrightarrow$ **(3)** Das dynamische System (X, F) ist genau dann topologisch transitiv, wenn

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(U) \cap V \neq \varnothing$$

für beliebige nichtleere offene Teilmengen $V \subset X$, d.h. genau dann, wenn $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(U)$ dicht in X liegt.

Analog zeigt man die folgenden Äquivalenzen: **(2)** $\Leftrightarrow$ **(4)**, **(5)** $\Leftrightarrow$ **(7)**, **(6)** $\Leftrightarrow$ **(8)**.

(5) $\Leftrightarrow$ **(6)** Die Implikation (5) $\Rightarrow$ (6) ist klar. Umgekehrt sei $U \subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge. Dann ist $F^{-1}(U)$ offen. Nach (6) existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $F^{-k}(F^{-1}(U)) \cap V \neq \varnothing$, d.h. $F^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\Leftrightarrow$ **(4)** Die Implikation (3) $\Rightarrow$ (4) ist klar. Umgekehrt sei $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F^n(U)$ dicht in X. Dann ist

$$F\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F^n(U)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(U)$$

dicht in $F(X)$, denn

$$F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^n(U)\right)\cap V \supset F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^n(U)\right)\cap F(F^{-1}(V))$$
$$\supset F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^n(U)\cap F^{-1}(V)\right)\neq\varnothing$$

für beliebige offene Teilmengen $V\subset X$ mit $V\cap F(X)\neq\varnothing$. Wegen der Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (4) gilt $F(X)\cap V\neq\varnothing$ für alle nichtleeren offenen Teilmengen $V\subset X$, d.h. $F(X)$ ist dicht in X. Somit ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(U)$ dicht in X.

(1) $\Rightarrow$ (9) Angenommen, eine abgeschlossene invariante ($F(E)\subset E$) Teilmenge $E\subset X$ ist nicht nirgends dicht. Dann existiert ein nichtleeres offenes $U\subset E$. Nach Satz 1.19 gibt es eine dichte Bahn $\{F^n(x)|n\in\mathbb{N}_0\}$. Daher existiert ein $m\in\mathbb{N}_0$, sodass $F^m(x)\in U$. Wegen $F(E)\subset E$ gilt $\{F^n(x)|n\geq m\}\subset E$. Folglich ist

$$\{x,F(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup E=X$$

und somit

$$F\left(\{x,F(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup E\right)$$
$$=\{F(x),F^2(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup\{F^m(x)\}\cup F(E)=F(X).$$

Da die Menhe $F(X)$ in X dicht liegt , ist

$$\{F(x),F^2(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup\{F^m(x)\}\cup F(E)$$

ebenfalls dicht. Wegen $F^m(x)\in E$ und $F(E)\subset E$ ist die Obermenge

$$\{F(x),F^2(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup E$$

dicht in X. Da E abgeschlossen ist, gilt

$$\{F(x),F^2(x),\ldots,F^{m-1}(x)\}\cup E=X.$$

Durch das rekursive Widerholung dieser Argumentation erhalten wir $E=X$.

(9) $\Rightarrow$ (10) Sei $U\subset X$ eine offene Teilmenge mit $F^{-1}(U)\subset U$. Setze $E:=U^c$ und betrachte

$$F^{-1}(E)=F^{-1}(U^c)=\left(F^{-1}(U)\right)^c\supset U^c=E.$$

Somit ist entweder $E=X$ oder E nirgends dicht, d.h. $U=\varnothing$ oder U liegt dicht in X.

(10) $\Rightarrow$ (9) Sei $E\subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $F(E)\subset E$. Setze $U:=E^c$ und betrachte

$$F^{-1}(U)=F^{-1}(E^c)=\left(F^{-1}(E)\right)^c\subset E^c=U,$$

siehe Bemerkung (3) nach Satz 1.21. Somit gilt entweder $U=\varnothing$ oder $\overline{U}=X$, d.h. entweder $E=X$ oder E nirgends dicht in X.

(1) $\Rightarrow$ (5) Setze $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F^{-k}(U)$. Dann ist A offen, nichtleer und es gilt

$$F^{-1}(A) = \bigcup_{k=2}^{\infty} F^{-k}(U) \subset A.$$

Wegen der Implikation (1) $\Rightarrow$ (9) $\Leftrightarrow$ (10) liegt A dicht in X, d.h. $A \cap V = \emptyset$ für beliebige offene nichtleere Teilmengen $V \subset X$. Somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $F^{-k}(U) \cap V = \emptyset$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Seien $U, V \subset X$ beliebige nichtleere offene Teilmengen. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $F^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\emptyset \neq F^k\left(F^{-k}(U) \cap V\right) \subset F^k\left(F^{-k}(U)\right) \cap F^k(V) \subset U \cap F^k(V),$$

also ist $U \cap F^k(V) \neq \emptyset$.

(10) $\Rightarrow$ (7) Sei $U \subset X$ eine offene nichtleere Teilmenge. Setze $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(U)$. Dann ist A offen, nichtleer und es gilt $F^{-1}(A) \subset A$. Folglich ist A dicht in X.

Für den Beweis der Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (11) benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis. □

LEMMA 1.22. *In jedem separablen metrischen Raum (X, d) lässt sich jede offene Teilmenge $A \subset X$ als eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Kugeln darstellen, d.h. es gibt eine abzählbare Basis der Topologie.*

BEWEIS. Sei $\{x_k | k \in N_0\}$ mit $N_0 \subset \mathbb{N}$ eine dichte Teilmenge in X. Setze

$$N_1 := \{k \in N_0 | x_k \in A\}.$$

Für jedes $k \in N_1$ setze

$$\ell_k := \min\{\ell \in \mathbb{N} | B_{2^{-\ell}}(x_k) \subset A\}.$$

Dann gilt offenbar $B_{2^{-\ell}}(x_k) \subset A$ für alle $k \in N_1$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq \ell_k$. Somit ist

$$\bigcup_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k) \subset A.$$

Sei nun $x \in A$ beliebig. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $B_{2^{-\ell}}(x) \subset A$ für alle $l \geq m$. Es gibt ein x_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $x_k \in B_{2^{-m-1}}(x)$. Es gilt also sogar $k \in N_1$. Sei $y \in B_{2^{-m-1}}(x_k)$ beliebig. Dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < 2^{-m-1} + 2^{-m-1} = 2^{-m}$$

und folglich

$$B_{2^{-m-1}}(x_k) \subset B_{2^{-m}(x)} \subset A.$$

Insbesondere folgt daraus, dass $m + 1 \geq \ell_k$. Wegen

$$x \in B_{2^{-m-1}}(x_k) \subset B_{2^{-\ell_k}}(x_k)$$

gilt $x \in \bigcup_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k)$, d.h.

$$A \subset \bigcup_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k).$$

□

Beweis von Satz 1.21, Fortsetzung. **(1) ⇒ (11)** Setze

$$A := \{x \in X | (F^n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{ist dicht in } X\}.$$

Sei $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie. Ein Punkt $x \in X$ liegt in der Menge A genau dann, wenn zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $F^{n_j}(x) \in U_j$. Also ist

$$A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U_j).$$

Die Mengen $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U_j)$ sind offen und wegen der Implikation (1) ⇒ (4) dicht in X. Somit ist A eine G_δ-Menge und nach dem Satz von Baire dicht in X.

(11) ⇒ (8) Da die Menge A dicht in X ist, sind die Teilmengen $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U_j)$ ebenfalls dicht. Sei $U \subset X$ eine offene nichtleere Teilmenge. Dann ist $U = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} U_{j(k)}$ für eine Indexmenge $j(\mathbb{N})$. Wegen

$$F^{-n}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F^{-n}(U_{j(k)})$$

ist die Menge

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(U) F^{-n}(U_{j(k)})$$

dicht in X. □

Aufgabe 1.23. Sei (X, d) ein polnischer Raum, $F : X \to X$ stetig. Eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt F-invariant, falls $\varphi(F(x)) = \varphi(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Zeigen Sie: Ist (X, F) topologisch transitiv, so ist jede stetige F-invariante Funktion konstant.

Definition 1.24. *Ein dynamisches System (X, F) heißt* minimal, *wenn für jedes $x \in X$ der Orbit $\left(F^j(x)\right)_{j\in\mathbb{N}_0}$ dicht in X liegt.*

Offensichtlich ist jedes minimale dynamische System topologisch transitiv und nicht chaotisch im Sinne von Devaney.

Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ausgeschtatet mit der Metrik

$$d(\theta_1, \theta_2) := \min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\}$$

ist ein kompakter metrischer Raum. Sei $R_\omega : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ die Rotationsabbildung, $R_\omega(\Theta) := \Theta + 2\pi\omega$ modulo 2π, $\omega \in \mathbb{R}$. Die Metrik d ist Rotationsinvariant, d.h. $d(R_\omega\theta_1, R_\omega\theta_2)$.

Satz 1.25 (Jacobi). *Ist ω irrational, so ist das dynamische System $(\mathbb{S}^1, R_\omega)$ minimal.*

Beweis. Sei $\theta \in \mathbb{S}^1$ beliebig.

Behauptung: $R^m_\omega(\theta) \neq R^n_\omega(\theta)$ für $m \neq n$.

Beweis. Angenommen, es gäbe $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $R_\omega^m(\theta) = R_\omega^n(\theta)$. Dann ist $2\pi(m-n)\omega = 0 \pmod{2\pi}$, d.h. $2\pi(m-n)\omega = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Somit ist $\omega \in \mathbb{Q}$. Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Folge $\left(R_\omega^n(\theta)\right)$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$ mit $d(R_\omega^n(\theta), R_\omega^m(\theta)) < \varepsilon$. O.B.d.A. sei $n > m$. Setze $k := n - m$. Betrachte

$$d(R_\omega^k(\theta), \theta) = d(R_\omega^m(R_\omega^k(\theta)), R_\omega^m(\theta)) = d(R_\omega^n(\theta), R_\omega^m(\theta)) < \varepsilon$$

und somit

$$d(R_\omega^{k\ell}(\theta), R_\omega^{k(\ell-1)}\theta) = d(R_\omega^k(\theta), \theta) < \varepsilon$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Nach der Behauptung sind alle Folgenglieder der Folge $(\theta, R_\omega^k(\theta), R_\omega^{2k}(\theta), \dots)$ paarweise verschieden und daher $d(R_\omega^k(\theta), \theta) > 0$. Folglich liegt in der ε-Umgebung jedes Punktes $\widetilde{\theta} \in S^1$ ein Folgenglied. $\square$

Wir studieren nur einige ausgewählte Eigenschaften minimaler dynamischer Systeme.

Satz 1.26. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $F : X \to X$ stetig. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) *Das dynamische System ist minimal;*
(2) *Ist $E \subset X$ abgeschlossen und $F(E) \subset E$, so ist entweder $E = X$ oder $E = \varnothing$;*
(3) *Ist $U \subset X$ offen und $F^{-1}(U) \subset U$, so ist entweder $U = X$ oder $U = \varnothing$;*
(4) *Für jede nichtleere offene Menge $U \subset X$ gilt $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(U) = X$.*

Beweis. **(1) $\Rightarrow$ (2)** Sei $E \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $F(E) \subset E$. Sei $x \in E$ beliebig. Dann ist $\{F^n(x) | n \in \mathbb{N}_0\} \subset E$ und folglich

$$X = \overline{\{F^n(x) | n \in \mathbb{N}_0\}} \subset E.$$

Also gilt $X = E$.

(2) $\Rightarrow$ (3) lässt sich genauso wie die Implikation (9) $\Rightarrow$ (10) in Satz 1.21 beweisen.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $U \subset X$ beliebige nichtleere offene Teilmenge. Dann ist die Menge $A := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(U)$ offen und es gilt

$$F^{-1}(A) = \bigcup_{n=2}^{\infty} F^{-n}(U) \subset A.$$

Nach (3) ist $A = X$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X$ beliebig. Sei $U \subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge. Dann ist $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(U)$ und somit $x \in F^{-n}(U)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. $F^n(x) \in U$. Also ist das dynamische System $(X; F)$ minimal. $\square$

1.6. Topologisch transitive Intervallabbildungen sind chaotisch

SATZ 1.27. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $F : I \to I$ stetig. Ist das dynamische System (I, F) topologisch transitiv, so liegen periodische Punkte der Abbildung F dicht in I. Insbesondere ist das dynamische System (I, F) chaotisch.*

Für den Beweis des Satzes brauchen wir einige Hilfsergebnisse.

LEMMA 1.28. *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt entweder $F([a, b]) \subset [a, b]$ oder $F([a, b]) \supset [a, b]$, so besitzt F einen Fixpunkt in $[a, b]$.*

BEMERKUNG. *Gilt $F([a, b]) \subset [a, b]$, so besitzt F einen Fixpunkt nach dem Satz von Brouwer:*

$$\left.\begin{array}{ll} F : [a,b] \to [a,b] & \textit{stetig} \\ [a,b] & \textit{konvex und kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in [a,b] \textit{ mit } F(\overline{x}) = \overline{x}.$$

BEWEIS. Sei $G(x) := F(x) - x$.
(1) Sei $F([a, b]) \subset [a, b]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad F(a) \geq a \text{ und } F(b) \leq b \\ &\Rightarrow \quad G(a) \geq 0 \text{ und } G(b) \leq 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in [a, b]$ mit $G(c) = 0$.
(2) Sei $F([a, b]) \supset [a, b]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists\, x, y \in [a,b] \text{ mit } F(x) \leq a \text{ und } F(y) \geq b \\ &\Rightarrow \quad G(x) \leq 0 \text{ und } G(y) \geq 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in [a, b]$ mit $G(c) = 0$. □

LEMMA 1.29. *Sei $J \subset I$ ein Intervall. Es gelte:*

(a) *J enthält keine periodischen Punkte.*
(b) *Es gibt ein $x \in J$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $F^m(x) \in J$ und $x < F^m(x)$.*

Dann gilt $F^{mk}(x) > x$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. Sei $G := F^m$. Vollständige Induktion:

- $k = 1$: $x < F^m(x) = G(x)$ (nach der Voraussetzung).
- Es gelte $G^i(x) > x$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Angenommen, $G^k(x) \leq x$. Wir zeigen, dass J einen periodischen Punkt enthält. Daraus wird die Ungleichung $G^k(x) > x$ folgen.
Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} M &:= \{G^i(x) \mid 0 \leq i \leq k-1\} \\ &= \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \mid x_0 = x,\ x_j \leq x_{j+1},\ j = 0, \ldots, k-2\} \end{aligned}$$

(Hier schreiben wir Elemente von M in der aufsteigenden Reihenfolge). Da J keine periodischen Punkte enthält, ist

$$(*) \qquad\qquad x_0 < x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1}$$

Nach der Annahme ist $G^k(x) \leq x = x_0 < x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1}$. Sei $1 \leq j \leq k-1$ so, dass $x_1 = G^j(x)$. Das Intervall J enthält keine Fixpunkte von G, d.h. $x \neq G(x)$. Nach $(*)$ gilt dann

$$\begin{aligned} & x_1 \leq G(x) \in J \quad (G(x) = F^m(x) \in J \text{ nach Voraussetzung (b)}) \\ \overset{x_1 > x_0 = x \in J}{\Longrightarrow} \quad & x_1 \in J. \end{aligned}$$

Die Zahl $k - j$ genügt der Ungleichung $1 \leq k - j \leq k - 1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & G^{k-j}(x) \in M \Rightarrow G^{k-1}(x) \geq x_1 \\ \overset{G^k(x) \leq x_0 < x_1}{\Longrightarrow} \quad & [x_0, x_1] \subset \left[G^k(x_0), G^{k-j}(x_0)\right] \\ & \left[G^{k-j}\big(\underbrace{G^j(x_0)}_{=x_1}\big), G^{k-j}(x_0)\right] \subset G^{k-j}([x_0, x_1]) \\ \overset{\text{Lemma 1.28}}{\Longrightarrow} \quad & G^{k-j} \text{ besitzt einen Fixpunkt in } [x_0, x_1] \subset J \\ \Longrightarrow \quad & G = F^m \text{ besitzt einen periodischen Punkt in } [x_0, x_1] \subset J \end{aligned}$$

Widerspruch! □

Analog beweist man das folgende

Lemma 1.30. *Sei $J \subset I$ ein Intervall. Es gelte (a) aus Lemma 1.29 und*

(b′) *es gibt ein $y \in J$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F^n(y) \in J$ und $y > F^n(y)$.*

Dann gilt $y > F^{kn}(y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.31. *Sei J ein Intervall. Es gelte (a) aus Lemma 1.29 und*

(b″) *es gibt $x, y \in J$ und $m, n \in \mathbb{N}$ s.d. $F^m(x) \in J$, $F^n(y) \in J$ und $y < x < F^m(x)$.*

Dann gilt $y < F^n(y)$.

Beweis. Angenommen, $y \geq F^n(y)$. Aus (a) folgt $y \neq F^n(y)$, d.h. $F^n(y) < y$. Dann ist nach Lemma 1.30 $F^{kn}(y) < y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 1.29 folgt aus der Vorausetzung $x < F^m(x)$, dass $F^{mk}(x) > x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt $F^{mn}(y) < y < x < F^{mn}(x)$, d.h. $F^{mn}([y, x]) \supset [y, x]$. Nach Lemma 1.28 besitzt die Abbildung F^{mn} einen Fixpunkt in $[y, x] \subset J$. Widerspruch! □

Beweis von Satz 1.27. Angenommen, es gäbe ein offenes Intervall $J := (a, b) \subset I$, das keinen periodischen Punkt enthält. Sei $\{F^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ dicht in $I \Rightarrow \exists\, m, p, q, \in \mathbb{N}$ mit $p < q$ s.d. $x < F^m(x) < b$ und $a < F^q(x) < F^p(x) < x$. Setze $y := F^p(x)$. Es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} F^{q-p}(y) & < & y & < & x & < & F^m(x) \\ || & & || & & \in J & & \in J \\ F^q(x) & & F^p(x) & & & & \\ \in J & & \in J & & & & \end{array}$$

Also gilt:

$$F^m(x) \in J, F^{q-p}(y) \in J, y < x < F^m(x) \overset{\text{Lemma 1.31}}{\Longrightarrow} y < F^{q-p}(y).$$

Widerspruch! □

1.7. Topologische Konjugation

DEFINITION 1.32. *Zwei dynamische Systeme* (X, F) *und* (Y, G), X, Y *metrische Räume,* F, G *stetig, heißen* topologisch konjugiert, *wenn es einen Homöomorphismus* $h : X \to Y$ *gibt mit* $h \circ F = G \circ h$.

PROPOSITION (Ulam-von Neumann (1947)). *Die logistische Intervallabbildung*

$$F_4(x) = 4x(1-x)$$

und die Zeltabbildung

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

sind topologisch konjugiert.

BEWEIS. Wir suchen einen Homöomorphismus $h : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$h\big(F_4(x)\big) = T_2\big(h(x)\big) \; \forall\, x \in [0,1].$$

h ist Homöomorphismus $\Rightarrow$ h ist streng monoton $\Rightarrow$ $h(0) = 0$ oder $h(0) = 1$. Setze $x = 0 \Rightarrow h(0) = T_2\big(h(0)\big) \Rightarrow h(0)$ ist ein Fixpunkt $\Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow h(1) = 1$.
Beobachtung: $F_4(x) = F_4(1-x)$ (Symmetrie bzgl. $x = 1/2$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (h \circ F_4)(x) = (h \circ F_4)(1-x) \\ &\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} (T_2 \circ h)(x) = (T_2 \circ h)(1-x) \\ T_2(x) = T_2(1-x) \end{array}\right\} \\ &\Rightarrow \quad \text{entweder } \underbrace{h(x) = h(1-x)}_{\substack{\text{unmöglich wegen} \\ h(0)=0\neq 1=h(1)}} \text{ oder } h(1-x) = 1 - h(x). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $h(1/2) = 1 - h(1/2) \Rightarrow h(1/2) = 1/2$. Somit genügt es, das Intervall $[0, 1/2]$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} h\big(4x(1-x)\big) &= 2h(x),\ x \in [0,1/2] \\ \arcsin\big(2\sqrt{x(1-x)}\big) &= 2 \arcsin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Also ist $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$, $x \in [0, 1/2]$. Für $x \in [1/2, 1]$ gilt

$$h(x) = 1 - h(1-x) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1-x}.$$

BEHAUPTUNG: $1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1-x} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ für alle $x \in [0,1]$.

BEWEIS. $x = \sin^2 \Theta$ mit $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \in [0,1]$.

$$(*) \qquad \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} = \frac{2\Theta}{\pi}$$

Aus

$$\begin{aligned} \arcsin \sqrt{1-x} &= \arcsin(\cos \Theta) \\ &= \arcsin\Big(-\sin\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)\Big) = \frac{\pi}{2} - \Theta \end{aligned}$$

folgt

$$1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1-x} = 1 - 1 + \frac{2\theta}{\pi} \overset{(*)}{=} \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

$\boxed{\text{B}}$

Also ist $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \Rightarrow h^{-1}(y) = \sin^2 \frac{\pi y}{2}$. □

DEFINITION 1.33. *Ein dynamisches System (X, F) heißt* topologisch semikonjugiert *zum dynamischen System (Y, G), wenn es eine stetige surjektive Abbildung $h : X \to Y$ gibt mit $h \circ F = G \circ h$. Das dynamische System (Y, G) heißt* (topologischer) Faktor *von (X, F).*

LEMMA 1.34. *Sei (Y, G) ein Faktor von (X, F). Dann gilt: $x \in \mathrm{Per}_p(F) \Rightarrow h(x) \in \mathrm{Per}_p(G)$.*

BEWEIS. Sei $x \in \mathrm{Per}_p(F) \Rightarrow F^p(x) = x \Rightarrow h\big(F^p(x)\big) = h(x)$.

$$\begin{aligned} h \circ F = G \circ h \quad &\Longrightarrow \quad h \circ F^2 = G \circ h \circ F = G^2 \circ h \\ &\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \quad h \circ F^p = G^p \circ h \\ &\Longrightarrow \quad h(x) \in \mathrm{Per}_p(G). \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG. *Sei $y \in \mathrm{Per}_p(G)$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $h(x) = y$ und $G^p\big(h(x)\big) = h(x)$. Folglich gilt*

$$h\big(F^p(x)\big) = h(x) \underset{\substack{h \text{ ist nicht} \\ \text{injektiv}}}{\not\Longrightarrow} F^p(x) = x.$$

LEMMA 1.35. *Sei (Y, G) ein Faktor von (X, F). Die periodischen Punkte von (X, F) seien dicht. Dann sind die periodischen Punkte von (Y, G) ebenfalls dicht.*

BEWEIS. Sei $y \in Y$ beliebig und $U \ni y$ eine offene Menge. Es gibt ein $x \in X$ mit $h(x) = y$. Sei $V := h^{-1}(U)$, V ist offen. Es gibt ein $z \in \mathrm{Per}(F)$ mit $z \in V$. Nach Lemma 1.34 $h(z) \in \mathrm{Per}(G)$ und $h(z) \in U$. □

LEMMA 1.36. *Sei (Y, G) ein Faktor von (X, F).(X, F) besitze einen dichten Orbit. Dann hat (Y, G) ebenfalls einen dichten Orbit.*

BEWEIS. Sei $\{F^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dicht in X. Sei $\bar{y} \in Y$ beliebig und $U \ni \bar{y}$ offen. Setze $V = h^{-1}(U)$, V offen. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F^n(x) \in V$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & G^n\big(h(x)\big) = h\big(F^n(x)\big) \in h(V) = U \\ \Rightarrow \quad & \big\{G^n\big(h(x)\big)\big\}_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ dicht in } Y. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 1.37. *Sei (Y, G) ein Faktor von (X, F). Ist (X, F) chaotisch, so ist (Y, G) ebenfalls chaotisch.*

1.8. Beispiele chaotischer dynamischer Systeme

1.8.1. Winkelverdopplung. Sei $X = \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)$, $T(\Theta) = 2\Theta \pmod{2\pi}$.

BEHAUPTUNG: $(\mathbb{S}^1, T)$ ist ein Faktor von (Σ_A, σ) mit $A = \{0, 1\}$.

BEWEIS. $\frac{\Theta}{2\pi} \in [0, 1) \Rightarrow \Theta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} z_k 2^{-k}$ mit $z_k \in \{0, 1\}$ (Dualziffern von Zahlen aus $[0, 1)$).

(1) Die Abbildung $h : \underline{z} = (z_1 z_2 \dots) \mapsto \Theta$ ist surjektiv (klar!), aber nicht injektiv:

$$\begin{aligned} (1, 0, \dots) &\mapsto \pi \\ (0, 1, 1, \dots) &\mapsto 2\pi \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = \pi. \end{aligned}$$

(2) h ist stetig.

$$\begin{aligned} h(\underline{z}) - h(\underline{z}') &= 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_k') 2^{-k} \\ \Rightarrow \left| h(\underline{z}) - h(\underline{z}') \right| &\leq 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_k'| 2^{-k} = 2\pi \, d_\Sigma(\underline{z}, \underline{z}'). \end{aligned}$$

(3) $T \circ h = h \circ \sigma$.

$$\begin{aligned} (T \circ h)(\underline{z}) &= T\big(h(\underline{z})\big) = T\Big(2\pi \sum_{k=1}^{\infty} z_k 2^{-k}\Big) \\ &= 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} z_k 2^{-k} = \underbrace{2\pi z_1}_{=0 \bmod 2\pi} + 2\pi \sum_{k=2}^{\infty} z_k 2^{-k+1} \\ &\overset{\ell = k-1}{=} 2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} z_{\ell+1} 2^{-\ell} = h\big(\sigma(\underline{z})\big) = (h \circ \sigma)(\underline{z}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

KOROLLAR 1.38. *$(\mathbb{S}^1, T)$ ist chaotisch.*

1.8.2. Logistische Abbildung mit $\mu = 4$. $F_4(x) = 4x(1-x)$ auf $[0, 1]$. Betrachte

$$h : \mathbb{S}^1 \to [0, 1], \quad h(\Theta) := \frac{1}{2}(1 - \cos\Theta) = \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Wir können direkt folgende Eigenschaften von h notieren: h ist stetig, surjektiv, aber nicht injektiv.

BEHAUPTUNG: $\big([0, 1], F_4\big)$ ist ein Faktor von $(\mathbb{S}^1, T)$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} (F_4 \circ h)(\Theta) &= F_4\big(h(\Theta)\big) = 4h(\Theta)\big(1 - h(\Theta)\big) \\ &= 4\frac{1}{2}\Big(1 - \cos\Theta\Big)\Big[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\Theta)\Big] \\ &= (1 - \cos\Theta)(1 + \cos\Theta) = 1 - \cos^2\Theta = \sin^2\Theta \\ &= h(2\Theta) = (h \circ T)(\Theta). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

KOROLLAR 1.39. *Die logistische Abbildung* $([0,1], F_4)$ *und die Zelt-Abbildung* $([0,1], T_2)$ *sind chaotisch.*

BEMERKUNGEN. (1) *Im Allgemeinen bleibt die empfindliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt unter topologischer Konjugation nicht erhalten. Beispiel: Seien* $I = (0,1), J = (1,\infty)$. *Die Abbildung* $f : x \mapsto x^2$ *lässt die beiden Intervalle invariant. Das dynamische System* (J, f) *hat empfindliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt (siehe oben). Das dynamische System* (I, f) *hat* keine *empfindliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt, denn*

$$|f^k(x) - f^k(y)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, x, y \in I.$$

Die dynamische Systeme (I, f) *und* (J, f) *sind topologisch konjugiert mit* $h(x) = \frac{1}{x}$:

$$f\big(h(x)\big) = \frac{1}{x^2} = h\big(f(x)\big) \quad \textit{für alle} \quad x \in I.$$

(2) *Für die logistische Abbildung* F_4 *gilt die Formel*

$$F_4^n(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\big(2^n \arccos(1-2x)\big)\Big).$$

Trotzdem ist das dynamische System chaotisch.

1.9. Die Gauß-Abbildung

Sein $X = [0,1]$ und

$$G(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\{a\}$ den gebrochenen Teil von $a > 0$, d.h.

$$\{a\} := \{b \in [0,1) \mid b - a \in \mathbb{N}_0\}.$$

Eigenschaften von G:

(1) Der Wertebereich von G ist $[0,1)$. Sei $\alpha \in (0,1)$ beliebig. Setze

$$x = \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 + \alpha \Rightarrow \left\{\frac{1}{x}\right\} = \alpha.$$

(2) G ist nicht injektiv. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$G : \Big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\Big) \longrightarrow (0,1).$$

Tatsächlich, für beliebiges $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ gilt

$$\frac{1}{x} \in (n, n+1) \Rightarrow \left\{\frac{1}{x}\right\} \in (0,1).$$

(3) G ist nicht stetig in Punkten $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte

$$\xi_k := \frac{1}{n+1} + \varepsilon_k, \quad \eta_k := \frac{1}{n+1} - \varepsilon_k \;\; \text{mit} \;\; \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

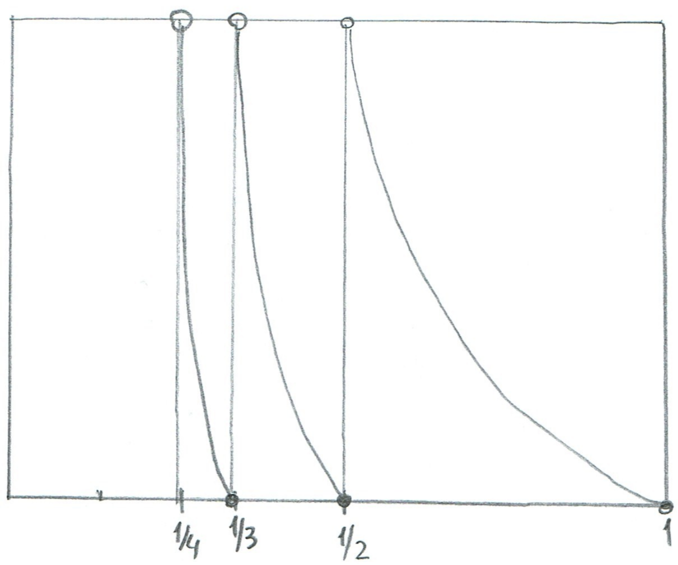
BEHAUPTUNG: $\left\{\frac{1}{\xi_k}\right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $\left\{\frac{1}{\eta_k}\right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
\xi_k := \frac{\varepsilon_k(n+1)+1}{n+1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\xi_k} = \frac{n+1}{\varepsilon_k(n+1)+1} \\
&\Rightarrow \quad n < \frac{1}{\xi_k} < n+1 \text{ für hinreichend große } k \\
&\Rightarrow \quad \left\{\frac{1}{\xi_k}\right\} = \frac{1}{\xi_k} - n = \frac{n+1}{\varepsilon_k(n+1)+1} - n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \\
\eta_k = \frac{1-\varepsilon_k(n+1)}{n+1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\eta_k} = \frac{n+1}{1-\varepsilon_k(n+1)} \\
&\Rightarrow \quad n+1 < \frac{1}{\eta_k} < n+2 \text{ für hinreichend große } k \\
&\Rightarrow \quad \left\{\frac{1}{\eta_k}\right\} = \frac{1}{\eta_k} - (n+1) \\
&\qquad = \frac{n+1}{1-\varepsilon_k(n+1)} - (n+1) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

(4) G ist stetig für alle $x \in (0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n+1}\}$ und stückweise monoton fallend.



BEWEIS. Sei $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \Rightarrow n < \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow G(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - n$.

$\boxed{\text{B}}$

1.9.1. Kettenbrüche (reguläre Form). Ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch ist die Darstellung einer reellen positiven Zahl x als

$$x = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{s_3 + \cfrac{1}{s_4 + \dots}}}}$$

wobei $s_0, s_1, s_2 \dots \in \mathbb{N}$.

Bezeichnung: $x = [s_0; s_1, s_2, s_3, \dots]$. Man schreibt

$$[s_0; s_1, \dots, s_k, 0, 0, \dots] = [s_0; s_1, \dots, s_k, \overline{0}],$$

falls der Kettenbruch endlich ist.

(1) Jeder unendliche (reguläre Kettenbruch konvergiert (ohne Beweis, obwohl der Beweis leicht ist).
(2) Jede reelle positive Zahl lässt sich eindeutig als regulären Kettenbruch darstellen:

$$s_0 := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\} \Rightarrow s_1 := \left\lfloor \frac{1}{x - s_0} \right\rfloor \text{ usw.}$$

(3) Die Zahl x ist genau dann, rational, wenn der Kettenbruch endlich ist.

Beweis. $(\Leftarrow)$ klar
$(\Rightarrow)$ Sei x rational

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x &= s_0 + \frac{p}{q} \quad p < q \\
&= s_0 + \frac{1}{\frac{q}{p}} = s_0 + \frac{1}{s_1 + \frac{r_1}{p}} \quad r_1 < p \\
&= s_0 + \frac{1}{s_1 + \frac{1}{\frac{p}{r_1}}} \\
&= s_0 + \frac{1}{s_1 + \frac{1}{s_2 + \frac{r_2}{r_1}}} \quad r_2 < r_1 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

r_k bilden eine streng monoton fallende Folge natürlicher Zahlen, $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$. Somit ist die Folge r_k endlich und der resultierende Kettenbruch ebenfalls endlich. □

Beispiele. (1) $[1; \overline{1}] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \Phi$ *(goldener Schnitt), denn* $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
(2) $[1; \overline{2}] = \sqrt{2}$, *denn*

$$\begin{aligned}
x + 1 = [2; \overline{2}] = 2 + \frac{1}{x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 2(x+1) + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 2
\end{aligned}$$

(3) $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$.

(4) $\pi = [3; 17, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14\dots]$ *Kein Muster zu erkennen!*
(5) $[1; \overline{1, 2}] = \sqrt{3}$, *denn*

$$\begin{aligned} x - 1 = [0; \overline{1, 2}] &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2+(x-1)}} \\ \Leftrightarrow &(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 3 \\ \Leftrightarrow &x^2 = 3. \end{aligned}$$

(6) *Satz von Euler-Lagrange: Ein Kettenbruch ist genau dann periodisch, wenn er eine quadratische Irrationalzahl darstellt, d.h. eine irrationale Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.*

1.9.2. Symbolische Dynamik mit $A = \mathbb{N}$. Beobachtung:

$$\begin{aligned} G\big([0; s_1 s_2 s_3 \dots]\big) &= G\left(\cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{s_3 + \dots}}}\right) \\ &= \left\{ s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{s_3 + \dots}} \right\} \\ &= [0; s_2 s_3 \dots] \end{aligned}$$

Folgerungen:

(1) Sei $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow G^n(x) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(2) Fixpunkte von G sind $[0; nnn\dots]$, $n \in \mathbb{N}$.
Insbesondere ist $[0; 111\dots] = \Phi - 1$.
(3) Periodische Punkte von G sind quadratische Irrationalzahlen.

Betrachte: $X' := \{x \in [0,1] \mid x \notin \mathbb{Q}\}$.

- X' ist invariante Menge für G.
- G ist stetig auf X'.

$A = \mathbb{N}$ abzählbar unendliches Alphabet. Phasenraum: $\Sigma_A := A^{\mathbb{N}} = \{s = (s_1 s_2 \dots) \mid s_i \in A\}$. Metrik:

$$d(s,t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_{\text{disk}}(s_i, t_i)}{2^{i-1}}.$$

$(\Sigma_{\mathbb{N}}, d)$ ist ein metrischer Raum. Im Unterschied zum Bernoulli-Shift ist $(\Sigma_{\mathbb{N}}, d)$ nicht kompakt. Die Shift-Abbildung: $\sigma : (s_1 s_2 \dots) \mapsto (s_2 \dots)$.

Behauptung 1: Periodische Punkte von σ liegen dicht in $\Sigma_{\mathbb{N}}$.

Der Beweis ist klar: $s = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$ sei gegeben. Dann ist

$$(s_1 s_2 \dots s_n s_1 s_2 \dots s_n s_1 s_2 \dots)$$

periodisch. Durch eine geeignete Wahl von n kann immer erreicht werden, dass der periodische Punkt in einer beliebigen Umgebung von s liegt.

Behauptung 2: (Σ, σ) besitzt eine dichte Bahn.

Beweis. Sei $S_1 = \mathbb{N}, S_2 = \mathbb{N}^2, \dots, S_k = \mathbb{N}^k, \dots$. Betrachte

$$S := \bigsqcup_{k=1}^{\infty} S_k \text{ (disjunkte Vereinigung).}$$

Da S abzählbar ist, exestiert eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to S$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(k) \in \mathbb{N}^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Betrachte die Folge $s = (\varphi(1), \varphi(2), \dots)$. Sei $t \in \Sigma_{\mathbb{N}}$ beliebig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $2^{-(n-1)} < \varepsilon$. Betrachte die ersten n Elemente der Folge t: $(t_1 \dots t_n) = \varphi(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei

$$N := \sum_{j=1}^{k-1} |\varphi(k)|, \quad |\cdot| = \text{Länge des Blocks.}$$

Die ersten n Elemente der Folgen $\sigma^N(s)$ und t stimmen überein

$$\Rightarrow \quad d\big(t, \sigma^N(s)\big) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j+1} = 2^{-(n-1)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad s \text{ ist eine dichte Bahn.}$$

□

Korollar 1.40. $(\Sigma_{\mathbb{N}}, \sigma)$ *ist chaotisch.*

Satz 1.41. *Die dynamische Systeme* (X', G) *und* (Σ, σ) *sind topologisch konjugiert mit Konjugation*

$$h : X' \to \Sigma, \quad h\big([0; n_1 n_2 \dots]\big) = (n_1 n_2 \dots)$$

Beweis. **(1)** h ist offenbar bijektiv.

(2) h ist stetig.

Sei $x = [0; s_1 s_2 s_3 \dots] \in X'$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. für alle $y \in X'$ mit $|x - y| < \delta$ die Ungleichung $d(h(x), h(y)) < \varepsilon$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $y \in X$ mit

$$t_i = s_i \;\forall \quad i \in \{1 \dots m+1\},\; t = h(y)$$

die Ungleichung $d\big(h(x), h(y)\big) < \varepsilon$ gilt. Beobachtung:

$$\frac{1}{s_{m+1} + 1} < G^m(x) < \frac{1}{s_{m+1}}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Der Punkt x ist ein gemeinsamer Punkt von Intervallen

$$\Big(\frac{1}{s_1 + 1}, \frac{1}{s_1}\Big), G^{-1}\Big(\frac{1}{s_2 + 1}, \frac{1}{s_2}\Big), \dots, G^{-m}\Big(\frac{1}{s_{m+1} + 1}, \frac{1}{s_{m+1}}\Big).$$

Folglich ist

$$\Big(\frac{1}{s_1 + 1}, \frac{1}{s_1}\Big) \cap G^{-1}\Big(\frac{1}{s_2 + 1}, \frac{1}{s_2}\Big) \cap \dots \cap G^{-m}\Big(\frac{1}{s_{m+1} + 1}, \frac{1}{s_{m+1}}\Big)$$

nicht leer und offen (G ist stetig!). Somit existiert ein $\delta > 0$ mit

$$(x - \delta, x + \delta) \subset \Big(\frac{1}{s_1 + 1}, \frac{1}{s_1}\Big) \cap \dots \cap G^{-m}\Big(\frac{1}{s_{m+1} + 1}, \frac{1}{s_{m+1}}\Big).$$

$\Rightarrow$ Für jedes $y \in X'$ mit $|y - x| < \delta$ gilt $t_i = s_i \forall\, i \in \{1 \dots m+1\}, t = h(y)$
$\Rightarrow d\big(h(x), h(y)\big) < \varepsilon$.

(3) h^{-1} ist stetig.

Behauptung: Sei $x = [s_0; s_1 s_2 \dots]$ ein unendlicher Kettenbruch. Sei $\frac{p_n}{q_n} = [s_0; s_1 s_2 \dots s_n, \overline{0}]$. Dann gilt:

(a) $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}}$,
(b) $p_n \ge 2^{\frac{n-2}{2}}$, $q_n \ge 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Den Beweis findet man in Lehrbüchern über Zahlentheorie.

Folgerung:

$$q_n q_{n+1} \ge 2^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}} \le \sqrt{2} \cdot 2^{-n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \varepsilon$. Wähle ein $\delta > 0$ so klein, dass $d(s,t) < \delta$ für alle $s, t \in \Sigma$ mit $s_i = t_i\ \forall i \in \{1 \dots n\}$. Betrachte:

$$\begin{aligned}
\left|h^{-1}(s) - h^{-1}(t)\right| &= \left|[0; s_1 s_2 \dots s_n, s_{n+1} \dots] - [0; t_1 t_2 \dots t_n t_{n=1} \dots]\right| \\
&\le \left|[0; s_1 s_2 \dots s_n, s_{n+1} \dots] - [0; s_1 s_2 \dots s_n, \overline{0}]\right| \\
&\quad + \left|[0; t_1 t_2 \dots t_n, t_{n+1} \dots] - [0; s_1 s_2 \dots s_n, \overline{0}]\right| \\
&\le 2\sqrt{2}\, 2^{n-1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(4) $h \circ G = \sigma \circ h$ ist klar. □

1.10. Die logistische Abbildung F_μ für $\mu > 4$

Für $\mu > 4$ gilt $F_\mu(1/2) = \mu/4 > 1$ und somit $F_\mu^2(1/2) < 0$. Da F_μ auf $(-\infty, 0)$ streng monoton steigend ist, gilt $F_\mu^n(1/2) < 0$ für alle $n \ge 2$. Man kann auch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(1/2) = -\infty.$$

Es gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} F_\mu^n(x_0) = -\infty$, falls $F_\mu^n(x_0) \notin [0,1]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Die Langzeitdynamik der Punkte, die das Intervall $[0,1]$ verlassen, ist uninteressant. Wir wollen die Dynamik der Punkte studieren, die für alle Zeiten $n \in \mathbb{N}_0$ in $[0,1]$ bleiben.

Definiere:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &:= [0,1] \\
\Lambda_n &:= \{x \in [0,1] \mid F_\mu^k(x) \in [0,1] \quad \forall\, 0 \le k \le n\}.
\end{aligned}$$

Die Folge $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist schrumpfend: $\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$.

DEFINITION 1.42. *Der Definitionsbereich der Abbildung F_μ für $\mu >$ ist*

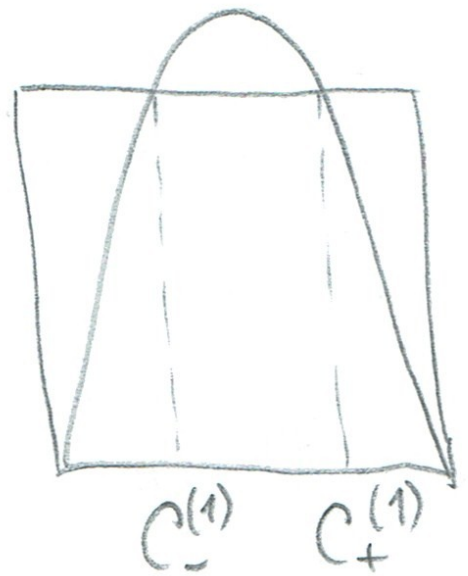
$$\Lambda_\mu := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n = \{x \in [0,1] \mid F_\mu^k(x) \in [0,1] \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Setze

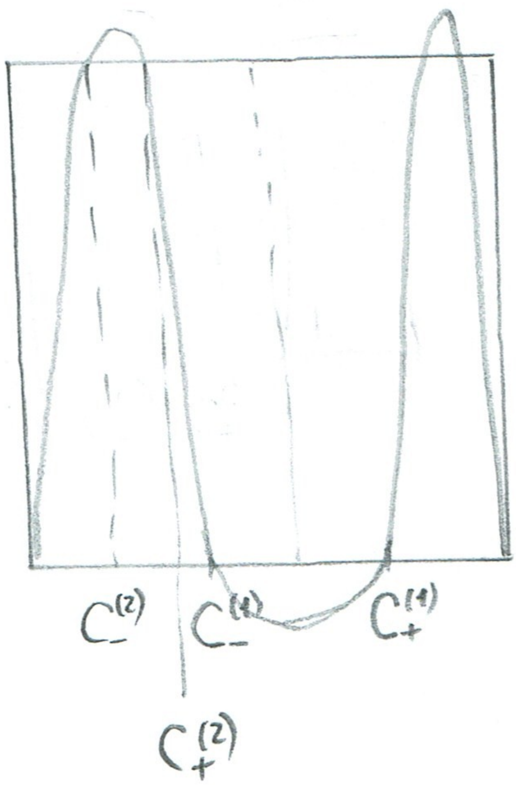
$$A_{n+1} := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n+1} \Rightarrow \Lambda_\mu = [0,1] \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big).$$

Insbesondere ist $A_1 = \big(C_-^{(1)}, C_+^{(1)}\big)$ mit

$$0 < C_-^{(1)} < C_+^{(1)} < 1,\ F_\mu\big(C_\pm^{(1)}\big) = 1 \Leftrightarrow C_\pm^{(1)} = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big).$$



$A_2 = \{x \in [0,1] \mid F_\mu(x) \le 1,\ F_\mu^2(x) > 1\}.$



$$A_2 = \left(C_-^{(2)}, C_+^{(2)}\right) \cup \left(1 - C_+^{(2)}, 1 - C_-^{(2)}\right).$$

DEFINITION 1.43. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt* Cantormenge, *wenn M abgeschlossen, perfekt und vollständig unzusammenhängend ist. M heißt* perfekt, *wenn M keine isolierten Punkte besitzt. M heißt* vollständig unzusammenhängend, *wenn M kein nichttriviales Intervall $[a, b]$, $a < b$ enthält.*

SATZ 1.44. *Für $\mu > 4$ ist Λ_μ eine Cantormenge.*

BEWEIS FÜR $\mu > 2 + \sqrt{5} = 4.236\ldots$. (Für $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ ist der Beweis aufwendiger!)

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = I_0 \cup I_1, \quad I_0 &= \left[0, \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big)\right] \\ I_1 &= \left[\frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big), 1\right] \end{aligned}$$

In I_0 gilt

$$\begin{aligned} F_\mu'(x) &= \mu(1 - 2x) \geq \mu\Big(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big)\Big) \\ &= \mu\sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}} = \sqrt{\mu^2 - 4\mu}. \end{aligned}$$

Falls $\mu > 2+\sqrt{5}$, dann ist

$$\mu^2 - 4\mu = \mu(\mu-4) > (2+\sqrt{5})(-2+\sqrt{5}) = 5-4 = 1.$$

Bezeichne $c := \sqrt{\mu^2-4\mu} > 1$. Aus der Symmetrie $x \mapsto 1-x$ folgt:

$$|F'_\mu(x)| \geq c > 1 \quad \forall x \in I_0 \cup I_1 = \Lambda_1 \supset \Lambda.$$

(1) Λ_μ ist vollständig unzusammenhängend.
Angenommen, es gibt $0 \leq a < b \leq 1$ mit $[a,b] \subset \Lambda$, dann muss für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$\text{entweder } F^n_\mu([a,b]) \subset I_0 \text{ oder } F^n_\mu([a,b]) \subset I_1$$

Daher gilt die Ungleichung

$$|F_\mu(a) - F_\mu(b)| = \Big| \int_a^b F'_\mu(x)\,dx \Big| \geq c|b-a|.$$

Wegen

$$\frac{d}{dx} F_\mu\big(F_\mu(x)\big) = F'_\mu\big(F_\mu(x)\big) F'_\mu(x) \geq c^2.$$

erhält man

$$|F^2_\mu(a) - F^2_\mu(b)| = \Big| \int_a^b (F^2_\mu)'(x)\,dx \Big| \geq c^2|b-a|.$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|F^n_\mu(a) - F^n_\mu(b)| \geq c^n|b-a|.$$

Für $n \to \infty$ ist die linke Seite beschränkt, die rechte ist aber unbeschränkt. Widerspruch!

(2) Λ_μ ist abgeschlossen.
Jede Menge Λ_n besteht aus 2^n abgeschlossenen Intervallen $I^j_n = \big[a^{(j)}_n, b^{(j)}_n\big]$. Daher ist

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n$$

abgeschlossen.

(3) Λ_μ ist perfekt.
Angenommen, es gibt einen isolierten Punkt $x_0 \in \Lambda_\mu \cap (0,1)$, d.h. es gibt $x_- < x_0 < x_+$ mit $[x_-, x_+] \cap \Lambda = \{x_0\}$. Dann existieren $k_\pm \in \mathbb{N}$ mit $(x_0, x_+] \subset A_{k_+}, [x_-, x_0) \subset A_{k_-}$.

Wähle $k := \max\{k_+ + 1, k_- + 1\}$. Da $F^\ell_\mu(x) < 0$ für alle $\ell \geq 1$ und alle $x > 1$ gilt

$$F^k_\mu(x) \in \begin{cases} [0,1] & \text{für } x = x_0 \\ (-\infty, 0) & \text{für } x \in [x_-, x_+] \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x_0 \text{ ist ein relatives Maximum von } F^k_\mu \\ &\Rightarrow \quad (F^k_\mu)'(x_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad F'_\mu\big(F^{k-1}_\mu(x_0)\big) \cdot F'_\mu\big(F^{k-2}_\mu(x_0)\big) \cdot \dots \cdot F'_\mu(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Wegen $|F'_\mu(x)| \geq c > 0$ für alle $x \in \Lambda$ ist es ein Widerspruch!

Nun betrachten wir die Randpunkte. Angenommen, $x_0 = 0$ wäre isoliert

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists\, x_+ > x_0 \text{ mit } [0, x_+] \cap \Lambda = \{0\} \\ &\Rightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } (0, x_+] \subset A_k \\ &\Rightarrow \quad 0 \text{ ist ein lokales Minimum von } F_\mu^k. \end{aligned}$$

Für jedes k ist F_μ^k streng monoton steigend in einer Umgebung von Null. Widerspruch! $x_0 = 1$ ist nicht isoliert wegen der Symmetrie.

□

1.10.1. Kodierung der Punkte in Λ_μ. Sei $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Betrachte die Abbildung $S : \Lambda_\mu \to \Sigma = \Sigma_{\{0,1\}}$,

$$S(x) := (s_0 s_1 s_2 \ldots) \quad \text{mit} \quad s_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } F_\mu^i(x) \in I_0, \\ 1 & \text{falls } F_\mu^i(x) \in I_1. \end{cases}$$

Hier sind

$$I_0 = \Big[0, \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big)\Big] \quad \text{und} \quad I_1 = \Big[\frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\Big), 1\Big].$$

Die Folge $S(x)$ heißt die „Route“ (engl. itinerary) von x.

SATZ 1.45. *Die Abbildung $S : \Lambda_\mu \to \Sigma$ ist ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. **(1)** S ist injektiv.
Angenommen, es gäbe $x < y$ mit $S(x) = S(y)$. Dann für alle $j \in \mathbb{N}$ liegen die beiden Punkte $F^j(x)$ und $F^j(y)$ entweder in I_0 oder in I_1. Da $F_\mu\big|_{I_0}$ monot steigend und $F_\mu\big|_{I_1}$ monoton fallend ist, gilt

$$\begin{aligned} F(\alpha) \le F(z) \le F(\beta) \quad & \forall\, z \in [\alpha, \beta] \subset I_0, \\ F(\beta) \le F(z) \le F(\alpha) \quad & \forall\, z \in [\alpha, \beta] \subset I_1. \end{aligned}$$

Folglich liegt das Intervall $[F^j(x), F^j(y)]$ in I_0 oder das Intervall $[F^j(y), F^j(x)]$ in I_1 für jedes $j \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $[x, y] \subset \Lambda$, aber Λ ist vollständig unzusammenhängend. Widerspruch!

(2) S ist surjektiv.
Sei $s = (s_0 s_1 \ldots) \in \Sigma$ beliebig, suche ein $x \in \Lambda$ mit $S(x) = s$. Die Intervalle I_0 und I_1 seien wie oben. Betrachte

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} &:= \{x \in I_{s_0} \mid F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap \{x \in [0,1] \mid F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n}) \end{aligned}$$

mit

$$I_{s_1 \ldots s_n} = \{x \in I_{s_1} \mid F_\mu(x) \in I_{s_2}, \ldots, F_\mu^{n-1}(x) \in I_{s_n}\}.$$

BEHAUPTUNG. *$I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ ist ein nicht leeres abgeschlossenes Intervall.*

Beweis Mit vollständiger Induktion: $I_{s_0} = I_0$ oder I_1 ist nicht leer und abgeschlossen. Sei $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ für alle $(s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n$ ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall. Dann ist auch $I_{s_1 \ldots s_n s_{n+1}}$ ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall. Das Urbild $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n s_{n+1}})$ besteht aus zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilintervallen, einem in I_0 und einem in I_1. Folglich ist $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \ldots s_n s_{n+1}})$ ein nicht leeres abgeschlossenes Intervall. $\boxed{\text{B}}$

Offenbar gilt $I_{s_0 \ldots s_n s_{n+1}} \subset I_{s_0 \ldots s_n}$. Also ist $I_{s_0 \ldots s_n}$ eine geschachtelte Folge nichttrivialer abgeschlossener Intervalle. Somit ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \neq \emptyset$. Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ beliebig. Dann ist $S(x) = s$.

(3) S ist stetig.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > -\log_2(\varepsilon)$. Betrachte

$$\begin{aligned} & |F_\mu'(x)| = \mu \cdot |1 - 2x| \leq \mu \quad \forall x \in [0,1] \\ \Rightarrow \quad & |(F_\mu^j)'(x)| \leq \mu^j \quad \forall x \in [0,1] \\ \Rightarrow \quad & |F_\mu^j(x) - F_\mu^j(y)| \leq \mu^{N(\varepsilon)} |x - y| \quad \forall x \in [0,1] \quad j = 0, \ldots, N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Wähle $\delta(\varepsilon) := \frac{\operatorname{dist}(I_0, I_1)}{\mu^{N(\varepsilon)}}$. Sei $|x - y| < \delta(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & |F_\mu^j(x) - F_\mu^j(y)| < \operatorname{dist}(I_0, I_1) \quad \forall\, 0 \leq j \leq N(\varepsilon) \\ \Rightarrow \quad & \big(S(x)\big)_j = \big(S(y)\big)_j \quad \forall\, 0 \leq j \leq N(\varepsilon) \\ \Rightarrow \quad & d\big(S(x), S(y)\big) \leq \sum_{j=N(\varepsilon)+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-N(\varepsilon)-1} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}}_{=2} = 2^{-N(\varepsilon)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(4) S^{-1} ist stetig.
Für $x, x' \in \Lambda_\mu$ mit $d\big(S(x), S(x')\big) \leq 2^{-m}$ gilt $\big(S(x)\big)_j = \big(S(x')\big)_j$, $0 \leq j \leq m$. Für beliebiges $0 \leq j \leq m$ gilt

$$\text{entweder } \{F^j(x), F^j(x')\} \subset I_0 \text{ oder } \{F^j(x), F^j(x')\} \subset I_1.$$

In $I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu-4}{\mu}}\right)\right]$ gilt

$$F_\mu'(x) = \mu(1 - 2x) \geq \mu\left(1 - 2\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}}\right)\right) = \mu\sqrt{\frac{\mu - 4}{\mu}} = \sqrt{\mu^2 - 4\mu}.$$

Falls $\mu > 2 + \sqrt{5}$, dann ist $\mu^2 - 4\mu > 1$. Wegen der Symmetrie ist $|F_\mu'(x)| \geq \sqrt{\mu^2 - 4\mu}$ in I_1. Also ist $|F_\mu'(x)| \geq c > 1$ für alle $x \in I_0 \cup I_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underbrace{|F^m(x) - F^m(x')|}_{<\frac{1}{2}} \geq c^m |x - x'| \\ \Rightarrow \quad & |x - x'| \leq \frac{1}{2c^m}. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$c^{m(\varepsilon)} > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Sei $\delta = \delta(\varepsilon) = 2^{-m(\varepsilon)}$. Dann ist $|x - x'| < \varepsilon$, falls $d\big(S(x), S(x')\big) \leq \delta$.

□

KOROLLAR 1.46. *Die logistische Abbildung F_μ mit $\mu > 2 + \sqrt{5}$ (gilt auch für $\mu > 4$) und der Bernoulli-Shift (Σ, σ) sind topologisch konjugiert. Insbesondere ist (Λ_μ, F_μ) chaotisch.*

BEWEIS. Wegen Satz 1.45 genügt es zu zeigen, dass

$$S\big(F_\mu(x)\big) = (s_1 s_2 \dots) = \sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = \sigma\big(S(x)\big).$$

□

1.11. Die Zelt-Abbildung T_3

$$T_3(x) := \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Uns interessieren Punkte in $[0,1]$, die unter Iterationen mit der Abbildung T_3 das Intervall $[0,1]$ nicht verlassen.

Definiere:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= [0,1] \\
\Lambda_1 &= \{x \in [0,1] \mid T_3(x) \in [0,1]\} = [0,1/3] \cup [2/3,1] \\
\Lambda_2 &= \{x \in [0,1] \mid T_3^2(x) \in [0,1]\} \\
&= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1] \\
&\dots \\
\Lambda &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n.
\end{aligned}$$

DEFINITION 1.47. *Λ heißt die klassische Cantormenge.*

SATZ 1.48. *Die klassische Cantormenge ist*

(a) *abgeschlossen, perfekt und vollständig unzusammenhängend;*
(b) *eine Lebesgue-Nullmenge;*
(c) *überabzählbar.*

BEMERKUNG. *Jede abgeschlossene perfekte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (siehe z.B. Rudin, Analysis).*

BEWEIS. Jede Zahl $x \in [0,1]$ kann im tertiären System geschrieben werden

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots \quad a_n \in \{0,1,2\}$$

Die Abbildung $x \mapsto (a_1, a_2 \dots)$ ist nicht injektiv, denn

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots$$

BEHAUPTUNG 1. $x \in \Lambda$ genau dann, wenn

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots \text{ mit } a_k \in \{0,2\}\,\forall\, k \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} x \in \Lambda_1 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 = 0 \text{ oder } a_1 = 2 \\ x \in \Lambda_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a_2 = 0 \text{ oder } a_2 = 2 \;\text{ usw.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B1}}$

(a) Λ ist abgeschlossen. Klar!

BEHAUPTUNG 2. Λ ist perfekt.

BEWEIS. Sei $x \in \Lambda$ beliebig, $(a_1 a_2 \dots)$ sei seine tertiäre Darstellung, d.h.

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots$$

Sein $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte $(b_1 b_2 \dots)$ mit $b_j = a_j$ für alle $j \neq n$. Setze $b_n = 2$, falls $a_n = 0$ oder $b_n = 0$, falls $a_n = 2$. Betrachte

$$y = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \dots$$

Offenbar $y \in \Lambda$

$$|x - y| = \frac{|a_n - b_n|}{3^n} = \frac{2}{3^n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle n so groß, dass $2 \cdot 3^{-n} < \varepsilon$ ist. Dann ist $y \in B_\varepsilon(x)$.

$\boxed{\text{B2}}$

BEHAUPTUNG 3. Λ ist vollständig unzusammenhängend.

BEWEIS. Λ_j ist die Vereinigung von 2^j disjunkten Intervallen der Länge 3^{-j}. Angenommen, Λ wäre nicht vollständig unzusammenhängend. Dann gäbe es ein Intervall $[a,b] \subset \Lambda$ mit $0 < a < b < 1 \Rightarrow [a,b] \subset \Lambda_j \,\forall\, j \in \mathbb{N}_0$. Widerspruch! $\boxed{\text{B3}}$

(c) Betrachte die Abbildung $\Lambda \to [0,1]$,

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots \quad \mapsto \quad y = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + + \frac{b_3}{3^3} + \dots$$

$$a_k \in \{0,2\} \qquad\qquad b_k = \frac{a_k}{2} = \begin{cases} 0, & a_k = 0 \\ 1, & a_k = 2 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv und somit ist Λ überabzählbar.

(b) Sei $A_{k+1} := \Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}, k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} A_1 = (1/3, 2/3) \quad &\Rightarrow \quad |A_1| = 1/3 \\ A_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \quad &\Rightarrow \quad |A_2| = 2/9 \text{ usw.} \\ &\quad\;\; |A_k| = \frac{2^{k-1}}{3^k} \end{aligned}$$

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big| = \sum_{k=1}^{\infty}|A_k| \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(\frac{2}{3}\big)^k = \frac{1}{2}\frac{2/3}{1-2/3} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad |\Lambda| = \Big|[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big| = 0$$

□

Bemerkung. *Die Cantormenge Λ ist selbstähnlich, d.h. $[0,1/3]\cap\Lambda$ und Λ sind homöomorph mit dem Homöomorphismus $x \to 3x$. Auch sind $[2/3\cap 1]\cap\Lambda$ und Λ homöomorph mit dem Homöomorphismus $x \mapsto 3x-2$.*

Aufgabe 1.49. Sei $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen mit $n_j > 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei $\Lambda_0 := [0,1]$. Die Menge Λ_1 wird durch Entfernen des offenen mittleren Intervalls der Länge $1/n_1$ von Λ_0 konstruiert. Die Menge $\Lambda_j, j \geq 1$ besteht aus 2^j abgeschlossenen Inervallen der Länge α_j. Die Menge Λ_{j+1} wird durch Entfernen aus jedem einzelnen Intervall von Λ_j des offenen mittleren Teilintervalls der Länge $\frac{\alpha_j}{n_{j+1}}$ definiert. Setze $\Lambda := \bigcap\limits_{j=\mathbb{N}_0} \Lambda_j$. Zeigen Sie:

(1) Λ ist abgeschlossen, perfekt und vollständig unzusammenhängend.
(2) $|\Lambda| = 0$ gilt genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n_k} = \infty$.

1.12. Münzwurf und chaotische Intervall-Abbildungen

Hier beweisen wir den Satz aus der ersten Vorlesung.

Satz 1.50. *Sei $T_2 : [0,1] \to [0,1]$ die Zeltabbildung. Zu jeder Münzwurffolge $w : \mathbb{N}_0 \to \{W, Z\}$ (Wappen, Zahl) gibt es ein $x \in [0,1]$ mit*

$$\begin{matrix} T_2^n(x) \in [0,1/2] & \textit{falls } w_n = W \\ T_2^n(x) \in [1/2,1] & \textit{falls } w_n = Z \end{matrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Diesen Satz haben wir in der Einleitung für die logistische Intervallabbildung F_4 formuliert. Die Abbildungen T_2 und F_4 sind aber topologische konjugiert mit $h([0,1/2]) = [0,1/2]$, $h([1/2,1]) = [1/2,1]$. Also bleibt die Aussage vom Satz auch für die logistische Abbildung richtig.

Beweis. Sei $y = T_2(x) = 2\min\{x, 1-x\}$. Seien $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j 2^{-j}$ und $y = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j 2^{-j}$ mit $a_j, b_j \in \{0,1\}$.

$$\Rightarrow \quad 1 - x = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} - \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j 2^{-j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} (1-a_j)2^{-j}$$

$$\Rightarrow \quad \min\{x, 1-x\} = \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j 2^{-j} & \text{falls } a_1 = 0 \\ \sum_{j\in\mathbb{N}} (1-a_j)2^{-j} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_{k+1} 2^{-k} & \text{falls } a_1 = 0 \\ \sum_{j\in\mathbb{N}_0} (1-a_{k+1})2^{-k} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{k+1} 2^{-k} & \text{falls } a_1 = 0 \\ \sum_{j\in\mathbb{N}} (1-a_{k+1})2^{-k} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b_j = \begin{cases} a_{j+1} & \text{falls } a_1 = 0 \\ 1 - a_{j+1} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Münzwurffolge. Setze

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } w_n = W \\ 1 & \text{falls } w_n = Z \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Setze

$$a_n = \begin{cases} c_0 & \text{für } n = 1 \\ c_{n-1} & \text{falls } \sum_{j=0}^{n-1} c_j \text{ gerade} \\ 1 - c_{n-1} & \text{falls } \sum_{j=0}^{n-1} c_j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j 2^{-j} \in \begin{cases} [0, 1/2] & \text{falls } c_0 = 0 \\ [1/2, 1] & \text{falls } c_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \begin{cases} [0, 1/2] & \text{falls } w_0 = W \\ [1/2, 1] & \text{falls } w_1 = Z \end{cases}$$

Betrachte

$$T_2(x) = y = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \begin{cases} a_{j+1} & \text{falls } c_0 = 0 \\ 1 - a_{j+1} & \text{falls } c_1 = 1 \end{cases} \quad \text{für } j = 1$$

$$\begin{cases} c_1 & \text{falls } c_0 = 0 \\ c_1 & \text{falls } c_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_2(x) \in \begin{cases} [0, 1/2] & \text{falls } c_1 = 0 \\ [1/2, 1] & \text{falls } c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_2(x) \in \begin{cases} [0, 1/2] & \text{falls } w_1 = W \\ [1/2, 1] & \text{falls } w_1 = Z \end{cases}$$

Mit der vollständigen Induktion zeigt man, dass

$$T_2^n(x) \in \begin{cases} [0, 1/2] & \text{falls } w_n = W \\ [1/2, 1] & \text{falls } w_n = Z \end{cases}$$

□

KAPITEL 2

Chaos nach Li-Yorke

2.1. Satz von Li-Yorke, Scharkowskij-Ordnung und Satz von Scharkowskij

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $F : I \to I$ stetig.

Satz 2.1 (Li - Yorke (1975)). *Besitzt das dynamische System (I, F) einen periodischen Orbit mit Primperiode 3, so gibt es periodische Punkte x_p mit Primperiode p für alle $p \in \mathbb{N}$.*

Definition 2.2. Scharkowskij-Ordnung von $\mathbb{N}$

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright$$
$$2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^m \cdot 3 \triangleright 2^m \cdot 5 \triangleright 2^m \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 1$$

Satz 2.3 (Scharkowskij (1964)). *Wenn es einen periodischen Punkt $x_p \in I$ mit Primperiode $p \in \mathbb{N}$ gibt, dann gibt es auch ein $x_q \in I$ mit Primperiode $q \in \mathbb{N}$ für alle $q \triangleleft p$.*

Wir werden den Satz von Li-Yorke beweisen. Die Beweisstrategie des Satzes von Scharkowskij ist ähnlich, aber technisch aufwendiger.

2.1.1. Verallgemeinerter Zwischenwertsatz. Notation: I, J seien abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$. Man schreibt $I \to J$ falls $F(I) \supset J$.

Satz 2.4. *Sei F stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und seien $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1} \subset I$ abgeschlossene Teilintervalle mit*

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0.$$

Dann besitzt F^n mindestens einen Fixpunkt $F^n(x_0) = x_0 \in I_0$ mit $F^k(x_0) \in I_k$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Bemerkung. *Für $n = 1$ und $I_0 = I_1$ ist der Satz bereits bewiesen, siehe Lemma 1.28. Die Voraussetzung dort lautet: $F([a,b]) \supset [a,b] \Rightarrow [a,b] \to [a,b] \to [a,b] \Rightarrow$ es gibt mindestens einen Fixpunkt $x_0 \in [a,b]$. Der Beweis von Lemma 1.28 stützt sich auf den klassischen Zwischenwertsatz aus Anylysis.*

Beweis. Behauptung. Falls $F(I) \supset J$ gilt, dann gibt es ein abgeschlossenes Intervall $I^* \subset I$ s.d. $F(I^*) = J$.

Beweis. Sei $J = [c, d]$. Es gibt $x_1 \in I$ und $x_2 \in I$ mit $F(x_1) = c, F(x_2) = d$. Sei $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$ analog). Sei $x_1^+ := \sup\{x \in I \,|\, x_1 \leq x < x_2, F(x) = c\}$. F ist stetig $\Rightarrow F(x_1^+) = c \Rightarrow x_1^+ < x_2$ [wegen $c < d = F(x_2)$]. Sei $x_2^- := \inf\{x \in I \,|\, x_1^+ < x \leq x_2, F(x) = d\}$. F ist stetig $\Rightarrow F(x_2^-) = d \Rightarrow x_1^+ < x_2^-$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt $F([x_1^+, x_2^-]) \supset J$. Wegen $F(x) \neq c, F(x) \neq d$ für alle $x \in (x_1^+, x_2^-)$ können keine Punkte außerhalb von J zur Bildmenge $F([x_1^+, x_2^-])$ gehören. Also ist $I^* := [x_1^+, x_2^-]$.

$\boxed{\text{B}}$

Es gibt Intervalle $I_k^* \subset I_k$ mit

$$\begin{aligned} & F(I_{n-1}^*) = I_0, F(I_k^*) = I_{k+1}^*,\ k = 0, \dots, n-2 \\ \Rightarrow\ & F^k(I_0^*) = I_k^*,\ k = 0, \dots, n-1 \\ & F^n(I_0^*) = I_0 \supset I_0^*. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $x_0 \in I_0^*$ mit $F^n(x_0) = x_0, F^k(x_0) \in I_k^* \subset I_k$ für $k = 0, \dots, n-1$. □

Satz 2.5 (Variante von Satz 2.4). *$F : I \to I$ sei wie oben. Für abgeschlossene Intervalle gelte $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$. Dann gibt es eine Folge geschachtelter abgeschlossener Intervalle*

$$I_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \quad \textit{mit } F^k(J_k) = I_k.$$

Insbesondere gibt es ein $x \in I_0$ mit $F^k(x) \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: analog zum Beweis von Satz 2.4.

2.1.2. Partition, Markov-Graph.

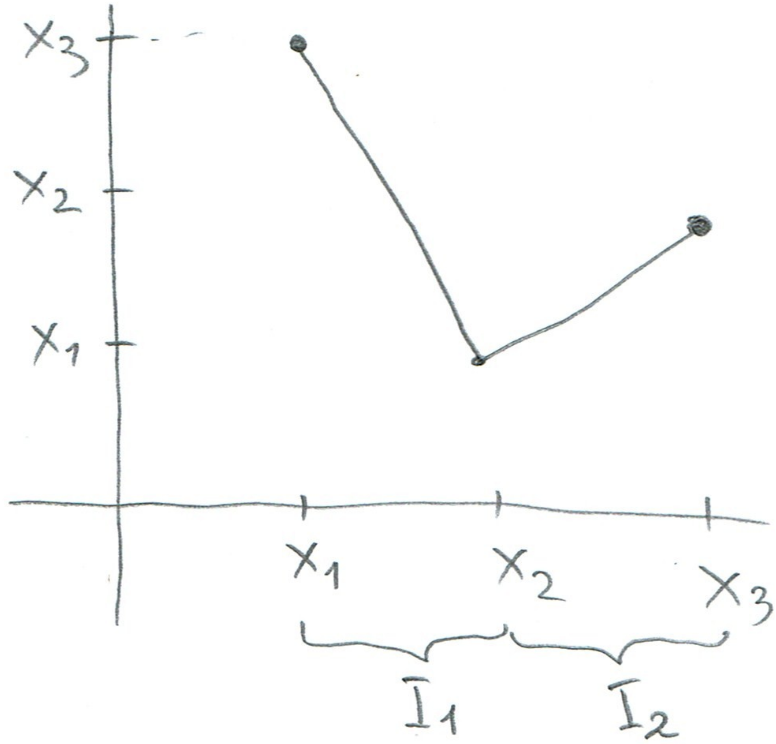
Definition 2.6. *Eine endliche Kollektion von abgeschlossenen Intervallen $I_k \subset I$ heißt* Partition *von $\bigcup_k I_k$, wenn $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$.*

Bemerkung. *$\bigcup_k I_k$ muss nicht unbedingt ein Intervall sein.*

Definition 2.7. *Sei $\{I_k\}$ eine Partition von I. Der* Markov-Graph *einer Abbildung $F : I \to I$ ist der gerichtete Graph mit $\{I_k\}$ als Knoten (Ecken) und gerichteten Kanten $I_k \to I_\ell$, falls $F(I_k) \supset I_\ell$.*

Es kann passieren, dass ein Markov-Graph gar keine Kanten hat!

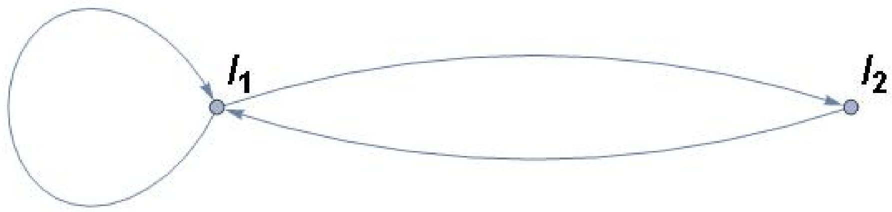
Beispiel. *$F : [x_1, x_3] \to [x_1, x_3]$ sei durch den Polygonzug mit Stützstellen $F(x_1) = x_3$, $F(x_2) = x_1$, $F(x_3) = x_2$ gegeben:*



Offenbar gilt

$$F(I_1) \supset I_1, \quad F(I_1) \supset I_2, \quad F(I_2) \supset I_1.$$

Der Markov-Graph:



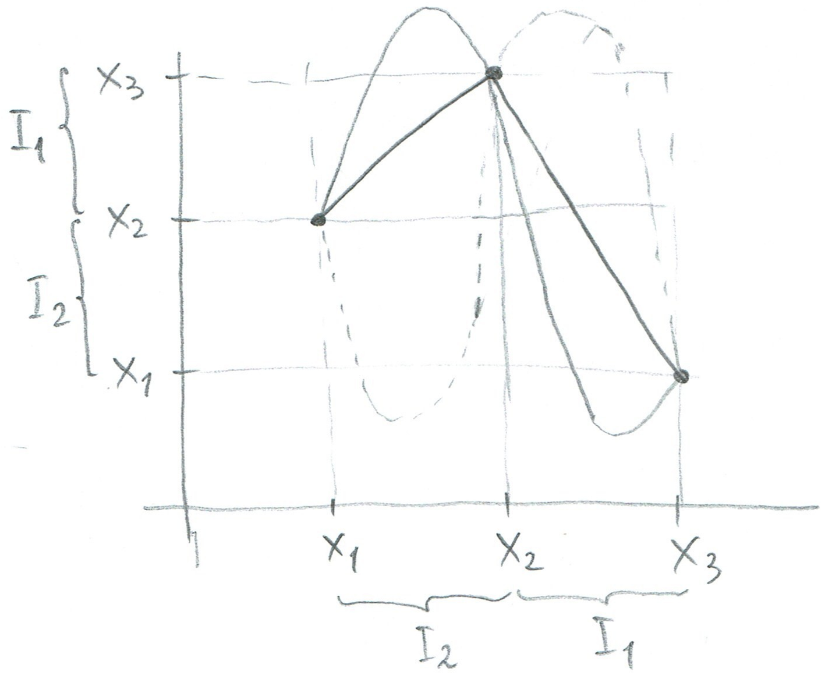
Der verallgemeinerte Zwischenwertsatz besagt, dass es zu jedem Punkt in Markov-Graphen einen Punkt $x \in I$ gibt s.d. $F^j(x_0) \in I_j$. Im periodischen Fall braucht die Periode des Pfades nicht die Primperiode zu sein (gemeinsame Rankpunkte sind möglich).

2.1.3. Beweis des Satzes von Li-Yorke. Sei $F : I \to I$ stetig. Sei $\mathcal{O} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ein periodischer Orbit mit Primperiode 3, $x_1 < x_2 < x_3$.

Fall 1: $F(x_1) = x_2, F(x_2) = x_3, F(x_3) = x_1,$

Fall 2: $F(x_1) = x_3, F(x_3) = x_2, F(x_2) = x_1.$

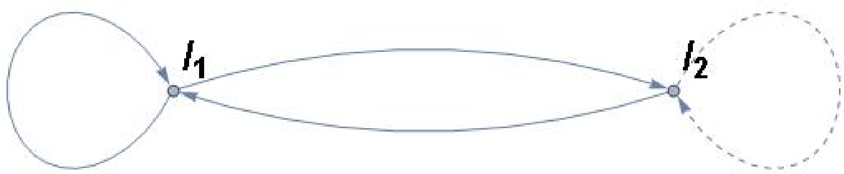
Wir betrachten den Fall 1, der Fall 2 ist analog. Sei $I_1 = [x_2, x_3], I_2 = [x_1, x_2]$. Dann ist $\{I_1, I_2\}$ eine Partition von I.



Es gilt

$$F(I_2) \supset I_1, \quad F(I_1) \supset I_1, \quad F(I_1) \supset I_2.$$

Eventuell gilt auch $F(I_2) \supset I_2$. Der Markov-Graph:



Der periodischen Bahn (x_1, x_2, x_3) entsprechen zwei Pfade auf dem Markov-Graphen (Markov-Pfade):

$$\begin{array}{ccccccc} I_2 & & I_1 & & I_1 & & I_2 \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \in x_1 & & \in x_2 & & \in x_3 & & \in x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} I_2 & & I_2 & & I_1 & & I_2 \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \in x_1 & & \in x_2 & & \in x_3 & & \in x_4 \end{array}$$

Betrachte einen Pfad der Länge m (die Länge des Pfades wird als die Anzahl der Kanten in dem Pfad definiert). Sei zunächst $m > 3$.

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{m-1 \text{ mal}} \to I_2 \to I_1$$

Nach dem verallgemeinerten Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in I_1$ mit $F^m(x) = x, F^j(x) \in I_1$ für $j = 0, \dots, m-2$, $F^{m-1}(x) \in I_2$. Also ist

$$\big(x, F(x), F^2(x), \dots, F^{m-1}(x)\big)$$

eine m-periodische Bahn.

Behauptung. $\big(x, F(x), \dots, F^{m-1}(x)\big)$ *hat Primperiode m.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j < m$, mit $F^j(x) = F^m(x) = x$. Dann ist $F^{j-1}(x) = F^{m-1}(x)$. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} F^{j-1}(x) \in I_1 \\ F^{m-1}(x) \in I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow F^{m-1}(x) \in I_1 \cap I_2 = \{x_2\}.$$

Daraus folgt, dass $F^m(x) = F\big(F^{m-1}(x)\big) = F(x_2) = x_3 \in I_1$.

Von der anderen Seite ist $F^m(x) = x \Rightarrow x = x_3 \Rightarrow F(x) = F(x_3) = x_1 \notin I_1$. Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Nun sei $m = 2$. Betrachte den Pfad $I_1 \to I_2 \to I_1$. Nach dem verallgemeinerten Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in I_1$ mit $F(x) \in I_2$ und $F^2(x) = x$. Folglich ist $(x, F(x))$ eine 2-periodische Bahn. Angenommen, $F(x) = x$. Dann ist $x \in I_1 \cap I_2 = \{x_2\} \Rightarrow F(x_2) = x_2$. Widerspruch!

2.2. Primperiode 3 bei logistischer Intervall-Abbildung

Satz 2.8. *Für die logistische Intervallabbildung existiert ein periodischer Punkt mit Primperiode 3 genau dann, wenn*

$$\mu \in [\underbrace{1 + 2\sqrt{2}}_{=3.8284\ldots}, 4].$$

Wir diskutieren eine leichtere Version des Satzes:

Satz 2.9. *Für $\mu = 1 + 2\sqrt{2}$ besitzt die Gleichung $F_\mu^3(x) = x$ genau drei Lösungen $t, u, v \in [0, 1]$ mit*

$$\begin{aligned} u &= F_\mu(t), \\ v &= F_\mu(u), \\ t &= F_\mu(v). \end{aligned}$$

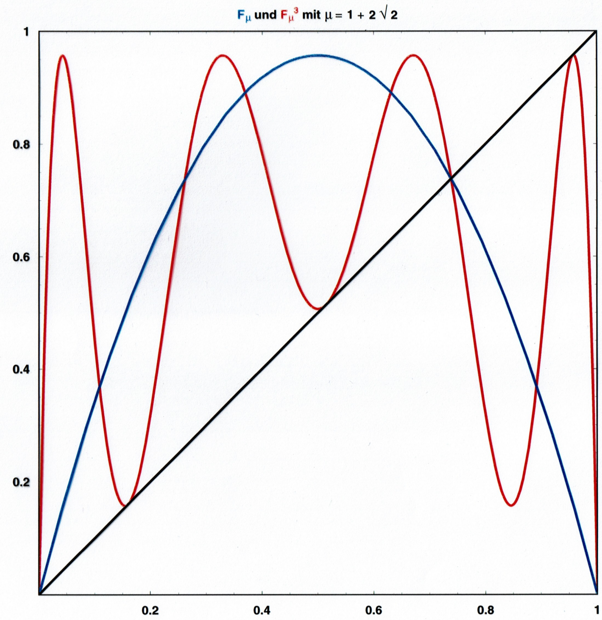
Beweisskizze. Für beliebiges $\mu \in [1, 4]$ gilt

$$F_\mu^3(x) - x = \underbrace{x(\mu x + 1 - \mu)}_{\substack{x = 0 \text{ und } x = 1-\mu^{-1} \\ \text{sind Fixpunkte von } F_\mu}} \quad P_\mu(x),$$

wobei $P_\mu(x)$ ein Polynom 6-ten Grades ist. Speziell für $\mu = 1 + 2\sqrt{2}$ lässt sich $P_\mu(x)$ als Quadrat eines Polynomes dritten Grades darstellen:

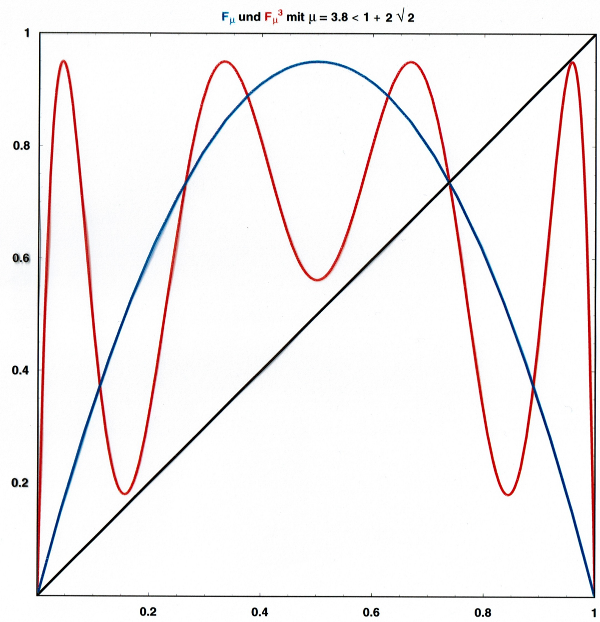
$$\begin{aligned} P_\mu(x) = \frac{1593 + 1100\sqrt{2}}{117649} &\cdot (343x^3 - 490x^2 \\ - 49\sqrt{2}x^2 + 91x + 112\sqrt{2}x + 31 - 41\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

Das Polynom dritten Grades lässt sich gut untersuchen. Insbesondere lässt sich zeigen, dass dieses Polynom genau drei Nullstellen im Intervall $(0,1)$ besitzt:

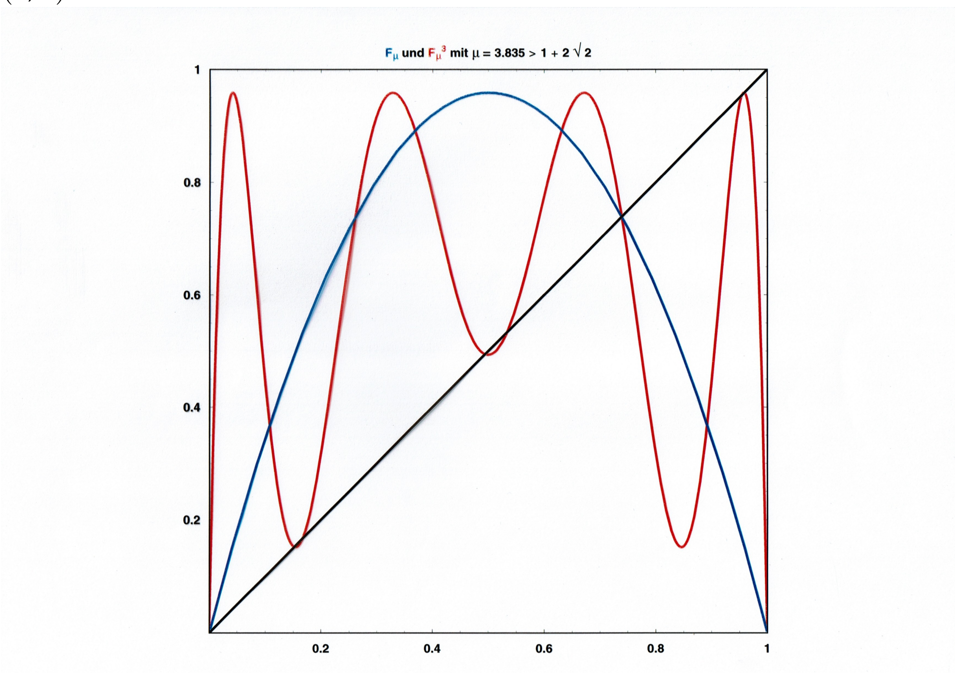


$\square$

Für den Beweis von Satz 2.8 soll man nun zwei Eigenschaften zeigen: (1) Für $\mu < 1 + 2\sqrt{2}$ besitzt das Polynom P_μ keine Nullstellen im Intervall $(0,1)$:



(2) Für $\mu > 1 + 2\sqrt{2}$ besitzt das Polynom P_μ wenigstens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ (und somit liegen auch zwei weitere Nullstellen in diesem Intervall). In der Tat besitzt das Polynom P_μ sechs Nullstellen im Intervall $(0,1)$:



Daher existieren für $\mu > 1 + 2\sqrt{2}$ zwei periodische Bahnen mit Primperiode 3.

Wesentlich einfacher kann die Existenz eines 3-primperiodischen Orbits bei der Zeltabbildung

$$T_\lambda(x) := \begin{cases} \lambda x, & x \in [0, 1/2] \\ \lambda(1-x), & x \in [1/2, 1] \end{cases} \qquad \lambda \in (1, 2]$$

untersucht werden.

Die Zeltabbildung besitzt eine 3-primperiodische Bahn genau dann wenn

$$\lambda \in \Big[\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{goldener Schnitt!}}, 2 \Big]$$

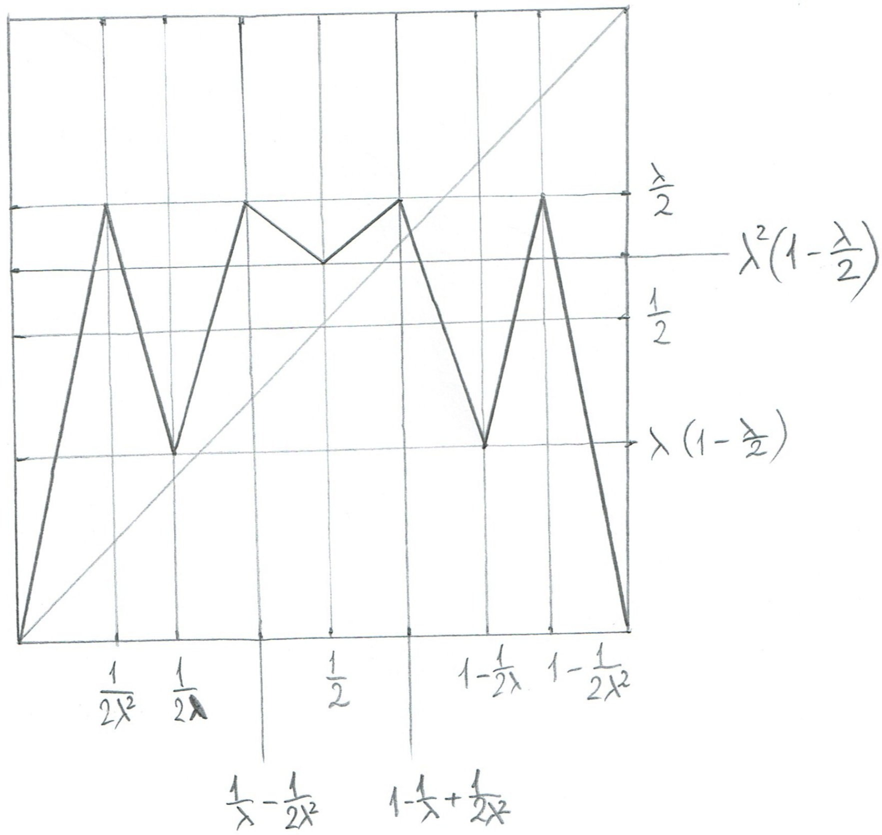
Für den Beweis dieser Aussage brauchen wir folgende drei Beobachtungen:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad T_\lambda^3\left(\frac{1}{2}\right) = T_\lambda^2\Big(\underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{>1/2}\Big) = T_\lambda\Big(\underbrace{\lambda\big(1-\frac{\lambda}{2}\big)}_{<1/2}\Big) = \lambda^2\left(1-\frac{\lambda}{2}\right),\\
&(2)\quad T_\lambda^3\Big(\underbrace{\frac{1}{2\lambda}}_{<1/2}\Big) = T_\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right) = T_\lambda\Big(\underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{>1/2}\Big) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}\right),\\
&(3)\quad T_\lambda^3\Big(\underbrace{\frac{1}{2\lambda^2}}_{<1/2}\Big) = T_\lambda^2\Big(\underbrace{\frac{1}{2\lambda}}_{<1/2}\Big) = T_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}
$$

Behauptung. Das dynamische System besitzt eine 3-periodische Bahn genau dann, wenn die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
&T_\lambda^3\big(\frac{1}{2\lambda}\big) \le \frac{1}{2\lambda},\\
&T_\lambda^3\big(\frac{1}{2}\big) \le \frac{1}{2},\\
&T_\lambda^3\big(1-\frac{1}{2\lambda^2}\big) \ge 1-\frac{1}{2\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

erfüllt sind (s. die Abbildung):



Diese drei Bedingungen sind äquivalent:

$$\begin{aligned}
T_\lambda^3\big(\frac{1}{2\lambda}\big) \leq \frac{1}{2\lambda} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda\big(1-\frac{\lambda}{2}\big) \leq \frac{1}{2\lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 \geq 0, \\
T_\lambda^3\big(\frac{1}{2}\big) \leq \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^2\big(1-\frac{\lambda}{2}\big) \leq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 \geq 0, \\
T_\lambda^3\big(1-\frac{1}{2\lambda^2}\big) \geq 1 - \frac{1}{2\lambda^2} \quad &\Leftrightarrow \quad T_\lambda^3\big(\frac{1}{2\lambda^2}\big) \geq 1 - \frac{1}{2\lambda^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{2} \geq 1 - \frac{1}{2\lambda^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 \geq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-1)$ gilt $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 \geq 0$ genau dann, wenn $\lambda^2 - \lambda - 1 \geq 0$. Also genau dann, wenn $\lambda \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right]$.

2.3. Chaos nach Li-Yorke

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

DEFINITION 2.10. *Ein dynamisches System* (X, F) *heißt* chaotisch nach Li-Yorke, *falls eine überabzählbare Menge* $S \subset X$ *existiert, sodass für alle* $x, y, \in S$, $x \neq y$ *gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(y)\big) > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(y)\big) = 0.$$

Die Menge S *heißt* scrambled set *(wörtlich: zusammengerührte Menge, scrambled eggs = Rührei). Wir werden* S chaotische Menge *nennen.*

In der früheren Definition von Chaos nach Li-Yorke wurde eine weitere Bedingung eingeführt:

- $\limsup_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(z)\big) > 0$ für alle $x \in S$ und alle periodischen Punkte $z \in X$.

Der folgende Satz zeigt, dass die Bedingung redundant ist.

SATZ 2.11. *Sei* (X, F) *chaotisch nach Li-Yorke. Sei* S *die chaotische Menge. Dann existiert eine überabzählbare Menge* $S' \subset S$ *mit*

$$\limsup_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(z)\big) > 0$$

für alle $x \in S'$ *und alle periodischen Punkte* $z \in X$. *Die Menge* $S \setminus S'$ *besteht höchstens aus einem Punkt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus folgendem Lemma

LEMMA 2.12. *Sei* (X, F) *chaotisch nach Li-Yorke. Die Menge* S *enthält höchstens einen Punkt* $x \in S$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(z)\big) = 0$$

für einen periodischen Punkt $z \in X$.

BEWEIS. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in S$ und zwei periodische Punkte $z_1, z_2 \in X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} d\big(F^n(x_i), F^n(z_i)\big) = 0 \text{ für } i = 1, 2. \tag{*}$$

BEHAUPTUNG. $z_1 \neq z_2$.

BEWEIS. Angenommen, $z_1 = z_2$. Aus der Dreiecksungleichung

$$d\big(F^n(x_1), F^n(x_2)\big) \leq d\big(F^n(x_1), F^n(z_1)\big) + d\big(F^n(x_2), F^n(z_2)\big)$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} d\big(F^n(x_1), F^n(x_2)\big) = 0.$$

Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Unabhängig davon ob $\mathcal{O}[z_1] = \mathcal{O}[z_2]$ oder $\mathcal{O}[z_1] \neq \mathcal{O}[z_2]$ ist, gilt

$$\delta := \min_{n\in\mathbb{N}_0} d\big(F^n(z_1), F^n(z_2)\big) > 0.$$

Aus (*) folgt, dass es ein $N' \in \mathbb{N}$ gibt so, dass

$$d\big(F^n(x_i), F^n(z_i)\big) < \frac{\delta}{3}, \quad i = 1, 2,$$

für alle $n \geq N'$. Aus

$$\liminf_{n\to\infty} d\big(F^n(x_1), F^n(x_2)\big) = 0$$

folgt, dass es ein $N \geq N'$ gibt mit

$$d\big(F^N(x_1, F^N(x_2)\big) < \frac{\delta}{3}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} d\big(F^N(z_1, F^N(z_2)\big) &\leq d\big(F^N(z_1, F^N(x_1)\big) \\ &+ d\big(F^N(x_1, F^N(x_2)\big) + d\big(F^N(z_2, F^N(x_2)\big) < \delta. \end{aligned}$$

Widerspruch! □

Die wichtigsten Fragen:

(1) Zusammenhang zwischen den Definitionen des Chaos nach Devaney und nach Li-Yorke.
(2) Beispiele chaotischer nach Li-Yorke dynamischer Systeme.
(3) Ist Chaos nach Li-Yorke unter der topologischen Konjugation invariant?

Wir beginnen mit Frage (2).

2.4. Primperiode 3 impliziert Chaos

Satz 2.13 (Li-Yorke). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $F : I \to I$ stetig. Besitzt das dynamische System (I, F) einen periodischen Punkt mit Primperiode 3, so ist das dynamische System chaotisch im Sinne von Li-Yorke.*

Zunächst diskutieren wir eine Folgerung des Satzes. $P(F) \subset \mathbb{N}$ bezeichne die Menge aller Primperioden von Punkten aus

$$\mathrm{Per}(F) := \{x \in I \mid F^n(x) = x \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Korollar 2.14. *Gilt*

$$P(F) \supsetneq \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\},$$

so ist F chaotisch nach Li-Yorke.

Beweis. Nach dem Satz von Scharkowskij ist $2^{n-1}(2m+3) \in P(F)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Wieder mit dem Satz von Scharkowkij folgt daraus, dass $3 \cdot 2^n \in P(F)$. Also besitzt die Abbildung F^{2^n} einen periodischen Punkt mit Primperiode 3. Nach dem Satz von Li-Yorke ist F^{2^n} chaotisch. Somit ist F chaotisch nach Li-Yorke. □

Beweis des Satzes von Li-Yorke. Sei $\mathscr{O} := \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 < x_2 < x_3$ die periodische Bahn. Dann gilt entweder

Fall 1: $F(x_1) = x_2$, $F(x_2) = x_3$, $F(x_3) = x_1$ oder
Fall 2: $F(x_1) = x_3$, $F(x_3) = x_2$, $F(x_2) = x_1$.

Wir betrachten den Fall 1, der Fall 2 ist analog. Sei $I_1 := [x_2, x_3]$, $I_2 := [x_1, x_2]$. Es gilt

$$F(I_2) \supset I_1, \quad F(I_1) \supset I_1 \cup I_2.$$

(1) Vorbereitungen. Für den Beweis brauchen wir folgende Hilfsergebnisse.

BEHAUPTUNG 1. Seien $J_1, J_2 \subset I_1$ abgeschlossene Intervalle. Gilt $J_1 \to J_2$, d.h. $F(J_1) \supset J_2$, so gibt es ein abgeschlossenes Intervall

$$J^* = [\alpha, \beta] \subset J_1 \text{ mit } F(J^*) = J_2 := [c, d].$$

Das Intervall J^* kann so gewählt werden, dass $F(\alpha) = d, F(\beta) = c$.

Der erste Teil der Behauptung entspricht der Behautpung im Beweis des verallgemeinerten Zwischenwertsatzes, Satz 2.4 und gilt für alle stetigen F. Der zweite Teil berücksichtigt das Verhalten der Funktion F auf dem Intervall I_1.

BEWEIS. Es gibt $z_1 \in J_1$ und $z_2 \in J_1$ mit $F(z_1) = c$ und $F(z_2) = d$. Die Punkte z_1, z_2 können so gewählt werden, dass $z_1 > z_2$ ist. Sei

$$\begin{aligned}
&\beta := \inf\{x \in J_1 \,|\, z_2 < x \leq z_1, F(x) = c\} \\
\overset{F \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad &F(\beta) = c \Rightarrow \beta > z_2, \\
&\alpha := \sup\{x \in J_1 \,|\, z_2 \leq x < \beta, F(x) = d\} \\
\overset{F \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad &F(\alpha) = d.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2 (= TEILAUSSAGE VON SATZ 2.5). Sei $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Intervalle, $J_k \subset I$, mit $J_1 \to J_2 \to J_3 \to \ldots$ Dann gibt es ein $x \in I$ so, dass $F^k(x) \in J_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(2) BEWEISSTRATEGIE. Zu jedem $r \in (\frac{3}{4}, 1)$ konstuieren wir eine Folge $\{M_n^{(r)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen mit

$$M_n^{(r)} \subset I_2 \;\text{ oder }\; M_n^{(r)} \subset I_1$$

und

$$F(M_n^{(r)}) \supset M_{n+1}^{(r)} \; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Nach Behauptung 2 gibt es einen Punkt $x^{(r)}$ mit $F^n(x^{(r)}) \in M_n^{(r)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass

$$S := \left\{ x^{(r)} \,|\, r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \right\}$$

chaotische Menge ist. Weiterhin beweisen wir dass $\left(\frac{3}{4}, 1\right) \ni r \mapsto x^{(r)}$ injektiv ist. Somit ist S überabzählbar.

(3) Sei $A := \{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

BEHAUPTUNG 3. Zu jedem $r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ gibt es eine Teilmenge $A_r \subset A$ so, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} = r$$

und $A_s \setminus A_r \neq \emptyset$ für $s > r$ unendlich ist.

BEWEIS. Wir definieren A_r rekursiv:

- $A_r^{(1)} = \{1^2\}$,

- Für jedes $n \geq 2$ setze $A_r^{(n)} = A_r^{(n-1)} \cup \{(n+1)^2\}$ falls

$$\frac{|A_r^{(n-1)} \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} < r$$

ist und $A_r^{(n)} = A_r^{(n-1)}$ sonst.

Setze $A_r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_r^{(n)}$. Zum Beispiel, für $r = 4/5$ erhält man

$$A_r = \{1^2, 3^2, 4^2, 5^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2, \ldots\}.$$

Wir zeigen nun, dass

$$|a_n - r| < \frac{1}{n}, \quad a_n := \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = r$. Für $n = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, denn $|1 - r| < 1$. Es gelte $|a_n - r| < \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Fall 1: $a_n < r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, (n+1)^2\}|}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}| + 1}{n} \\ &= \frac{n}{n+1}\left(a_n + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Wegen $a_n \in \left(r - \frac{1}{n}, r\right)$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\in \left(\frac{n}{n+1} r, \frac{n}{n+1} r + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(r - \frac{r}{n+1}, r - \frac{r}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\subset \left(r - \frac{1}{n+1}, r + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Also ist $|a_{n+1} - r| < \frac{1}{n+1}$.

Fall 2: $a_n \geq r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, (n+1)^2\}|}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} \\ &= \frac{n}{n+1} a_n. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \in \left[r, r+\dfrac{1}{n}\right)$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\in \left[\frac{n}{n+1}r, \frac{n}{n+1}r + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left[r - \frac{r}{n+1}, r - \frac{r}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\subset \left(r - \frac{1}{n+1}, r + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Also ist auch in diesem Fall $|a_{n+1} - r| < \frac{1}{n+1}$.

Nun zeigen wir, dass $|A_s \setminus A_r| = \infty$ für $s > r$. Angenommen es wäre $|A_s \setminus A_r| < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A_s \setminus A_r) \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} = 0.$$

Wegen $A_s = (A_s \setminus A_r) \cup (A_s \cap A_r)$ gilt

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} \frac{|A_s \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|(A_s \setminus A_r) \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{|(A_s \cap A_r) \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} \\ &= 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{|(A_s \cap A_r) \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} \\ &\le \lim_{n\to\infty} \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}|}{n} = r. \end{aligned}$$

Widerspruch! $\boxed{\text{B3}}$

(4) Aus Behauptung 1 folgt, dass es $\alpha_1 < \beta_1$ gibt mit

$$[\alpha_1, \beta_1] \subset [x_2, x_3] = I_1 \text{ und } F(\alpha_1) = x_3, F(\beta_1) = x_2, F(x) \in (x_2, x_3)$$

für alle $x \in (\alpha_1, \beta_1)$. Setze nun

$$J_1 := [\alpha_1, \beta_1], \quad J_2 := [\alpha_1, \beta_1] \Rightarrow F(J_1) \supset J_2.$$

Aus Behauptung 1 folgt, dass ein Intervall $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ existiert so, dass

$$F(\alpha_2) = \beta_1,\ F(\beta_2) = \alpha_1, F(x) \in (\alpha_1, \beta_1) \quad \text{für alle} \quad x \in (\alpha_2, \beta_2).$$

Rekursiv erhalten wir eine Folge geschachtelter Intervalle

$$[\alpha_m, \beta_m] \supset [\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}]$$

mit

$$F(\alpha_{m+1}) = \beta_m, \quad F(\beta_{m+1}) = \alpha_m, \quad F(x) \in (\alpha_m, \beta_m).$$

für alle $x \in (\alpha_{m+1}, \beta_{m+1})$. Setze

$$[\overline{\alpha}, \overline{\beta}] := \bigcap_{m=1}^{\infty} [\alpha_m, \beta_m] \subset I_1$$

($\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ ist nicht ausgeschlossen!) Da F stetig ist, gilt $F(\overline{\alpha}) = \overline{\beta}$ und $F(\overline{\beta}) = \overline{\alpha}$.

(5a) Setze $M_n^{(r)} := I_2$ für alle $n \in A_r$.

BEHAUPTUNG 4. Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \in A_r$ und $(n+1)^2 \in A_r$.

BEWEIS. Angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n^2 \in A_r$ und $(n+1)^2 \notin A_r$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A_r \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Widerspruch! $\boxed{\text{B4}}$

(5b) Gilt $n^2 \in A_r$ und $(n+1)^2 \in A_r$, setze

$$M_k^{(r)} := [\alpha_{2n-(2j-1)}, \overline{\alpha}] \subset I_1 \quad \forall\, k = n^2 + (2j-1),\ j \in \{1 \ldots n\},$$
$$M_k^{(r)} := [\overline{\beta}, \beta_{2n-2j}] \subset I_1 \quad \forall\, k = n^2 + 2j,\ j \in \{1 \ldots n\}.$$

(5c) Setze $M_n^{(r)} = I_1$ in allen anderen Fällen.

BEHAUPTUNG 5. $F(M_n^{(r)}) \supset M_{n+1}^{(r)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: Im Falle (5a) berücksichtige, dass

$$F(I_2) \supset I_1 \overset{(5b),(5c)}{\supset} M_{n+1}^{(r)}.$$

Im Falle (5c) berücksichtige, dass

$$F(I_1) \supset I_1 \cup I_2 \supset M_{n+1}^{(r)}.$$

Im Falle (5b) gilt

$$F\big(M_k^{(r)}\big) = \big[\overline{\beta}, F\big(\alpha_{2n-(2j-1)}\big)\big] = [\overline{\beta}, \beta_{2n-2j}] = M_{k+1}^{(r)}$$

für alle $k = n^2 + (2j-1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und

$$F\big(M_k^{(r)}\big) = \big[F(\beta_{2n-2j}), \overline{\alpha}\big] = \big[\alpha_{2n-2j-1}, \overline{\alpha}\big] \supset \big[\alpha_{2n-(2j-1)}, \overline{\alpha}\big] = M_{k+1}^{(r)}$$

für alle $k = n^2 + 2j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. $\boxed{\text{B5}}$

(6) Nach Behauptung 2 gibt es ein $x^{(r)}$ mit $F^n(x^{(r)}) \in M_n^{(r)}\,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Setze $S := \big\{x^{(r)} \,|\, r \in \big(\tfrac{3}{4}, 1\big)\big\}$. Sei $r < s$. Dann für jedes $n \in A_s \setminus A_r$ gilt

$$F^n(x^{(r)}) \in M_n^{(r)} \subset I_1 \text{ und } F^n(x^{(s)}) \in M_n^{(s)} \subset I_2.$$

Angenommen,

$$x^{(r)} = x^{(s)} \Rightarrow F^n(x^{(r)}) = F^n(x^{(s)}) \in \underbrace{I_1 \cap I_2}_{=\{x_2\}}$$

für ein $n \in A_s \setminus A_r$. Dann ist $n = k^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad n + 2 \neq \ell^2\,\forall\,\ell \in \mathbb{N} \Rightarrow M_{n+2}^{(r)} \subset I_1 \\ &\Rightarrow \quad F^{n+2}(x^{(r)}) \in I_1. \end{aligned}$$

Andererseits gilt $F^{n+2}(x^{(r)}) = F^2(x_2) = x_1 \notin I_1$. Widerspruch! Also ist $x^{(r)} \neq x^{(s)}$, d.h. die Abbildung $r \to x^{(r)}$ ist injektiv $\Rightarrow S$ ist überabzählbar.

(7) Seien $x^{(r)}, x^{(s)} \in S$, $r < s$ beliebig. Aus $F^2(x_2) = x_1 < x_2$ und der Stetigkeit von F^2 folgt, dass

$$(*) \qquad \exists\, \delta > 0 \text{ so, dass } F^2(x) < x_2 \quad \forall\, x \in [x_2 - \delta, x_2] \subset I_2.$$

Sei $n \in A_s \setminus A_r$ beliebig. Dann ist $n + 2 \notin A_s$ und

$$F^n(x^{(s)}) \in M_n^{(s)} = I_2 \quad \text{und} \quad F^{n+2}(x^{(s)}) \in M_{n+2}^{(s)} \subset I_1.$$

Wir nehmem an, dass $F^n(x^{(s)}) \in [x_2 - \delta, x_2]$. Wegen $F^{n+2}(x^{(s)}) \in I_1$ ist $F^{n+2}(x^{(s)}) < x_2$ und somit $F^{n+2}(x^{(s)}) \in I_2$. Widerspruch! Also gilt

$$F^n(x^{(s)}) < x_2 - \delta.$$

Da $A_s \setminus A_r$ unendlich ist, existiert eine Folge $n_\ell \in A_s \setminus A_r$, $n_\ell \to \infty$ s.d. $F^{n_\ell}(x^{(s)}) < x_2 - \delta$ und $F^{n_\ell}(x^{(r)}) > x_2$. Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x^{(r)}) - F^n(x^{(s)})| \geq \delta > 0,$$

(8) BEHAUPTUNG 6.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A_r \cap A_s \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} > \frac{1}{2}$$

BEWEIS. Das Komplement der Menge $A_r \cap A_s \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ in $A \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ ist

$$\begin{aligned} &\big\{k \in A_r, k \notin A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\} \\ \cup &\big\{k \notin A_r, k \in A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\big\{k \in A_r, k \notin A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\} \subset \big\{k \notin A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\}.$$

Aus

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\big|\big\{k \notin A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\}\big|}{n} \leq \frac{1}{4}$$

folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\big|\big\{k \in A_r, k \notin A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\}\big|}{n} \leq \frac{1}{4}.$$

Analog gilt

$$\limsup \frac{\big|\big\{k \notin A_r, k \in A_s, k \in \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}\big\}\big|}{n} \leq \frac{1}{4}.$$

B6

BEHAUPTUNG 7. Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \in A_r \cap A_s$ und $(n+1)^2 \in A_r \cap A_s$.

BEWEIS. Angenommen, es gäbe endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \in A_r \cap A_s$ und $(n+1)^2 \in A_r \cap A_s$. Dann wäre

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A_r \cap A_s \cap \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}|}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Widerspruch! B7

Nach der Konstruktion gilt

$$M_k^{(r)} = M_k^{(s)} = [\alpha_{2n-1}, \overline{\alpha}] \text{ mit } k = n^2 + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \in A_r \cap A_s$ und $(n+1)^2 \in A_r \cap A_s$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_m = \overline{\alpha} \Rightarrow |\alpha_{2n-1} - \overline{\alpha}| < \varepsilon \qquad (*)$$

für hinreichend große n. Es gilt

$$F^n(x^{(r)}) \in M_n^{(r)} \,\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ und } F^n(x^{(s)}) \in M_n^{(s)} \,\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \in A_r \cap A_s$ und $(n+1)^2 \in A_r \cap A_s$

$$\Rightarrow |\underbrace{F^{n^2+1}(x^{(r)})}_{\substack{\in M^r_{n^2+1} \\ =[\alpha_{2n-1},\overline{\alpha}]}} - \underbrace{F^{n^2+1}(x^{(s)})}_{\substack{\in M^s_{n^2+1} \\ =[\alpha_{2n-1},\overline{\alpha}]}}| \leq |\alpha_{2n-1} - \overline{\alpha}| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

Es gibt unendlich viele solche n. Daher ist

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(x^{(r)}) - F^n(x^{(s)})| = 0.$$

□

2.5. Der Bernoulli-Shift ist chaotisch

SATZ 2.15. *$(\Sigma_{\{0,1\}}, \sigma)$ ist chaotisch nach Li-Yorke.*

BEWEIS. **(1)** VORBEREITUNGEN.

(a) $\limsup_{n\to\infty} d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) > 0$ genau dann, wenn $s_n \neq t_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\liminf_{n\to\infty} d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = 0$ genau dann, wenn zu jeder beliebigen Zahl $k \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$s_{n+j} = t_{n+1} \,\forall\, j \in \{0, \dots, k\}.$$

(2) Sei $A := \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$. Sei M_A die Menge aller unendlichen Teilmengen von A, $M_A \subset 2^A$.

BEHAUPTUNG. Es gibt eine überabzählbare Menge $M' := \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \Lambda$ Indexmenge, $A_\alpha \in M_A$ s.d. für alle $\alpha \neq \beta$, $A_\alpha \cap A_\beta$ endlich ist.

BEWEIS. Es genügt die Bahuptung für $A = \mathbb{Q}$ zu beweisen. Zu beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $(x_n^{(\alpha)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit

$$x_n^{(\alpha)} \in \mathbb{Q},\, x_n^{(\alpha)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha,,\, x_n^{(\alpha)} \neq x_m^{(\alpha)},\, n \neq m.$$

Setze $A_\alpha := \{x_n^{(\alpha)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Für $\alpha \neq \beta$ ist $A_\alpha \cap A_\beta$ endlich, denn die Folgen $(x_n^{(\alpha)})$ und $(x_n^{(\beta)})$ haben höchstens endlich viele gemeinsame Folgenglieder.

B

(3) Zu jedem $\alpha \in \Lambda$ betrachte $s^{(\alpha)} := (s_0^{(\alpha)} s_1^{(\alpha)} \dots) \in \Sigma$ so, dass

$$s_n^{(\alpha)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in A_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\alpha \neq \beta \Rightarrow s_n^{(\alpha)} = s_n^{(\beta)}$ genau dann, wenn $n \in A_\alpha \cap A_\beta$ (endliche Menge) $\Rightarrow s_n^{(\alpha)} \neq s_n^{(\beta)}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt:

1. $s^{(\alpha)} \neq s^{(\beta)}$ für $\alpha \neq \beta$

$$\Rightarrow S := \{s^{(\alpha)} \mid \alpha \in \Lambda\} \text{ ist überabzählbar.}$$

2. (nach (1a)):

$$\limsup_{n\to\infty} d\big(\sigma^n(s^{(\alpha)}), \sigma^n(s^{(\beta)})\big) > 0 \quad \forall\, s^{(\alpha)}, s^{(\beta)} \in S.$$

(4) Zu jedem beliebig großen $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\begin{aligned} & n + j \neq 2^\ell \,\forall\, j \in \{0, \dots, k\} \,\forall\, \ell \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\quad & s_{n+j}^{(\alpha)} = s_{n+j}^{(\beta)} = 0 \,\forall\, j \in \{0, \dots, k\} \\ \overset{(1b)}{\Rightarrow}\quad & \liminf_{n\to\infty} d\big(\sigma^n(s^{(\alpha)}), \sigma^n(s^{(\beta)})\big) = 0. \end{aligned}$$

□

2.6. Chaos nach Li-Yorke und topologische Konjugation

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Chaos nach Li-Yorke unter der topologischen Konjugation im Allgemeinen nicht erhalten bleibt.

Sei $X = [0, \infty]$. Setze

$$d_1(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}, & \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \text{ ungerade}, x \neq y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung 1. d_1 ist eine Metrik auf X.

Beweis selbst.

Behauptung 2. Im metrischen Raum (X, d_1) ist jede einpunktige Menge offen. Daher ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ für alle $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}$. Somit ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. $\boxed{\text{B2}}$

Definiere

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x \in X \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{n(n-1)}{2} + i + 1, & x = \frac{n(n-1)}{2} + i, \quad 0 \le i \le n-2, \\ \frac{n(n-1)}{2}, & x = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1). \end{cases}$$

Anmerkung zur Definition: Jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ kann eindeutig als

$$m = \frac{n(n-1)}{2} + i, \quad 0 \le i \le n-1$$

dargestellt werden. BEWEIS: $2m, n(n-1)$ sind gerade Zahlen. Ist $m \in \mathbb{N}$ gegeben, finde die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$ s.d. $2m \geq n(n-1)$. Betrachte

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+1-1) - n(n-1) = n(n+1) - n(n-1) = 2n \\ \Rightarrow\ & \underbrace{2m - n(n-1)}_{\text{gerade}} = 2i \text{ für ein } 0 \leq i \leq 2(n-1). \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 3. $F : (X, d_1) \to (X, d_1)$ ist stetig.

Sei

$$d_2(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

die diskrete Metrik auf X.

BEHAUPTUNG 4. $F : (X, d_2) \to (X, d_2)$ stetig.

BEHAUPTUNG 5. Die dynamischen Systeme (X_{d_1}, F) und (X_{d_2}, F) sind topologisch konjugiert mit der Konjugation $h : X \to X$, $h = \mathrm{id}$.

BEHAUPTUNG 6. Das dynamische System (X_{d_1}, F) ist chaotisch nach Li-Yorke.

BEWEIS. Wähle $S = (0,1)$. Seien $x, y \in S, x \neq y$, beliebig. Betracte

$$\begin{aligned} & \limsup_{n\to\infty} d_1\big(F^n(x), F^n(y)\big) \\ \geq\ & \limsup_{n\to\infty} d_1\big(F^{2n}(x), F^{2n}(y)\big) \\ \overset{x,y\notin\mathbb{N}}{=}\ & \limsup_{n\to\infty} d_1(x+2n, y+2n) \\ \overset{\substack{\lfloor x+2n\rfloor \text{und} \\ \lfloor y+2n\rfloor \text{gerade}}}{=}\ & \limsup 1 > 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to\infty} d_1\big(F^n(x), F^n(y)\big) \\ \leq\ & \liminf_{n\to\infty} d_1\big(F^{2n+1}(x), F^{2n+1}(y)\big) \\ =\ & \liminf_{n\to\infty} d_1(x+2n+1, y+2n+1) \\ =\ & \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B6}}$

BEHAUPTUNG 7. Das dynamische System (X_{d_2}, F) ist *nicht* chaotisch nach Li-Yorke.

BEWEIS. Seien $x, y \in X$ belieibig, $x \neq y$. Dann ist

$$d_2\big(F^n(x), F^n(y)\big) = 1 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} d_2\big(F^n(x), F^n(y)\big) = 1 > 0.$$

$\boxed{\text{B7}}$

2.6.1. Mehr über Chaos nach Li-Yorke.

SATZ 2.16. *Sei I ein Intervall, $F : I \to I$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(a) *(I, F) ist chaotisch nach Li-Yorke.*

(b) *Es gibt $x, y \in I$ so, dass*

$$\limsup_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(y)\big) > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} d\big(F^n(x), F^n(y)\big) = 0.$$

BEMERKUNG. *Für allgemeine dynamische Systeme ist die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$ falsch: Es gibt einen kompakten metrischen Raum X mit einer abzählbaren chaotischen Menge, für den jedoch keine überabzählbare chaotische Menge existiert. [Mir ist nur die Ankündigung aber kein Beweis bekannt!]*

SATZ 2.17. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $F : I \to I$ stetig. Ist (I, F)* nicht *chaotisch im Sinne von Li-Yorke, so gibt es zu jedem $x \in I$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen periodischen Punkt $z \in I$ mit*

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(z)| < \varepsilon.$$

Satz 2.17 zeigt, dass Chaos nach Li-Yorke die schwächste Definition von Chaos ist. Ist das dynamische System nicht chaotisch, so wird jede Trajektorie von einer periodischen Bahn angezogen.

SATZ 2.18 (Huang - Ye (2002), Mai (2004)). *Sei X ein vollständiger metrischer Raum ohne isolierte Punkte, $F : X \to X$ stetig. Ist (X, F) chaotisch nach Devaney mit der Empfindlichkeitsschranke $\varepsilon > 0$, d.h. zu jedem $x \in X$ und jedem $\delta > 0$ existieren ein $y \in B_\delta(x)$ und ein $k = k(x, y)$ mit $d\big(F^k(x), F^k(y)\big) \geq 0$, so existiert eine überabzählbare chaotische Menge mit Modulus $\frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere ist (X, F) chaotisch nach Li-Yorke.*

Für Intervallabbildungen ist noch ein Ergebnis bekannt:

SATZ 2.19 (Ruette (2003)). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $F : I \to I$ stetig. Sei $Y \subset I$ eine abgeschlossene invariante Teilmengte so, dass $F|_Y$ transitiv ist und empfindliche Abhängigkeit von Anfangswert hat. Dann ist (I, F) chaotisch nach Li-Yorke.*

BEMERKUNG: Aus der Tatsache, dass $F|_Y$ empfindliche Abhängigkeit von Anfangswert hat, folgt, dass $|Y| = \infty$.

KAPITEL 3

Topologische Entropie

3.1. Topologische Entropie

Sei X ein kompakter metrischer Raum, $F : X \to X$ stetig. Sei $\mathcal{C} := \{C_1 \dots C_p\}$ eine endliche (nicht unbedingt offene) Überdeckung von X, d.h.

$$\bigcup_{j=1}^{p} C_j = X \ (C_j = \varnothing \text{ ist erlaubt}).$$

Für zwei endliche Überdeckungen $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_p\}$ und $\mathcal{D} = \{D_1 \dots D_q\}$ definieren wir

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{D} := \{C_i \cap \mathcal{D}_j \,|\, i = 1 \dots p,\ j = 1 \dots q\}.$$

Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ offene Überdeckungen, so ist $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ auch eine offene Überdeckung.

Definition 3.1. *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Überdeckungen. Die Überdeckung $\mathcal{D} = \{D_1 \dots D_q\}$ ist* feiner *als die Überdeckung $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_p\}$, wenn für jedes $j \in \{1 \dots q\}$ ein $i \in \{1 \dots p\}$ existiert s.d. $D_j \subset C_i$ gilt. In Zeichen: $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$. Offenbar ist $\prec$ eine partielle Ordnungsrelation. Für eine beliebige Überdeckung $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_p\}$ setze*

$$N(\mathcal{C}) := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, i_1 \dots i_n \in \{1 \dots p\} \text{ s.d. } X = C_{i1} \cup \dots \cup C_{in}\},$$

d.h. die kleinste Anzahl der Mengen C_i, die X überdecken. Offenbar gilt $N(\mathcal{C}) \le |\mathcal{C}| := p$.

Lemma 3.2. *Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Überdeckungen von X, so gilt*

$$N(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \le N(\mathcal{C}) \cdot N(\mathcal{D}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_p\}, \mathcal{D} = \{D_1 \dots D_q\}$. Sei $n \in N(\mathcal{C})$ die kleinste Zahl s.d. $X = C_{i1} \cup \dots \cup C_{in}$ für gewisse $i_1 \dots i_n \in \{1 \dots p\}$. Sei $m \in N(\mathcal{D})$ die kleinste Zahl s.d. $X = D_{j1} \cup \dots \cup D_{jm}$ für gewisse $j_1 \dots j_m \in \{1 \dots q\}$. Dann ist

$$\mathcal{E} := \{C_{ik} \cap D_{j\ell}\}_{\substack{k=1\dots n \\ \ell=1\dots m}}$$

eine Überdeckung von X. Folglich gilt

$$N(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \le |\mathcal{E}| = N(\mathcal{C}) \cdot N(\mathcal{D}).$$

□

Lemma 3.3. *Ist $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_p\}$ eine Überdeckung von X, so ist*

$$F^{-1}(\mathcal{C}) := \{F^{-1}(C_1) \dots F^{-1}(C_p)\}$$

auch eine Überdeckung von X. Es gilt $N\big(F^{-1}(\mathcal{C})\big) \le N(\mathcal{C})$.

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $x \in X$ mit $x \notin F^{-1}(C_i)$ für alle $i \in \{1 \ldots p\}$. Dann wäre $F(x) \notin C_i$ für alle $i \in \{1 \ldots p\}$. Widerspruch!

Sei $\{C_{i_1} \ldots C_{i_n}\}$ eine Überdeckung von X mit $n = N(\mathcal{C})$. Dann ist $\{F^{-1}(C_{i_1}), \ldots, F^{-1}(C_{i_n})\}$ eine Überdeckung von X. Folglich gilt $N\big(F^{-1}(\mathcal{C})\big) \leq N(\mathcal{C})$. $\square$

Definiere

$$\mathcal{C}^n := \mathcal{C} \vee F^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee F^{-(n-1)}(\mathcal{C}) \text{ und } N_n(\mathcal{C}, F) := N(\mathcal{C}^n).$$

Definition 3.4.

$$H(\mathcal{C}, F) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n}.$$

Offenbar gilt $N_n(\mathcal{C}, F) \geq 1 \Rightarrow H(\mathcal{C}, F) \geq 0$.

Definition 3.5.

$$h_{\text{top}}(X, F) := \sup\{H(\mathcal{C}, F) \mid \mathcal{C} \textit{ endliche offene Überdeckung von } X\}$$

heißt die topologische Entropie *des dynamischen Systems* (X, F).

Satz 3.6.

$$H(\mathcal{C}, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n}.$$

Für den Beweis brauchen wir ein Hilfsergebnis:

Lemma 3.7. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine subadditive Zahlenfolge, d.h.* $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ *für alle* $n, k \in \mathbb{N}$. *Dann besitzt die Folge* $(n^{-1}a_n)$ *einen Grenzwert in* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Beweis. Es gilt $a_n \leq a_{n-1} + a_1 \leq a_{n-2} + 2a_1 \leq \cdots \leq na_1$. Somit ist

$$\frac{a_n}{n} \leq a_1.$$

Offenbar gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$q_n := \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \quad r_n := n - q_n k \in \{0, \ldots, k-1\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad n = q_n k + r_n \Rightarrow a_n &= a_{q_n k + r_n} \\ &\leq a_{q_n} k + a_{r_n} \leq a_{(q_n - 1)k} + a_k + a_{r_n} \\ &\leq \ldots \leq q_n a_k + a_{r_n} \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q_n}{q_n k + r_n} a_k + \frac{a_{r_n}}{q_n k + r_n}.$$

Betrachte den Grenzwert $n \to \infty \Leftrightarrow q_n \to \infty$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{q_n\to\infty} \frac{q_n a_k}{q_n k + r_n} + \lim_{q_n\to\infty} \frac{a_{rn}}{q_n k + r_n} = \frac{a_k}{k}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k} \;\forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k}.$$

Ist $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k} = -\infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$. Sei nun $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k} > -\infty$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

□

Beweis von Satz 3.6. Betrachte

$$\begin{aligned}
N_{n+k}(\mathcal{C}, F) &= N\Big(\bigvee_{m=0}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \\
&= N\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C}) \vee \bigvee_{m=n}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \\
&\overset{\text{Lemma 3.2}}{\leq} N\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \cdot N\Big(\bigvee_{m=n}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \\
&= N_n(\mathcal{C}, F) \cdot N_k\big(F^{-n}(\mathcal{C}), F\big)
\end{aligned}$$

Es gilt: $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$.

$$\bigvee_{m=n}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C} = F^{-n}\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big)$$

$$\Rightarrow \quad N\Big(\bigvee_{m=n}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) = N\Big(F^{-n}\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big)\Big)$$

$$\overset{\text{Lemma 3.3}}{\leq} \quad N\Big(\bigvee_{m=0}^{k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) = N_k(\mathcal{C}, F)$$

$$\Rightarrow \quad N_{n+k}(\mathcal{C}, F) \leq N_n(\mathcal{C}, F) N_k(\mathcal{C}, F)$$

$$\overset{\text{Lemma 3.7}}{\leq} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n}$$

□

Warum ist die topologische Entropie interessant? Einige Beispiele:

(1) Das dynamische System (I, F) besitzt eine periodische Bahn mit Primperiode $p \neq 2^k, k \in \mathbb{N}_0$, genau dann, wenn $h_{\text{top}}(I, F) > 0$.

(2) Ist $h_{\text{top}}(X, F) > 0$, so ist (X, F) chaotisch nach Li-Yorke (gilt für kompakte metrische Räume (2002)). Es gibt chaotische nach Li-Yorke Intervallabbildungen mit $h_{\text{top}}(I, F) = 0$.

(3) $h_{\text{top}}(I, F) > 0$ genau dann, wenn eine abgeschlossene invariante Teilmenge $Y \subset I$ existiert so, dass das dynamische System $(Y, F|_Y)$ chaotisch nach Devaney ist.

3.2. Die Bowensche Formel

Sei X ein kompakter metrischer Raum, $F : X \to X$ stetig.

DEFINITION 3.8. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Eine Menge $S \subset X$ heißt (n, ε)-Erzeuger, wenn für jedes $x \in X$ ein $y \in S$ existiert, sodass*

$$d\big(F^j(x), F^j(y)\big) \leq \varepsilon \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

gilt.

LEMMA 3.9. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein endlicher (n, ε)-Erzeuger ($|S| < \infty$).*

BEWEIS. Sei $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_p\}$ eine Überdeckung von X mit $\operatorname{diam}(\mathcal{C}) \leq \varepsilon$, wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\mathcal{C}) &:= \max_{k \in \{1 \ldots p\}} \operatorname{diam}(C_k), \\ \operatorname{diam}(C_k) &:= \sup_{x,y \in C_k} d(x, y). \end{aligned}$$

Betrachte die Überdeckung $\bigvee\limits_{j=0}^{n-1} F^{-j}(\mathcal{C})$ mit Mengen $\bigcap\limits_{j=0}^{n-1} F^{-j}(C_{k_j})$, $k_j \in \{1 \ldots p\}$. Es gibt höchstens p^n nichtleere Mengen in diesem Mengensystem. Aus jeder nichtleeren Menge der Überdeckung $\bigvee\limits_{j=0}^{n-1} F^{-j}(\mathcal{C})$ wähle einen Punkt. Sei S die Menge dieser Punkte.

BEHAUPTUNG. S ist ein (n, ε)-Erzeuger.

BEWEIS. Sei $x \in X$ beliebig. Für jedes $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ wähle ein k_j, sodass $F^j(x) \in C_{k_j}$. Dann ist

$$x \in \bigcap_{j=0}^{n-1} F^{-j}(C_{k_j}).$$

Es gibt ein $z \in S$ mit $z \in \bigcap\limits_{j=0}^{n-1} F^{-j}(C_{k_j})$.

$$\begin{aligned} x, z \in C_{k_0} \quad &\Rightarrow \quad d(x, z) \leq \varepsilon \\ F(x), F(z) \in C_{k_1} \quad &\Rightarrow \quad d\big(F(x), F(z)\big) \leq \varepsilon \text{ usw.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Das Lemma ist bewiesen. $\square$

Sei $r(n, \varepsilon) := \min\{|S| \mid S \text{ ist } (n, \varepsilon)\text{-Erzeuger}\}$. Es gilt $r(n, \varepsilon) \leq p^n$ (siehe Beweis oben)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \log r(n, \varepsilon) \leq n \log p \\ &\Rightarrow \quad \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon) < \infty. \end{aligned}$$

Satz 3.10 (Bowensche Formel).

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(X,F) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon). \end{aligned}$$

Bemerkung. *Es gibt dynamische Systeme mit*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon)\neq\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon).$$

Zunächst diskutieren wir einige Anwendungen der Bowenschen Formel.

Definition 3.11. *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $m(\varepsilon)$ die kleinste Anzahl von offenen Kugeln vom Radius $\varepsilon>0$, welche die Menge X überdecken. Die Zahlen*

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_c(X) &:= \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log m(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, \\ \underline{\dim}_c(X) &:= \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log m(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \end{aligned}$$

heißen obere *und* untere kapazitive Dimensionen *(Kapazitätsdimension, Kästchenzähldimension, Box-Dimension) von X.*

Bemerkung. *Für kompakte Intervalle $I\subset\mathbb{R}$ gilt $\overline{\dim}_c(I)=1=\underline{\dim}_c(I)$.*

Korollar 3.12. *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum mit $\overline{\dim}_c(X)<\infty$. Sei $F:X\to X$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L>0$, d.h.*

$$d\big(F(x),F(y)\big)\leq Ld(x,y)\quad\forall\, x,y\in X.$$

Dann gilt

$$h_{\text{top}}(X,F)\leq\overline{\dim}_c(X)\log\max\{1,L\}.$$

Beispiel.

$$T_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda x, & x\in[0,1/2]\\ \lambda(1-x), & x\in[1/2,1]\end{cases}\quad 0\leq\lambda\leq 2$$

Die Zeltabbildung ist Lipschitz-stetig, denn: Sei $x\in[0,1/2]$, $y\in[1/2,1]$. Dann gilt

$$|T_\lambda(x)-T_\lambda(y)|\leq\int_x^y|T'_\lambda(z)|dz=\lambda|x-y|.$$

Somit ist

$$h_{\text{top}}([0,1],T_\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\in[0,1]\\ \leq\log\lambda, & \lambda\in[1,2]\end{cases}$$

Beweis von Korollar 3.12. Setze $\widetilde{L}:=\max\{1,L\}$. Seien $\varepsilon>0$ und $n\in\mathbb{N}$ beliebig. Setze $\varepsilon_n:=\varepsilon\widetilde{L}^{-(n-1)}$. Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist, d.h. für alle $\varepsilon>0$ gibt es eine endliche Überdeckung mit Kugeln vom Radius ε. Sei S_n die Menge von Mittelpunkten der Kugeln vom Radius ε_n, die X überdecken, d.h. für alle $x\in X\,\exists\, y\in S_n$ sodass $d(x,y)<\varepsilon_n$.

BEHAUPTUNG. S_n ist ein (n,ε)-Erzeuger.

BEWEIS. Zum beliebigen $x \in X$ wähle ein $y \in S_n$ mit $d(x,y) < \varepsilon_n$. Dann gilt:

$$d\big(F(x),F(y)\big) \le \widetilde{L}d(x,y) < \widetilde{L}\varepsilon_n = \varepsilon\widetilde{L}^{2-n} \le \varepsilon \quad \text{für} \quad n \ge 2,$$

$$d\big(F^2(x),F^2(y)\big) \le \widetilde{L}d\big(F(x),F(y)\big) < \widetilde{L}^2\varepsilon_n = \varepsilon\widetilde{L}^{3-n} \le \varepsilon \quad \text{für} \quad n \ge 3,$$

usw.

$$d\big(F^{n-1}(x),F^{n-1}(y)\big) < \widetilde{L}^{n-1}\varepsilon_n = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{B}}$

Aus der Behauptung folgt:

$$\underbrace{r(n,\varepsilon)}_{\substack{\text{kleinste Anzahl von Elementen}\\ \text{in einem } (n,\varepsilon)-\text{Erzeuger}}} \le \underbrace{m(\varepsilon_n)}_{\substack{\text{kleinste Anzahl von Elementen}\\ \text{in einer Überdeckung mit } \varepsilon_n\text{-Kugeln}}}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\log r(n,\varepsilon)}{n} &\le \frac{\log m(\varepsilon_n)}{n} \\
&= \frac{\log m(\varepsilon_n)}{\log(1/\varepsilon_n)}\,\frac{\log(1/\varepsilon_n)}{n} \\
&\overset{\varepsilon_n=\varepsilon\widetilde{L}^{-(n-1)}}{=} \frac{\log m(\varepsilon_n)}{\log(1/\varepsilon_n)}\,\frac{(n-1)\log\widetilde{L}-\log\varepsilon}{n} \\
&\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{\log r(n,\varepsilon)}{n} \le \limsup_{\tilde{\varepsilon}\to 0}\frac{\log m(\tilde{\varepsilon})}{\log(1/\tilde{\varepsilon})}\cdot\log\widetilde{L}.
\end{aligned}$$

□

Nun beweisen wir die Bowensche Formel (Satz 3.10).

LEMMA 3.13. *Sei $\mathcal{C} := \{C_1 \dots C_p\}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
N_n(\mathcal{C},F) &:= N\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \ge r\big(n,\operatorname{diam}(\mathcal{C})\big), \\
\textit{wobei } \operatorname{diam}(\mathcal{C}) &:= \max_{j\in\{1\dots p\}} \operatorname{diam}(C_j).
\end{aligned}$$

BEWEIS. Die Überdeckung $\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{C})$ besteht aus den Mengen

$$\bigcap_{j=0}^{n-1} F^{-j}(C_{k_j}) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} k_j \in \{1\dots p\} \\ j \in \{0,1\dots n-1\} \end{array}$$

Aus jeder nichtleeren Menge dieses Systems wähle einen Punkt. Sei S die Menge dieser Punkte. S ist ein (n,ε)-Erzeuger mit $\varepsilon := \operatorname{diam}(\mathcal{C})$ (siehe Beweis von Lemma 3.9). Somit gilt $N_n(\mathcal{C},F) \ge r\big(n,\operatorname{diam}(\mathcal{C})\big)$. □

LEMMA 3.14. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\mathcal{D}_{2\varepsilon}$ die Überdeckung mit allen offenen Kugeln vom Radius 2ε. Dann gilt*

$$N_n(\mathcal{D}_{2\varepsilon}, F) \leq r(n, \varepsilon).$$

BEWEIS. Sei $S := \{x_1 \dots x_k\}$ ein (n, ε)-Erzeuger mit $k := r(n, \varepsilon)$.

BEHAUPTUNG. Die Mengen

$$\bigcap_{j=0}^{n-1} F^{-j}\Big(B_{2\varepsilon}(F^j(x_i))\Big),\ i = 1 \dots k.$$

überdecken X.

BEWEIS. Da $\{x_1 \dots x_k\}$ ein (n, ε)-Erzeuger ist, ist $\{B_{2\varepsilon}(F^j(x_i))\}_{i=1\dots k}$ eine Überdeckung von $F^j(X)$ für alle $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Angenommen, es gäbe ein $y \in X$ mit

$$y \notin \bigcap_{j=0}^{n-1} F^{-j}\Big(B_{2\varepsilon}(F^j(x_i))\Big)$$

für alle $i \in \{1 \dots k\}$. Dann gibt es für jedes $i \in \{1 \dots k\}$ ein $j(i) \in \{0, \dots, n-1\}$ so, dass

$$F^{j(i)}(y) \notin B_{2\varepsilon}\left(F^{j(i)}(x_i)\right),$$

d.h.

$$\max_{j \in \{1, \dots, n-1\}} d(F^j(y), F^j(x_i)) \geq 2\varepsilon$$

für alle $i \in \{1 \dots k\}$. Also ist $\{x_1 \dots x_k\}$ kein (n, ε)-Erzeuger. Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Für jedes $i \in \{1 \dots k\}$ ist $B_{2\varepsilon}(F^j(x_i))$ in $\mathcal{D}_{2\varepsilon}$ enthalten

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{j=0}^{n-1} F^{-j}(B_{2\varepsilon}(F^j(x_i))) \in \bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{D}_{2\varepsilon})\ \forall\, i \in \{1 \dots k\}$$

$$\Rightarrow \quad N_n(\mathcal{D}_{2\varepsilon}, F) := N\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} F^{-m}(\mathcal{D}_{2\varepsilon})\Big) \leq k = r(n, \varepsilon).$$

□

KOROLLAR 3.15 (von Lemmata 3.13 und 3.14). *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\mathcal{D}_{2\varepsilon}$ die Überdeckung mit allen offenen Kugeln vom Radius 2ε. Sei $\mathcal{C}_\varepsilon$ eine endliche Überdeckung mit offenen Kugeln vom Radius $\varepsilon/2$. Dann gilt*

$$N_n(\mathcal{D}_{2\varepsilon}, F) \leq r(n, \varepsilon) \leq N_n(\mathcal{C}_\varepsilon, F)$$

$$\Rightarrow \quad H(\mathcal{D}_{2\varepsilon}, F) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon)}{n} \leq H(\mathcal{C}_\varepsilon, F).$$

BEWEIS. Mit Lemma 3.13 folgt aus $\operatorname{diam}(\mathcal{C}_\varepsilon) = \varepsilon$, dass $N_n(\mathcal{C}_\varepsilon, F) \geq r(n, \varepsilon)$. Nach Lemma 3.14 ist $N_n(\mathcal{D}_{2\varepsilon}, F) \leq r(n, \varepsilon)$.

□

LEMMA 3.16. *Sei $\mathcal{C}_n$ eine beliebige Folge offener Überdeckungen von X mit* $\operatorname{diam}\mathcal{C}_n \to 0$. *Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) = h_{\text{top}}(F).$$

Für den Beweis von Lemma 3.16 brauchen wir ein klassisches Ergebnis:

LEMMA 3.17 (Überdeckungslemma von Lebesgue). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Es gibt eine Zahl $\delta > 0$ so, dass für jede Kugel $B_\delta(x)$ eine Obermenge $C \in \mathcal{C}$ existiert, d.h. $B_\delta(x) \subset C$. Die Zahl δ heißt* Lebesgue-Zahl *von $\mathcal{C}$.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in\Lambda}$. Angenommen, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gäbe es eine Kugel $B_{1/n}(x_n)$ mit $B_{1/n}(x_n) \not\subset C_i$ für alle $i \in \Lambda$. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $\overline{x} \in X$. Dann ist $\overline{x} \in C_{i_0}$ für ein $i_0 \in \Lambda$. Setze $a := d(\overline{x}, X \setminus C_{i_0}) > 0$. Wähle n_k so groß, dass $n_k > \frac{2}{a}$ und $d(x_{n_k}, \overline{x}) < \frac{a}{2}$. Sei $y \in B_{1/n_k}(x_{n_k})$ beliebig

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad d(\overline{x}, y) \le d(\overline{x}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{a}{2} + \frac{1}{n_k} < a \\
&\Rightarrow \quad B_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset C_{i_0}.
\end{aligned}$$

Widerspruch! □

Wir erinnern uns daran, dass in einem metrischen Raum braucht der Durchmesser einer Kugel vom Radius $r > 0$ nicht $2r$ zu sein, sondern erfüllt die Ungleichung $\operatorname{diam}(B_r(x)) \ge r$. Zum Beispiel im metrischen Raum $[0, 1]$ mit der Euklidischen Metrik gilt $\operatorname{diam}(B_{1/2}(0)) = 1/2$.

BEWEIS VON LEMMA 3.16. **(1)** Sei zunächst $h_{\text{top}}(F) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\mathcal{D}$ eine offene Überdeckung mit $H(\mathcal{D}, F) > h_{\text{top}}(F) - \varepsilon$. Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl der Überdeckung $\mathcal{D}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\operatorname{diam}(\mathcal{C}_n) < \delta$ für alle $n \ge N$.

BEHAUPTUNG. Für alle $n \ge N$ ist $\mathcal{C}_n$ feiner als $\mathcal{D}$.

BEWEIS. Sei $C \in \mathcal{C}_n$ beliebig. Wegen $\operatorname{diam}(\mathcal{C}_n) < \delta$ gibt es eine Kugel $B_\delta(x)$ mit $C \subset B_\delta(x)$. Es gibt ein $D \in \mathcal{D}$ so, dass $B_\delta(x) \subset D$. Folglich ist $C \subset D$. $\boxed{\text{B}}$

Nach Behauptung ist $H(\mathcal{D}, F) \le H(\mathcal{C}_n, F)$ für alle $n \ge N$. Wegen $H(\mathcal{D}, F) > h_{\text{top}}(F) - \varepsilon$ ist $H(\mathcal{C}_n, F) > h_{\text{top}}(F) - \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Andererseits gilt

$$H(\mathcal{C}_n, F) \le h_{\text{top}} := \sup\{H(\mathcal{C}, F) \,|\, \mathcal{C} \text{ endliche offene Überdeckung}\}.$$

Also ist für alle $n \ge N$

$$\begin{aligned}
& h_{\text{top}}(F) \ge H(\mathcal{C}_n, F) > h_{\text{top}}(F) - \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & h_{\text{top}}(F) \ge \limsup_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) \ge \liminf_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) \ge h_{\text{top}}(F) - \varepsilon \\
\overset{\varepsilon \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \quad & \lim_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) = h_{\text{top}}(F).
\end{aligned}$$

(2) Nun sei $h_{\text{top}}(F) = \infty$. Sei $a > 0$ beliebig. Sei $\mathcal{D}$ eine offene Überdeckung mit $H(\mathcal{D}, F) > a$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ so dass } H(\mathcal{C}_n, F) \geq H(\mathcal{D}, F) > a \quad \forall n \geq N \\
&\Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) \geq a \\
&\overset{a \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} H(\mathcal{C}_n, F) = \infty.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 3.10. Nach Korollar 3.15 mit $\varepsilon_k = 1/k$ gilt

$$\begin{aligned}
& H(\mathcal{D}_{2/k}, F) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n, 1/k)}{n} \leq H(\mathcal{C}_{1/k}, F) \\
\overset{\text{Lemma 3.16}}{\Rightarrow} \quad & \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n, 1/k)}{n} = h_{\text{top}}(F).
\end{aligned}$$

Analog gilt für lim inf. □

3.3. Entropie von expandierenden Abbildungen

Definition 3.18. *Eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{C}$ von X heißt* F-Erzeuger, *wenn die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{A_n})$ für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_n \in \mathcal{C}$ höchstens einen Punkt $x \in X$ enthält.*

Eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{C}$ von X heißt schwacher F-Erzeuger, *wenn die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(A_n)$ für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_n \in \mathcal{C}$ höchstens einen Punkt $x \in X$ enthält.*

Lemma 3.19. *Die Abbildung $F : X \to X$ besitzt genau dann einen F-Erzeuger, wenn sie einen schwachen F-Erzeuger besitzt.*

Beweis. (1) Jeder F-Erzeuger ist ein schwacher F-Erzeuger.
(2) Sei $\mathcal{C} := \{C_1 \dots C_p\}$ ein schwacher F-Erzeuger, d.h. die Menge

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(A_n),\ A_n \in \mathcal{C}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

enthält höchstens einen Punkt. Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl für die Überdeckung $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{D} = \{D_1 \dots D_q\}$ eine endliche offene Überdeckung mit $\operatorname{diam}(\overline{D_i}) < \delta$. Jede Menge $\overline{D_i}$ ist in einer offenen Kugel vom Radius δ enthalten. Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $B_n \in \mathcal{D}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, eine beliebige Folge. Nach dem Überdeckungslemma von Lebesgue gilt:

$$\begin{aligned}
& \forall\, n \in \mathbb{N}_0\, \exists\, A_n \in \mathcal{C} \text{ mit } B_n \subset A_n \\
\Rightarrow\quad & F^{-n}(\overline{B_n}) \subset F^{-n}(A_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \\
\Rightarrow\quad & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{B_n}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(A_n) \\
\Rightarrow\quad & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{B_n}) \text{ enthält höchstens einen Punkt}
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{D}$ ein F-Erzeuger. □

DEFINITION 3.20. *Eine Abbildung* $F : X \to X$ *heißt* expandierend, *wenn es ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für beliebige* $x, y \in X$, $x \neq y$, *ein* $n = n(x, y) \in \mathbb{N}_0$ *existiert mit* $d(F^n(x), F^n(y)) \geq \delta$.

BEISPIEL. *Seien* A *ein (endliches oder unendliches) Alphabet,* $\Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0}$, σ *die Shiftabbildung. Mit*

$$d(s,t) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{d_{\text{disk}}(s_j, t_j)}{2^j}, \qquad d_{\text{disk}}(s_j, t_j) := \begin{cases} 0, & s_j = t_j \\ 1, & s_j \neq t_j \end{cases}$$

ist (Σ_A, d) *ein metrischer Raum. Sei* $s \neq t$. *Dann existiert ein* $n \in \mathbb{N}_0$, *so dass* $s_n \neq t_n$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad d\big(\sigma^n(s), \sigma^n(t)\big) \geq d_{\text{disk}}(s_n, t_n) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \sigma \textit{ ist expandierend mit } \delta = 1. \end{aligned}$$

SATZ 3.21. *Eine Abbildung* $F : X \to X$ *ist genau dann expandierend, wenn sie einen* F*-Erzeuger besitzt.*

BEWEIS. (1) Sei F expandierend mit der Konstante $\delta > 0$. Sei $\mathcal{C}$ eine endliche offene Überdeckung von X mit offenen Kugeln vom Radius $\delta/4$. Angenommen, $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{A}_n)$ mit $A_n \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad F^n(x) \in \overline{A}_n,\ F^n(y) \in \overline{A}_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \\ &\Rightarrow \quad d\big(F^n(x), F^n(y)\big) \leq \delta/2 \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Da F expandierend mit der Konstante δ ist, gilt $x = y$. Also ist $\mathcal{C}$ ein F-Erzeuger.

(2) Sei $\mathcal{C}$ ein F-Erzeuger. Sei $\delta > 0$ die Lebesgue-Zahl von $\mathcal{C}$. Angenommen, es gäbe $x, y \in X$, so dass $d\big(F^n(x), F^n(y)\big) < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, A_n \in \mathcal{C} \text{ mit } F^n(x), F^n(y) \in A_n \\ &\Rightarrow \quad x, y \in F^{-n}(A_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \quad x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-n}(A_n) \Rightarrow x = y \Rightarrow F \text{ ist expandierend.} \end{aligned}$$

$\square$

KOROLLAR 3.22. *Seien dynamische Systeme* (X_1, F_1) *und* (X_2, F_2) *topologisch konjugiert. Die Abbildung* $F_1 : X_1 \to X_1$ *ist genau dann expandierend, wenn* $F_2 : X_2 \to X_2$ *expandierend ist.*

BEWEIS. Es gibt einen Homöomorphismus $\phi : X_1 \to X_2$, so dass $\phi \circ F_1 = F_2 \circ \phi$.

BEHAUPTUNG 1. $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$.

BEWEIS. Allgemein gilt $\phi(A \cap B) \subset \phi(A) \cap \phi(B)$. Da ϕ eine Bijektion ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion. $\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für alle $A \subset X_1$ gilt $F_2^{-n}(\phi(A)) = \phi(F_1^{-n}(A))$.

BEWEIS. Man rechne nach

$$\begin{aligned} F_2^{-n}\big(\phi(A)\big) &= \{x \in X_2 \mid F_2^n(x) \in \phi(A)\} \\ &= \{x \in X_2 \mid \underbrace{\phi^{-1} \circ F_2^n}_{=F_1^n \circ \phi^{-1}}(x) \in A\} \\ &= \{x \in X_2 \mid \phi^{-1}(x) \in F_1^{-n}(A)\} \\ &= \{x \in X_2 \mid x \in \phi(F_1^{-n}(A))\} \\ &= \phi(F_1^{-n}(A)). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B2}}$

Eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ist ein F_2-Erzeuger genau dann, wenn $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} F_2^{-n}(A_n)$, $A_n \in \mathcal{C}$, höchstens einen Punkt enthält

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F_2^{-n}\Big(\phi\big(\phi^{-1}(A_n)\big)\Big) \overset{\text{Behauptung 2}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \phi\big(F_1^{-n}(\phi^{-1}(A_n)\big) \\ \overset{\text{Behauptung 1}}{=} \quad & \phi\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F_1^{-n}\big(\phi^{-1}(A_n)\big)\Big) \text{ enthält höchstens einen Punkt} \\ \Leftrightarrow \quad & \phi^{-1}(\mathcal{C}) \text{ ist ein } F_1\text{-Erzeuger.} \end{aligned}$$

Das Korollar ist bewiesen. □

KOROLLAR 3.23. *Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Abbildung $F : X \to X$ ist genau dann expandierend, wenn F^k expandierend ist.*

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{C}$ ein F-Erzeuger, d.h. $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{A_n})$ enthält höchstens einen Punkt für jede Mengenfolge $A_n \in \mathcal{C}$. Wegen

$$F^{-kn}\Big(\bigvee_{m=0}^{k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) = \bigvee_{m=0}^{k-1} F^{-(kn+m)}(\mathcal{C})$$

enthält die Menge

$$\begin{aligned} &\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-nk}(\overline{B_n}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{m=0}^{k-1} F^{-(kn+m)}(\overline{A_{n,m}}), \\ &\text{mit} \qquad B_n \in \bigvee_{m=0}^{k-1} F^{-m}(\mathcal{C}),\ A_{n,m} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

höchstens einen Punkt. Also ist $\bigvee\limits_{m=0}^{k-1} F^{-m}(\mathcal{C})$ ein F^k-Erzeuger.

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{C}$ ein F^k-Erzeuger. Dann für jede Folge $A_n \in \mathcal{C}$ besteht die Menge $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-nk}(\overline{A_n})$ aus höchstens einem Punkt. Also enthält die Menge $\bigcap F^{-n}(\overline{A_n})$ höchstens einen Punkt. □

Sei A ein endliches Alphabet mit $|A| = k$, $\Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0}$, σ die Shiftabbildung. O.B.d.A. sei $A = \{0, \ldots, k-1\}$. Sei $C_i := \{s \in \Sigma_A \,|\, s_0 = i\}$, $i = 0, \ldots, k-1$. Jedes C_i ist offen. Es gilt

$$C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1} = \Sigma_A.$$

Also ist $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{k-1}\}$ eine endliche offene Überdeckung von X.

Behauptung. $\mathcal{C}$ ist ein σ-Erzeuger.

Beweis. Zur beliebigen Mengenfolge $A_n \in \mathcal{C}$ existiert eine Folge $i_n \in \{0, \ldots, k-1\}$, so dass $A_n = C_{i_n}$. Sei

$$s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \sigma^{-n}(A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \sigma^{-n}(C_{i_n})$$

beliebig. Dann gilt

$$s \in C_{i_0}, \sigma(s) \in C_{i_1}, \ldots, \sigma^n(s) \in C_{i_n}, \ldots.$$

Also ist $s = (i_0, i_1, \ldots)$. Somit besteht die Menge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \sigma^{-1}(A_n)$ genau aus einem Element. $\boxed{\text{B}}$

Wir wollen nun die Entropie der Shiftabbildung berechnen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 3.24. *Sei $\mathcal{C}$ ein F-Erzeuger. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$\operatorname{diam}\Big(\bigvee_{n=0}^{N} F^{-n}(\mathcal{C})\Big) < \varepsilon.$$

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $\exists\, x_j, y_j \in X$ mit $d(x_j, y_j) \geq \varepsilon$,

(2) $\exists\, C_{j,i} \in \mathcal{C}$, $i \in \{0, \ldots, j\}$ mit $x_j, y_j \in \bigcap_{i=0}^{j} F^{-i}(C_{j,i})$.

Seien $x_{j_k} \to x$, $y_{j_k} \to y$ konvergente Teilfolgen (X ist ein kompakter metrischer Raum!). Wegen $d(x_{j_k}, y_{j_k}) \geq \varepsilon$ ist $d(x, y) \geq \varepsilon$. Also ist $x \neq y$. Betrachte die Mengen $C_{j_k,0}$. Da die Überdeckung $\mathcal{C}$ endlich ist, gibt es ein $A_0 \in \mathcal{C}$ mit $C_{j_k,0} = A_0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $x_{j_k}, y_{j_k} \in A_0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Also ist $x, y \in \overline{A_0}$. Betrachte die Mengen $C_{j_k,1}$. Da die Überdeckung $\mathcal{C}$ endlich ist, gibt es ein $A_1 \in \mathcal{C}$ mit $C_{j_k,1} = A_1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $F(x_{jk}), F(y_{jk}) \in A_1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Also ist $F(x), F(y) \in \overline{A_1}$. Also ist $x, y \in F^{-1}(\overline{A_1})$.

Auf diesem Weg erhalten wir eine Mengenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $A_n \in \mathcal{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} F^{-n}(\overline{A_n}),\; x \neq y.$$

Somit ist $\mathcal{C}$ kein F-Erzeuger. Widerspruch! $\square$

SATZ 3.25. *Sei $F : X \to X$ eine expandierende Abbildung. Ist $\mathcal{C}$ ein F-Erzeuger, so gilt*

$$h_{\text{top}}(F) = H(\mathcal{C}, F) \overset{\text{Definition 3.4}}{:=} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{C}, F)}{n}.$$

An dieser Stelle erinnern wir uns an Definition 3.5: $h_{\text{top}}(F) := \sup_{\mathcal{C}} H(\mathcal{C}, F)$. Also wird das Supremum angenommen und ist $H(\mathcal{C}, F)$ für alle F-Erzeuger $\mathcal{C}$ gleich.

BEWEIS. Sei $\mathcal{D}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl für $\mathcal{D}$. Nach Lemma 3.24 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\operatorname{diam}\Big(\bigvee_{m=0}^{n} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) < \delta.$$

Damit ist die Überdeckung $\bigvee_{m=0}^{n} F^{-m}(\mathcal{C})$ <u>feiner</u> als $\mathcal{D}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{D}, F) &\leq H\Big(\bigvee_{m=0}^{n} F^{-m}(\mathcal{C}), F\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N_k\Big(\bigvee_{m=0}^{n} F^{-m}(\mathcal{C}), F\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1} F^{-i}\Big(\bigvee_{m=0}^{n} F^{-m}(\mathcal{C})\Big)\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N\Big(\bigvee_{m=0}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{n+k-1}{k} \frac{1}{n+k-1} \log N\Big(\bigvee_{m=0}^{n+k-1} F^{-m}(\mathcal{C})\Big) \\
&= H(\mathcal{C}, F).
\end{aligned}$$

Also ist $H(\mathcal{D}, F) \leq H(\mathcal{C}, F)$ für beliebige offene Überdeckung $\mathcal{D}$. Daraus folgt

$$h_{\text{top}}(F) := \sup_{\mathcal{D}} H(\mathcal{D}, F) = H(\mathcal{C}, F)$$

□

BEISPIEL. *Sei A ein endliches Alphabet, $A = \{0, k-1\}$, $\Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0}$, σ die Shiftabbildung. Wir haben bereits gesehen, dass die Überdeckung*

$$\mathcal{C} = \{C_i \,|\, i = 0, \ldots, k-1\}$$

mit

$$C_i = \{s \in \Sigma_A \,|\, s_0 = i\}$$

ein σ-Erzeuger ist.

Sei $t \in \Sigma_A$ mit $\sigma(t) \in C_i$. Dann ist $t_1 = i$. Also gilt

$$\sigma^{-1}(C_i) = \{s \in \Sigma_A \,|\, s_1 = i\}.$$

Analog gilt

$$\sigma^{-m}(C_i) = \{s \in \Sigma_A \,|\, s_m = i\}.$$

Folglich besteht das Mengensystem $\bigvee_{m=0}^{n-1} \sigma^{-m}(\mathcal{C})$ *aus Durchschnitten*

$$\bigcap_{m=0}^{n-1} \sigma^{-m}(C_{i_m}) = \{s \in \Sigma_A \mid s_0 = i_0, s_1 = i_1, \ldots, s_{n-1} = i_{n-1}\}$$

für gewiße Folgen $i_m \in \{0, \ldots, k-1\}$, $m = 0, \ldots, n-1$. *Somit gilt*

$$N\Big(\bigvee_{m=0}^{n-1} \sigma^{-m}(\mathcal{C})\Big) = \Big|\bigvee_{m=0}^{n-1} \sigma^{-m}(\mathcal{C})\Big| = k^n$$
$$\Rightarrow H(\mathcal{C}, \sigma) = \log k \Rightarrow h_{\text{top}}(\sigma) = \log k.$$

Im darauf folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass die topologische Entropie unter topologischer Konjugation invariant bleibt.

3.4. Entropie und topologische Konjugation

Satz 3.26. *Seien* X_1, X_2 *kompakte metrische Räume,* $F_i : X_i \to X_i$, $i = 1, 2$, *stetig.*

(a) *Sei* (X_2, F_2) *ein Faktor von* (X_1, F_1) *(*(X_1, F_1) *topologisch semikonjugiert zu* (X_2, F_2)*), d.h. es gibt eine stetige surjektive Abbildung* $\phi : X_1 \to X_2$ *mit* $\phi \circ F_1 = F_2 \circ \phi$. *Dann gilt*
$$h_{\text{top}}(F_1) \geq h_{\text{top}}(F_2).$$
(b) *Seien* (X_1, F_1) *und* (X_2, F_2) *topologisch konjugiert, d.h. es gibt einen Homöomorphismus* $\phi : X_1 \to X_2$ *mit* $\phi \circ F_1 = F_2 \circ \phi_1$. *Dann gilt*
$$h_{\text{top}}(F_1) = h_{\text{top}}(F_2).$$

Beweis. (b) folgt aus (a).

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine endliche offene Überdeckung von X_2. Dann gilt

$$H(\mathcal{C}, F_2) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N\Big(\underbrace{\bigvee_{i=0}^{n-1} F_2^{-i}(\mathcal{C})}_{=\mathcal{C}^n}\Big),$$

wobei N die kleinste Anzahl von Mengen ist, die X_2 überdecken.

Behauptung 1.: $N\big(\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)\big) = N(\mathcal{C}^n)$.

Beweis. Die Abbildung ϕ ist stetig. Daher ist $\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)$ eine offene Überdeckung von X_1 und es gilt $N\big(\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)\big) \leq N(\mathcal{C}^n)$.

Sei $\mathcal{D}$ eine Überdeckung von X_1 mit Mengen aus $\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)$ mit der kleinsten Anzahl von Elementen. Da ϕ surjektiv ist, ist $\phi(\mathcal{D})$ eine Überdeckung von X_2 mit Mengen aus $\mathcal{C}^n$. Folglich gilt

$$N(\mathcal{C}^n) = N(\phi(\mathcal{D})) \leq N(\mathcal{D}) = N(\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)).$$

B1

Wegen $\phi^{-1}(A \cap B) = \phi^{-1}(A) \cap \phi^{-1}(B)$ und Behauptung 1 gilt dann:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{C}, F_2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\big(\phi^{-1}(\mathcal{C}^n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-1}\big(F_2^{-i}(\mathcal{C})\big)\Big). \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 2. $\phi^{-1}\big(F_2^{-1}(A)\big) = F_1^{-1}(\phi^{-1}(A))$ für alle $A \subset X_2$.

BEWEIS. Es gilt $\phi \circ F_1 = F_2 \circ \phi$ für $\phi : X_1 \to X_2$. Betrachte

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\big(F_2^{-1}(A)\big) &= \{x \in X_1 \mid \phi(x) \in F_2^{-1}(A)\} \\ &= \{x \in X_1 \mid F_2\big(\phi(x)\big) \in A\} \\ &= \{x \in X_1 \mid \phi\big(F_1(x)\big) \in A\} \\ &= \{x \in X_1 \mid F_1(x) \in \phi^{-1}(A)\} \\ &= F_1^{-1}\big(\phi^{-1}(A)\big). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B2}}$

Aus Behauptung 2 folgt:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\big(F_2^{-i}(A)\big) &= F_1^{-1}\Big(\phi^{-1}\big(F_2^{-(i-1)}(A)\big)\Big) \\ &= F_1^{-2}\Big(\phi^{-1}\big(F_2^{-(i-2)}(A)\big)\Big) = \cdots = F_1^{-i}\big(\phi^{-1}(A)\big). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} H(\mathcal{C}, F_2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} F_1^{-i}\big(\phi^{-1}(\mathcal{C})\big)\Big) \\ &= H\big(\phi^{-1}(\mathcal{C}), F_1\big). \end{aligned}$$

Somit ehalten wir:

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(F_2) &= \sup_{\substack{\text{endliche offene} \\ \text{Überdeckungen} \\ \mathcal{C} \text{ von } X_2}} H(\mathcal{C}, F_2) \\ &= \sup_{\substack{\text{endliche offene} \\ \text{Überdeckungen} \\ \mathcal{C} \text{ von } X_2}} H(\phi^{-1}(\mathcal{C}), F_1) \\ &\le \sup_{\substack{\text{endliche offene} \\ \text{Überdeckungen} \\ \mathcal{D} \text{ von } X_1}} H(\mathcal{C}, F_1) \\ &= h_{\text{top}}(F_1). \end{aligned}$$

□

BEISPIELE. (1) *Die logistische Abbildung*

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x) \textit{ mit } \mu = 4$$

und die Zeltabbildung

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

sind topologisch konjugiert,

$$\phi\big(F_4(x)\big) = T_2\big(\phi(x)\big) \; \forall\, x \in [0,1]$$

mit

$$\phi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) \qquad \textit{(Ulam - von Neumann).}$$

Folglich ist $h_{\text{top}}(F_4) = h_{\text{top}}(T_2)$. *Wir haben bereits gezeigt, dass* $h_{\text{top}}(T_2) \leq \log 2$.

(2) *Die Winkelverdoppelung* $(\mathbb{S}, T)$ *mit* $T(\Theta) = 2\Theta \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ *ist topologisch semikonjugiert zum dynamischen System* $\big([0,1], F_4\big)$ *(*$\big([0,1], F_4\big)$ *ist ein Faktor von* $(\mathbb{S}, T)$*), d.h.*

$$\phi(T(\Theta)) = F_4(\phi(\Theta)), \; \phi \in [0, 2\pi), \; \textit{mit } \phi(\Theta) = \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Folglich ist $h_{\text{top}}(T) \geq h_{\text{top}}(F_4)$.

(3) *Der Bernoulli-Shift* $(\Sigma_{\{0,1\}}, \sigma)$ *ist topologisch semikonjugiert zur Winkelverdopplung* $(\mathbb{S}, T)$*, d.h.*

$$\phi(\sigma(s)) = T(\phi(s))$$

mit

$$\phi(s) = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} s_k.$$

Folglich ist

$$\underbrace{h_{\text{top}}(\sigma)}_{=\log 2} \geq h_{\text{top}}(T).$$

Zusammenfassung:

$$h_{\text{top}}(F_4) = h_{\text{top}}(T_2) \leq h_{\text{top}}(T) \leq \log 2.$$

3.5. Eine untere Schranke für die topologische Entropie

LEMMA 3.27. *Sei* $F : X \to X$ *stetig. Dann gilt*

$$h_{\text{top}}(F^p) = p h_{\text{top}}(F) \quad \textit{für alle} \quad p \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. Der Beweis stützt sich auf die Bowensche Formel:

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(X, F) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon, F)}{n} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon, F)}{n}, \end{aligned}$$

wobei

$$r(n, \varepsilon, F) := \min\{|S| \mid S \text{ ist } (n, \varepsilon)\text{-Erzeuger für } F\},$$

d.h. zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in S$, so dass $d(F^j(x), F^i(y)) \leq \varepsilon$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

BEHAUPTUNG. $r(n, \varepsilon, F^p) \leq r(np, \varepsilon, F)$.

BEWEIS. Sei $S \subset X$ ein endlicher (np, ε)-Erzeuger für F mit minimaler Anzahl von Elementen. Dann ist S auch ein (n, ε)-Erzeuger für F^p. $\square$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon,F^p) &\leq \frac{p}{np}\log r(np,\varepsilon,F)\\ \overset{\text{Bowen}}{\Rightarrow} h_{\text{top}}(F^p) &\leq p h_{\text{top}}(F)\end{aligned}$$

Da F eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes, sind die Abbildungen $F^j : X \to X$, $j \in \{0,1,\dots,p-1\}$, gleichmäßg stetig. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,\varepsilon)$, so dass

$$d\big(F^j(x), F^j(y)\big) < \varepsilon \;\forall j \in \{0,\dots,p-1\} \tag{3.1}$$

und für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$.

Sei S ein (n,δ)-Erzeuger für F^p mit minimaler Anzahl von Elementen, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in S$, so dass

$$d\big(F^{jp}(x), F^{jp}(y)\big) \leq \delta \;\forall j \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Nach (3.1) existiert zu jedem $x \in X$ ein $y \in S$, so dass

$$d(\underbrace{F^j(x)}_{=F^m(F^{kp}(x))}, \underbrace{F^j(y)}_{=F^m(F^{kp}(y))}) < \varepsilon \;\forall j \in \{0,1,\dots,pn-1\}.$$

(Hier wird zu jedem $j \in \{0,1,\dots,pn-1\}$ geeignete Zahlen $m \in \{0,\dots,p-1\}$ und $k \in \{0,\dots,n-1\}$ gewäht!) Also ist S ein (np,ε)-Erzeuger für F und es gilt

$$r(np,\varepsilon,F) \leq r(n,\delta,F^p) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{np}\log r(np,\varepsilon,F) \leq \frac{1}{n}\log r(n,\delta,F^p).$$

Da $\delta < \varepsilon$ ist, erhält man mit der Bowenschen Formel $p h_{\text{top}}(F) \leq h_{\text{top}}(F^p)$. $\square$

SATZ 3.28. *Sei $F : I \to I$ eine Intervallabbildung. Seien $J_1 \dots J_n \subset I$ disjunkte kompakte Intervalle mit nicht leeren Inneren, so dass*

$$J_1 \cup \dots \cup J_n \subset F(J_i) \quad \textit{für alle} \quad i = 1\dots n,$$

d.h. $J_i \to J_j$, für alle $i,j = 1\dots n$. Dann gilt $h_{\text{top}}(F) \geq \log n$.

BEWEIS. Seien $C_1,\dots,C_n \subset I$ disjunkte offene Intervalle mit $J_i \subset C_i$ für alle $i = 1,\dots,n$. Sei

$$C_{n+1} = I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} J_i.$$

Dann ist $\mathcal{C} := \{C_1,\dots,C_n,C_{n+1}\}$ eine offene Überdeckung von I. Es gilt

$$C_{n+1} \cap J_i = \varnothing \quad \text{für alle} \quad i \in \{1\dots n\}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, $m \geq 2$. Für jedes m-Tupel $(i_0 \dots i_{m-1}) \in \{1,\dots,n\}^m$ betrachte

$$J_{i_0\dots i_{m-1}} := \{x \in I \mid F^k(x) \in J_{i_k},\, 0 \leq k \leq m-1\}.$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt.

BEHAUPTUNG. $J_{i_0\dots i_{m-1}} \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. $J_{i_0} = \{x \in I \mid x \in J_{i_0}\} \neq \varnothing$ ist klar.

$$J_{i_0 i_1} = \{x \in I \mid x \in J_{i_0}, F(x) \in J_{i_1}\} \neq \varnothing$$

wegen $J_{i_1} \subset F(Ji_0)$.

$$J_{i_0 i_1 i_2} = \{x \in I \mid x \in J_{i_0}, F(x) \in J_{i_1}, F^2(x) \in J_{i_2}\} \neq \varnothing$$

wegen $J_{i_1} \subset F(J_{i_0})$ und $J_{i_2} \subset F(J_{i_1})$, usw. $\boxed{\text{B}}$

Es gilt

$$\begin{aligned} J_{i_0 \ldots i_{m-1}} &\subset C_{i_0} \cap F^{-1}(C_{i_1}) \cap \cdots \cap F^{-(m-1)}(C_{i_{m-1}}) \\ &\in \mathcal{C} \vee F^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee F^{-(m-1)}(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Es gibt insgesamt n^m verschiedene Mengen $J_{i_0 \ldots i_{m-1}}$, sie sind paarweise disjunkt. Jede Menge $J_{i_0 \ldots m-1}$ ist genau in einem Element der Überdeckung $\mathcal{C} \vee F^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee F^{-(m-1)}(\mathcal{C})$ enthalten. Folglich gilt

$$N_m(\mathcal{C}, F) := N\big(\mathcal{C} \vee F^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee F^{-(m-1)}(\mathcal{C})\big) \geq n^m.$$

Also ist

$$\frac{1}{m} \log N_m(\mathcal{C}, F) \geq \log n \Rightarrow h_{\text{top}}(F) \geq \log n.$$

$\square$

Nun betrachten wir die Anwendung dieses Satzes auf die Zeltabbildung

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die p-te Iteration der Zeltabbildung T_2^p, $p \in \mathbb{N}$, hat 2^p Monotonie-Intervalle $[(k-1)2^{-p}, k2^{-p}]$, $k = 1, \ldots 2^p$. Seien $J_1, \ldots, J_n$, $n = 2^{p-1}$ die Monotonie-Intervalle, wo $T_2^p(x)$ steigt. Diese Intervalle sind disjunkt. Es gilt $T_2^p(J_i) = I = [0,1]$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Folglich ist

$$J_1 \cup \cdots \cup J_n \subset T_2^p(J_i) \quad \text{für alle} \quad i \in \{1 \ldots n\}.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Nach dem Satz gilt

$$\begin{aligned} & h_{\text{top}}(T_2^p) \geq \log n = \log 2^{p-1} = (p-1) \log 2 \\ \Rightarrow\ & h_{\text{top}}(T_2) = \frac{1}{p} h_{\text{top}}(T_2^p) \geq \frac{p-1}{p} \log 2 \\ \overset{p\to\infty}{\Rightarrow}\ & h_{\text{top}}(T_2) \geq \log 2. \end{aligned}$$

Wir haben bereits bewiesen, dass

$$h_{\text{top}}(T_2) \leq \log 2 \Rightarrow h_{\text{top}}(T_2) = \log 2.$$

Folglich ist

$$h_{\text{top}}(F_4) = h_{\text{top}}(T_2) = h_{\text{top}}(\underbrace{\ T\ }_{\substack{\text{Winkel-} \\ \text{verdoppelung}}}) = \log 2.$$

3.6. Positive topologische Entropie und Chaos

SATZ 3.29. *Sei $F : I \to I$ eine Intervallabbildung. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

(a) $P(F) \supsetneq \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$, *wobei $P(F)$ die Menge aller Primperioden von periodischen Punkten ist;*
(b) *Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und zwei disjunkte abgeschlossene Intervalle J_1, J_2 so, dass*

$$J_1 \cup J_2 \subset F^m(J_i),\ i = 1, 2;$$

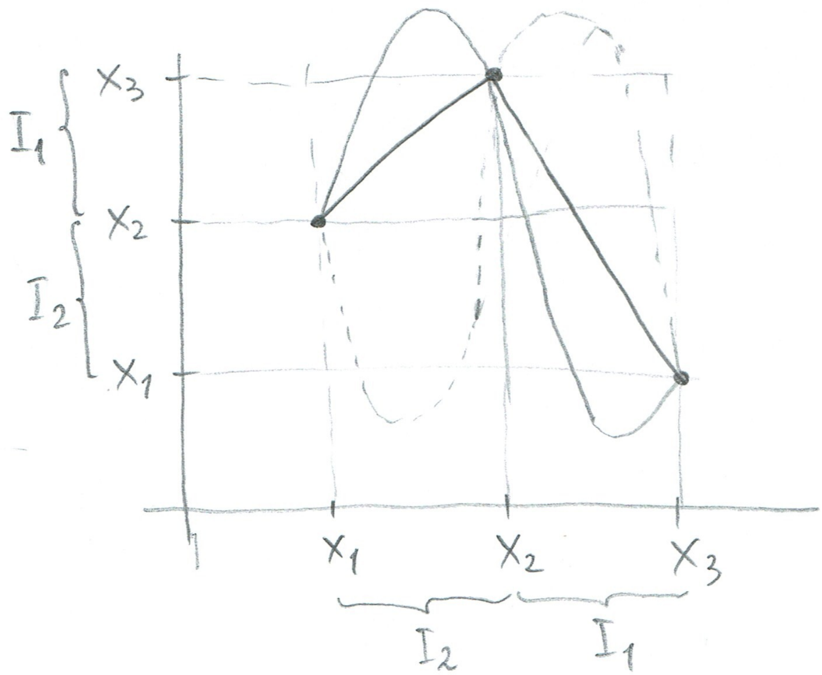
(c) $h_{\text{top}}(F) > 0$.

BEMERKUNGEN. (1) *Aus (a) folgt, dass F chaotisch nach Li-Yorke ist.*
(2) *Es gibt chaotische nach Li-Yorke Abbildungen mit $h_{\text{top}}(F) = 0$.*
(3) *Für kompakte metrische Räume gilt folgendes Resultat: Ist $h_{\text{top}}(F) > 0$, so ist das dynamische System (X, F) chaotisch nach Li-Yorke (Blanchard, Glasner, Kolyada, Maass (2002)).*

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b) Nach dem Satz von Scharkowskij folgt aus (a), dass $2^{n-1}(2m+3) \in P(F)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wieder mit dem Satz von Scharkowskij folgt daraus, dass $3 \cdot 2^n \in P(F)$ ist. Also besitzt die Abbildung $G := F^{2^n}$ einen periodischen Punkt mit Primperiode 3. Sei $\mathscr{O} := \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 < x_2 < x_3$, die periodische Bahn von G. Dann gilt entweder

Fall 1: $G(x_1) = x_2$, $G(x_2) = x_3$, $G(x_3) = x_1$
oder
Fall 2: $G(x_1) = x_3$, $G(x_3) = x_2$, $G(x_2) = x_1$.

Wir betrachten den Fall 1, der Fall 2 ist analog.



Es gilt $G(I_2) \supset I_1$ und $G(I_1) \supset I_1 \cup I_2$.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \text{Sei } d \in (x_2, x_3) \text{ so dass } G(d) = x_2 \Rightarrow G^2(d) = x_3,\\
&(2) \quad G^2([x_1, x_2]) \supset G([x_2, x_3]) \supset [x_2, x_3]\\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \exists\, a \in (x_1, x_2) \text{ so dass } G^2(a) > d,\\
&(3) \quad G^2([a, x_2]) \supset [x_1, d] \Rightarrow \exists\, b \in (a, x_2) \text{ so dass } G^2(b) < a,\\
&(4) \quad G^2([x_2, d]) \supset G([\underbrace{x_2}_{=G(d)}, x_3]) \supset [x_1, d]\\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \exists\, c \in (x_2, d) \text{ so dass } G^2(c) < a.
\end{aligned}
$$

Sei nun $J_1 := [a, b]$, $J_2 := [c, d]$.

$$
\left.
\begin{array}{l}
G^2([a,b]) \supset [a,d] \\
G^2(a) > d \\
G^2(b) < a \\
\\
G^2([c,d]) \supset [a,d] \\
G^2(c) < a \\
G^2(d) = x_3
\end{array}
\right\} \Rightarrow G^2(J_1) \cap G^2(J_2) \supset J_1 \cup J_2.
$$

Somit ist (b) mit $m := 2^{n+1}$ bewiesen.

$(b) \Rightarrow (c)$ Mit Satz 3.28 erhält man

$$
h_{\text{top}}(G^2) = h_{\text{top}}(F^{2^{n+1}}) \geq \log 2 \Rightarrow h_{\text{top}}(F) \geq \frac{\log 2}{2^{n+1}} > 0.
$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Diese Implikation ist als Satz von Misiurevicz bekannt. Dessen Beweis ist ziemlich aufwendig und wird in der Vorlesung nicht behandelt. □

SATZ 3.30. (S. Li ($\neq$ T. Li aus Li-Yorke)(1993)) *Sei $F : I \to I$ eine Intervallabbildung. $h_{\text{top}}(F) > 0$ gilt genau dann, wenn es eine abgeschlossene invariante Teilmenge $X \subset I$ gibt, so dass $F|_X$ chaotisch nach Devaney ist.*

KAPITEL 4

Invariantes Maß

4.1. Borel-Maße

DEFINITION 4.1.

(1) *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^X$ über einer Menge $X \neq \emptyset$ heißt* σ-Algebra, *wenn gilt:*
   (a) $X \in \mathcal{A}$;
   (b) *Aus* $A \in \mathcal{A}$ *folgt* $A^c \in \mathcal{A}$;
   (c) *Sind* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, *dann gilt* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(2) *Sei* $M \subset 2^X$ *ein Mengensystem über einer Menge* $X \neq \emptyset$. *Ein Mengensystem* $\mathcal{A}$ *heißt die* von M erzeugte σ-Algebra, *in Zeichen* $\sigma(M)$, *falls gilt:*
   (a) $\mathcal{A}$ *ist eine* σ-*Algebra,*
   (b) $M \subset \mathcal{A}$,
   (c) *Ist* $\mathcal{A}'$ *eine* σ-*Algebra mit* $M \subset \mathcal{A}'$, *dann gilt* $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. *Kurz:* $\sigma(M)$ *ist die kleinste* σ-*Algebra, die* M *enthält.*

BEMERKUNG. *Der Durchschnitt beliebig vieler* σ-*Algebren ist wieder eine* σ-*Algebra. Somit gibt es zu jedem Mengensystem* M *die kleinste* σ-*Algebra, die* M *enthält.*

DEFINITION 4.2. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Sei* M *die Menge aller offenen Teilmengen von* X. *Dann heißt* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) := \sigma(M)$ *die* Borel-σ-Algebra. *Die Mengen* $B \in \mathcal{B}$ *heißen* Borelmengen.

BEMERKUNG. *Ist* (X, d) *separabel, so ist* $\mathcal{B} = \sigma(\widetilde{M})$, *wobei* $\widetilde{M}$ *die Menge aller offenen Kugeln ist.*

BEISPIEL. *Sei* $X = \mathbb{R}$, M *die menge aller links halboffenen Intervalle* $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann ist* $\sigma(M) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

BEWEIS.

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \bigcup_{\substack{n=1 \\ b-\frac{1}{n}>a}}^{\infty} \left(a, b-\tfrac{1}{n}\right] &&\Rightarrow (a,b) \in \sigma(M) \\
& &&\Rightarrow \mathcal{B} \subset \sigma(M), \\
(a,b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b+\tfrac{1}{n}\right) &&\Rightarrow (a,b] \in \mathcal{B} \\
& &&\Rightarrow \sigma(M) \subset \mathcal{B}.
\end{aligned}
$$

□

DEFINITION 4.3.

(1) *Ein* Maß *auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+^* := [0,\infty]$, für die gilt:*
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
   (b) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$.*

(2) *Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^X$ mit Grundmenge $X \neq \emptyset$ heißt* endlich *oder* beschränkt, *wenn $\mu(X) < \infty$ gilt. Falls $\mu(X) = 1$ gilt, heißt M* Wahrscheinlichkeitsmaß.

(3) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Maß auf der Borel-σ-Algebra heißt* Borelmaß.

BEISPIELE.

(1) *Diracmaß. Sei $x \in X$ beliebig, betrachte*

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} = 1_A(x), \quad A \in 2^X.$$

BEHAUPTUNG δ_x *ist σ-additiv.*

BEWEIS. *Sei $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Mengenfolge mit $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Dann gilt*

$$\delta_x\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = 1_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1_{A_i}(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_x(A_i).$$

$\boxed{B}$

(2) *Punktmaß. Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ eine Folge mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ beliebig. Betrachte*

$$\mu(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \delta_{x_k}(A), \quad A \in 2^X.$$

BEHAUPTUNG: *μ ist σ-additiv.*

BEWEIS. *Sei $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ wie oben.*

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \delta_{x_k}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{x_k}(A_i) \\ &\overset{Fubini}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \delta_{x_k}(A_i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i). \end{aligned}$$

$\boxed{B}$

4.1.1. Konstruktion eines Borelmaßes.

DEFINITION 4.4.

(1) *Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset 2^X$ heißt ein* Ring *über X, wenn gilt*
   (a) $\varnothing \in \mathcal{R}$;
   (b) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$;
   (c) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

(2) *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X. Die Abbildung $\mu_0 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+^*$ heißt* Prämaß, *falls gilt:*
   (a) $\mu_0(\varnothing) = 0$;
   (b) *Für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu_0\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(A_i).$$

(3) *Ein Prämaß μ_0 auf einem Ring $\mathcal{R}$ heißt* σ-endlich, *wenn es eine geschachtelte Folge $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ gibt mit*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = X \quad \text{und} \quad \mu_0(B_i) < \infty \,\forall\, i \in \mathbb{N}.$$

BEMERKUNG. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$.

BEWEIS. $A \cap B = (A \cup B) \setminus \Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big)$. □

SATZ 4.5 (Fortsetzungssatz von Caratheodory). *Ein σ-endliches Prämaß μ_0 auf einem Ring $\mathcal{R}$ lässt sich eindeutig zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen.*

Den BEWEIS findet man z.B. in Behrends „Maß- und Integrationstheorie“, S. 19 – 25.

BEISPIEL. *Sei $X = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{R}$ das System aller halboffenen Intervalle $(a, b]$ mit $a < b$ und deren endlicher Vereinigungen. Setzte $(a, a] = \varnothing$. $\mathcal{R}$ ist ein Ring über $\mathbb{R}$. Setze $\mu_0\big((a, b]\big) = b - a$. Somit ist μ_0 ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. μ_0 ist σ-endlich, denn $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (-i, i] = \mathbb{R}$ und $\mu_0\big((-i, i]\big) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Fortsetzung μ von μ_0 auf $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißt* Lebesgue-Borel-Maß.

Im Gegensatz zum Lebesgue-Borel-Maß μ ist das Lebesgue-Maß λ auf der σ-Algebra $\mathcal{L} \subset 2^{\mathbb{R}}$ von Lebesgue-messbaren Teilmengen definiert. Es gilt $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$. Der Unterschied zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{L}$ ist aber gering:

- Ist $A \in \mathcal{L}$, so existieren Borelmengen $B_\pm$ mit $B_- \subset A \subset B_+$ und $\lambda(B_+ \setminus A) = \lambda(A \setminus B_-) = 0$. Dieser kleine Unterschied hat aber große Folgen.

DEFINITION 4.6. *Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt* vollständig, *wenn gilt*

$$A \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad \mu(A) = 0 \quad \text{und} \quad B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}.$$

Das Lebesgue-Maß ist vollständig, das Lebesgue-Borel-Maß ist nicht vollständig.

Trotz der kleinen Krankheit ist es oft viel bequemer mit Lebesgue-Borel-Maß zu arbeiten als mit Lebesgue-Maß. Einen Vorteil werden wir gleich sehen.

4.1.2. Borel-Abbildungen.

DEFINITION 4.7. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $F : X \to X$ heißt* Borelsch, *wenn $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(X)$.*

BEHAUPTUNG. Jede stetige Abbildung $F : X \to X$ ist Borelsch.

BEWEIS. Das Mengensystem
$$\left\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(X)\right\}$$
ist eine σ-Algebra, denn $X \setminus F^{-1}(A) = F^{-1}(X \setminus A)$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}(A_n) = F^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ für alle $A, A_n \in \mathcal{B}(X)$. Folglich gilt
$$\left\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(X)\right\} \supset \sigma\left(\left\{F^{-1}(A) \mid A \subset X \quad \text{offen}\right\}\right).$$
Das Mengensystem
$$\mathcal{A} := \left\{A \subset X \mid F^{-1}(A) \in \sigma\left(\left\{F^{-1}(B) \mid B \subset X \quad \text{offen}\right\}\right)\right\}$$
ist ebenfalls eine σ-Algebra mit
$$\{A \subset X \mid A \quad \text{offen}\} \subset \mathcal{A}.$$
Daher gilt $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ und folglich
$$\begin{aligned}\left\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(X)\right\} &\subset \left\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\right\} \\ &= \sigma\left(\left\{F^{-1}(B) \mid B \subset X \quad \text{offen}\right\}\right).\end{aligned}$$
Also gilt
$$\left\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(X)\right\} = \sigma\left(\left\{F^{-1}(A) \mid A \subset X \quad \text{offen}\right\}\right)$$
Da F stetig ist, ist
$$\sigma\left(\left\{F^{-1}(A) \mid A \subset X \quad \text{offen}\right\}\right) \subset \mathcal{B}(X)$$
und somit $F^{-1}(A)$ Borelsch für alle $A \in \mathcal{B}(X)$, d.h. F ist eine Borel-Abbildung. $\boxed{\text{B}}$

BEMERKUNG. *Sei $X = \mathbb{R}$. Eine Abbildung $F : X \to X$ ist Lebesgue-messbar, wenn $F^{-1}(A)$ messbar für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Daher ist jede Borelfunkton messbar. Für messbare Funktionen gilt die Implikation „A messbar $\Rightarrow F^{-1}(A)$ messbar“ im Allgemeinen nicht!*

DEFINITION 4.8. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $F : X \to X$ Borelsch. Ein Borelmaß μ auf X heißt* invariant *bezüglich F, wenn $\mu(F^{-1}(A)) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(X)$ gilt.*

Als nächstes wollen wir das folgende nützliche Kriterium beweisen.

SATZ 4.9. *Sei (X,d) ein polnischer Raum, d.h. separabler vollständiger metrischer Raum. Ein Borelmaß μ ist genau dann F-invariant, wenn*

(1) *$\mu(F^{-1}(U)) = \mu(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$*

oder
(2) $\mu(F^{-1}(K)) = \mu(K)$ *für alle kompakten Teilmengen* $K \subset X$.

Für den Beweis brauchen wir eine wichtige Eigenschaft von endlichen Borelmaßen:

SATZ 4.10 (Satz von Ulam). *Sei* (X,d) *ein polnischer Raum. Dann ist jedes Borelmaß auf* X regulär, *d.h. für jede Borelmenge* $A \in \mathcal{B}(X)$ *gilt*
(a) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \in \mathcal{B}(X) \text{ kompakt}\}$
und
(b) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset A, U \subset X \text{ offen}\}$.

Den BEWEIS findet man z.B. in Elstrodt „Maß- und Integrationstheorie".

BEMERKUNG. *Manchmal wird unter Regularität eine schwächere Eigenschaft verstanden: Anstelle von (a) wird verlangt, dass*
(a') $\mu(A) = \sup\{\mu(V) \mid V \subset A, V \subset X \text{ abgeschlossen}\}$.

Für kompakte metrische Räume sind Eigenschaften (a) und (a') offenbar äquivalent. Im allgemeinen Fall gilt der folgende Regularitätssatz:

SATZ 4.11. *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Dann besitzt jedes endliche Borelmaß* μ *Eigenschaften (a') und (b).*

Den BEWEIS findet man in z.B. Walters „An introduction to ergodic theory".

BEWEIS VON SATZ 4.9. $(\Rightarrow)$ klar!
$(\Leftarrow)$ Es gelte (2). Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ beliebig. Nach Satz 4.10 gilt

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(F^{-1}(K)). \tag{4.1}$$

Betrachte $\tilde{\mu} : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}_+^*$ mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(F^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}(X)$.

BEHAUPTUNG. $\tilde{\mu}$ ist ein Borelmaß.

BEWEIS. Es genügt die σ-Additivität zu überprüfen. Seien $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkte Borelmengen. Die Mengen $F^{-1}(A_n)$ sind ebenfalls paarweise disjunkt. Betrachte

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(F^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}(A_n)\Big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(F^{-1}(A_n)\Big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n).
\end{aligned}$$

B

Wegen der Regularität des Maßes $\tilde{\mu}$ gilt

$$\tilde{\mu}(A) = \sup_{K\subset A} \tilde{\mu}(K) = \sup_{K\subset A} \mu\Big(F^{-1}(K)\Big) \overset{(4.1)}{=} \mu(A).$$

Somit gilt $\mu(A) = \mu\Big(F^{-1}(A)\Big)$ für alle $A \in \mathcal{B}(X)$.

Für (1) ist analog. $\square$

BEISPIELE. (1) *Sei X beliebig, $F = \mathrm{id}_X$. Dann ist jedes Borelmaß F-invariant.*

(2) *Seien (X, d) ein metrischer Raum, $F : X \to X$ Borelsch mit dem Fixpunkt $x \in X$. Dann ist das Diracmaß $\mu = \delta_x$ F-invariant.*

BEWEIS. Sei $A \subset X$ eine beliebige Borelmenge. Ist $x \in A$, so ist $x \in F^{-1}(A)$ und somit $\mu(A) = 1 = \mu(F^{-1}(A))$. Ist $x \notin A$, so ist $x \notin F^{-1}(A)$ und somit $\mu(A) = 0 = \mu(F^{-1}(A))$. $\square$

(3) *Für die Zeltabbildung*

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

ist das Lebesgue-Borel-Maß $\mu = \lambda\big|_{[0,1]}$ invariant.

BEWEIS. Sei $(a, b] \subset [0, 1]$ beliebig. Es gilt

$$T_2^{-1}\left((a, b]\right) = (a/2, b/2] \cup (1 - b/2, 1 - a/2]$$

und daher

$$\begin{aligned} \mu\big(T_2^{-1}\left((a, b]\right)\big) &= \mu\left((a/2, b/2]\right) + \mu\left((1 - b/2, 1 - a/2]\right) \\ &= \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}(b - a) = \mu\left((a, b]\right). \end{aligned}$$

Somit gilt $\mu\left(T_2^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ für alle Teilmengen A aus dem Ring halboffener Intervalle $(a, b]$ und deren endlicher Vereinigung. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung in Satz 4.5 gilt die Gleichheit auch für alle Borelteilmengen A, d.h. das Maß μ ist T_2-invariant. $\square$

(4) *Die Gauß-Abbildung $G : [0, 1] \to [0, 1]$,*

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } x = 0, \\ \{\frac{1}{x}\}, & \textit{falls } x \in (0, 1], \end{cases}$$

wobei $\{a\}$ den gebrochenen Teil von a bezeichnet (siehe Abschnitt 1.9), ist nicht stetig, besitzt jedoch ein invariantes Maß.

BEHAUPTUNG. *Das Wahrscheinlichkeitsmaß*

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1 + x} \quad \textit{ist } G\textit{-invariant.}$$

BEWEIS. *Wähle $0 \leq a < b \leq 1$ beliebig. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\begin{aligned} a = \{n + a\} &= \left\{\frac{1}{(n + a)^{-1}}\right\} = G\Big((n + a)^{-1}\Big), \\ b = \{n + b\} &= \left\{\frac{1}{(n + b)^{-1}}\right\} = G\Big((n + b)^{-1}\Big). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$G^{-1}\big((a,b]\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\Big(\frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n}\Big]}_{\textit{disjunkte Intervalle}}.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
& \mu\Big(G^{-1}\big((a,b]\big)\Big) \\
= \quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(\Big(\frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n}\Big]\Big) \\
= \quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\log 2} \int_{(b+n)^{-1}}^{(a+n)^{-1}} \frac{dt}{1+t} \\
= \quad & \frac{1}{\log 2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \log \frac{1+\frac{1}{a+n}}{1+\frac{1}{b+n}} \\
= \quad & \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \log \frac{(a+n+1)(b+n)}{(a+n)(b+n+1)} \\
= \quad & \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \log \left\{ \frac{(b+1)}{(a+1)} \cdot \frac{(a+3)}{(b+3)} \cdots \frac{(a+N+1)(b+N)}{(a+N)(b+N+1)} \right\} \\
= \quad & \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \log \frac{(b+1)(a+N+1)}{(a+1)(b+N+1)} \\
= \quad & \frac{1}{\log 2} \log \frac{b+1}{a+1} \\
= \quad & \mu\big((a,b]\big).
\end{aligned}$$

Wieder mit dem Satz von Caratheodory folgt daraus, dass das Maß μ G-invariant ist. $\boxed{B}$

4.2. Invariante Funktionale

4.2.1. Integration bezüglich eines Borelmaßes. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^*$ heißt *Treppenfunktion*, wenn

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k 1_{A_k}(x) \ \text{ mit } A_k \in \mathcal{B}(X), \quad A_k \cap A_i = \varnothing, \quad k \neq i.$$

Die Treppenfunktion heißt *μ-summierbar*, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} |C_k|\, \mu(A_k) < \infty.$$

Für eine μ-summierbare Treppenfunktion

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) := \sum_{k=1}^{n} C_k \mu(A_k \cap A), \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

heißt das *Lebesgue-Integral von f bezüglich des Maßes μ*.

Nun brauchen wir die folgende Variante des Approximationssatzes aus der Lebeguesschen Integrationstheorie:

PROPOSITION. *Sei f eine Borelfunktion auf X, $f \geq 0$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ für jedes $x \in X$ strebt. Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz gleichmäßig.*

BEWEIS. Setze

$$E_{nj} := \left\{ x \in X \middle| \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n} \right\},$$
$$F_n := \{x \in X | f(x) \geq n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n2^n$. Die Mengen E_{nj} und F_n sind offenbar Borelsch und paarweise disjunkt. Somit sind die Funktionen

$$f_n(x) := \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} 1_{E_{nj}}(x) + n 1_{F_n}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

Borelsch. Die punktweise Konvergenz $f_n \to f$ ist klar. Ist f beschränkt, so gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$$

für alle $x \in X$ und alle hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. □

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion. Definiere

$$f_+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f_-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Die Funktionen $f_\pm$ sind Borelsch und es gilt $f = f_+ - f$. Seien $f_n^{(\pm)}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, so dass $f_n^{(+)} \nearrow f_+$ und $f_n^{(-)} \nearrow f_-$ punktweise. Nach dem Satz über monotone Konvergenz existieren (endlich oder unendlich) die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(+)}(x)\, d\mu(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(-)}(x)\, d\mu(x).$$

Die Funktion f heißt *μ-integrierbar*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(+)}(x)\, d\mu(x) < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(-)}(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Dann heißt

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(+)}(x)\, d\mu(x) - \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{(-)}(x)\, d\mu(x)$$

das Lebesgue-Integral von f bezüglich des Maßes μ.

4.2.2. Stetige lineare Funktionale auf $C(X)$.

DEFINITION 4.12. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein stetiges lineares Funktional $\ell : C(X) \to \mathbb{R}$ heißt* positiv, *falls $\ell(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$ ist.*

Sei μ ein endliches Borelmaß auf einem kompakten metrischen Raum X. Dann ist

$$\ell_\mu(f) := \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

ein stetiges lineares Funktional auf $C(X)$. Es ist positiv und $\|\ell_\mu\| = \mu(X) = \ell_\mu(1)$.

Umgekehrt gilt auch:

SATZ 4.13 (Riesz). *Sei X kompakter metrischer Raum. Zu jedem positiven stetigen linearen Funktional ℓ auf $C(X)$ gibt es genau ein endliches Borelmaß μ_ℓ, so dass*

$$\ell(f) = \int_X f(x)\, d\mu_\ell(x), \quad \|\ell\| = \mu_\ell(X).$$

BEMERKUNG. *Ohne die Voraussetzung, dass X kompakt ist, erhält man eine schwächere Aussage bekannt als der Darstellungssatz von Riesz-Markow.*

BEWEISIDEE VON SATZ 4.13. Sei $K \subset X$ kompakt. Setze

$$\mu(K) := \inf\{\ell(\varphi) \mid 1_K \leq \varphi \leq 1\}.$$

Sei $B \subset K$ Borelsch. Setze

$$\mu(B) := \sup\{\mu(K) \mid K \subset B, \quad K \,\text{kompakt}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass μ additiv ist. Es bleibt übrig zu zeigen, dass $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}_+$ σ-additiv ist. Im Allgemeinen ist das nicht ganz trivial. Ist X ein Intervall, z.B. $X = [0, 1]$, so ist die σ-Additivität wesentlich einfacher. Betrachte

$$g_\mu(t) := \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \mu([0,t)), & t \in (0,1), \\ \mu([0,1)) & t = 1. \end{cases}$$

Beobachtungen:

1. g_μ ist monoton wachsend,
2. g_μ ist links stetig, d.h.
   $g_\mu(t-0) = g_\mu(t)$, denn $g_\mu(t) - g_\mu(t-\varepsilon) = \mu([t-\varepsilon, t))$.

AUFGABE 4.14. *Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mu([t-\varepsilon, t)) = 0.$$

Somit ist g_μ Verteilungsfunktion eines Borelmaßes und daher ist μ σ-additiv.

□

SATZ 4.15. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $F : X \to X$ eine stetige Abbildung. Ein endliches Borelmaß μ auf X ist F-invariant genau dann, wenn das Funktional*

$$\ell_\mu(f) := \int_X f(x)\, d\mu(x), \quad f \in C(X)$$

F-invariant ist, d.h.

$$\ell_\mu(f \circ F) = \ell_\mu(f) \; \forall f \in C(X).$$

Für den Beweis des Satzes brauchen wir ein Hilfsergebnis, das auch in vielen anderen Zusammenhängen wichtig ist.

LEMMA 4.16. *Seien μ_1, μ_2 endliche Borelmaße. Es gilt $\mu_1 = \mu_2$ genau dann, wenn*

$$\int_X f(x)\, d\mu_1(x) = \int_X f(x)\, d\mu_2(x) \; \forall f \in C(X).$$

BEWEIS. ($\Rightarrow$) klar!

($\Leftarrow$) Es genügt zu zeigen, dass $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ ist. Seien $K \subset X$ kompakt, $\varepsilon > 0$ beliebig. Da μ_1 regulär ist, gibt es eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $K \subset U$ und $\mu_1(U \backslash K) < \varepsilon$. Betrachte die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in X \backslash U, \\ \frac{d(x,U^c)}{d(x,U^c)+d(x,K)}, & \text{falls } x \in U. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass $d(x, U^c) + d(x, K) \neq 0$.

Offenbar gilt:

1. $g(x) = 0 \; \forall \, x \in U^c$,
2. $g(x) = 1 \; \forall \, x \in K$,
3. $0 \leq g(x) \leq 1 \; \forall x \in X$.

BEHAUPTUNG. Sei $M \subset X$ kompakt. Dann ist $x \mapsto d(x, M)$ stetig.

BEWEIS. Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig. O.B.d.A. sei $d(x_1, M) \geq d(x_2, M)$. Dann ist

$$d(x_1, M) - d(x_2, M) = \inf_{y \in M} d(x_1, y) - \inf_{y \in M} d(x_2, y) = (*).$$

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es ein $y_2 \in M$, so dass $\inf_{y \in M} d(x_2, y) = d(x_2, y_2)$. Also ist

$$\begin{aligned} (*) \quad &= \quad \inf_{y \in M} d(x_1, y) - d(x_2, y_2) \leq d(x_1, y_2) - d(x_2, y_2) \\ & \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) - d(x_2, y_2) = d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Folglich ist die Funktion g stetig. $\boxed{\text{B}}$

Nun betrachte

$$\begin{aligned} \mu_2(K) &= \int_K g(x) \, d\mu_2(x) \leq \int_X g(x) \, d\mu_2(x) \\ &= \int_X g(x) \, d\mu_1(x) \\ &= \int_U g(x) \, d\mu_1(x) \leq \mu_1(U) < \mu_1(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus, dass $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$ ist.

Analog zeigt man, dass $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. $\square$

BEWEIS VON SATZ 4.15. ($\Rightarrow$) Sei $f \in C(X)$, $f \geq 0$ beliebig. Sei

$$f_n(x) = \sum_k C_k^{(n)} 1_{A_k^{(n)}}(x)$$

eine monoton wachsende Folge der Treppenfunktionen mit $f_n \to f$. Wir berechnen

$$\ell_\mu(f_n) = \sum_k C_k^{(n)} \mu(A_k^{(n)})$$

und

$$\begin{aligned}
f_n(F(x)) &= \sum_k C_k^{(n)} \chi_{A_k^{(n)}}(F(x)) \\
&= \sum_k C_k^{(n)} \chi_{F^{-1}(A_k^{(n)})}(x) \\
\Rightarrow \ell_\mu(f_n \circ F) &= \sum_k C_k^{(n)} \mu(F^{-1}(A_k^{(n)})) \\
&= \sum_k C_k^{(n)} \mu(A_k^{(n)}) = \ell_\mu(f_n).
\end{aligned}$$

Mit dem Lebesgueschen Satz von der monotonen Konvergenz folgt daraus $\ell_\mu(f) = \ell_\mu(f \circ F)$. Für allgemeine Borel-Funktionen $f \in C(X)$ betrachte die Zerlegung $f = f_+ - f_-$, $f_\pm \geq 0$.

($\Leftarrow$) Es gelte $\ell_\mu(f \circ F) = \ell_\mu(F)$ für alle $f \in C(X)$.

Behauptung. Es gilt

$$\int_X (f \circ F)(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\tilde{\mu}(x) \ \forall f \in C(X)$$

mit $\tilde{\mu}(A) := \mu\big(F^{-1}(A)\big)$. (Zu Erinnerung: $\tilde{\mu}$ ist ein Borelmaß, s. den Beweis von Satz 4.9!)

Beweis. Sei $f \geq 0$ eine stetige Funktion. Sei (f_n) die monoton wachsende Folge der Treppenfunktionen mit $f_n \to f$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_X (f_n \circ F)(x)\, d\mu(x) &= \int_X \sum_K C_k^{(n)} 1_{(A_k^{(n)})}(F(x))\, d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_K C_k^{(n)} 1_{F^{-1}(A_k^{(n)})}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_K C_k^{(n)} \mu(F^{-1}(A_k^{(n)})) \\
&= \sum_K C_k^{(n)} \tilde{\mu}(A_k^{(n)}) \\
&= \int_X f_n(x)\, d\tilde{\mu}(x).
\end{aligned}$$

Mit dem Lebesgueschen Satz von der monotonen Konvergenz gilt die Behauptung für alle stetigen $f \geq 0$. Für allgemeine Funktionen $f \in C(X)$ betrachte die Zerlegung $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm \geq 0$. $\boxed{\text{B}}$

Nach der Behauptung gilt

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\tilde{\mu}(x)$$

für alle $f \in C(X)$. Nach Lemma 4.16 folgt daraus, dass $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) = \mu(F^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}(X)$ ist. $\square$

BEISPIEL. *Sei $T_2 : [0,1] \to [0,1]$ die Zeltabbildung, $T_2(x) = \min\{2x, 2 - 2x\}$. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(T_2(x))dx &= \int_0^{1/2} f(2x)dx + \int_{1/2}^1 f(2-2x)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.15 ist das Lebesgue-Borelmaß T_2-invariant.

4.3. Der Satz von Krylov-Bogoljubov

SATZ 4.17. *Sei (X,d) kompakt, $F : X \to X$ stetig. Dann existiert ein F-invariantes Wahrscheinlichkeits-Borelmaß.*

BEWEIS. Der metrische Raum $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel. Daher existiert eine totale Folge (p_n) in $C(X)$ mit $\|p_m\|_\infty = 1$. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge $\phi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_m\big(F^k(x)\big)$ beschränkt:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_m\big(F^k(x)\big)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|p_m\|_\infty \le 1.$$

Mit dem Diagonalfolgenverfahren finden wir eine Teilfolge $\left(\phi_{n(\ell)}^{(m)}(x)\right)_{\ell,m\in\mathbb{N}_0}$, sodass $\lim_{\ell\to\infty}\phi_{n(\ell)}^{(m)}(x)$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ existiert. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $\ell_x(p_m)$.

Nun sei φ eine beliebige stetige Funktion und $\varepsilon > 0$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sup_{x\in X}\left|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{N}\alpha_m p_m(x)\right| < \varepsilon$$

für geeignete Koeffizienten α_m ist. Setze

$$\varphi_N(x) = \sum_{m=0}^{N}\alpha_m p_m(x).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\varphi\big(F^\ell(x)\big) &= \frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\varphi_N\big(F^\ell(x)\big)\\ &\quad+\frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\Big(\varphi\big(F^\ell(x)\big) - \varphi_N\big(F^\ell(x)\big)\Big).\end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ konvergiert der erste Term gegen $\sum_{m=0}^{N}\alpha_m\ell_x(p_m)$. Der zweite Term genügt offenbar der Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\big(\varphi(F^\ell(x)) - \varphi_N\big(\varphi(F^\ell(x)\big)\right| \le \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(k)} \sum_{\ell=0}^{n(k)-1} \varphi\big(F^\ell(x)\big).$$

Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit $\ell_x(\varphi)$.

BEHAUPTUNG. $\varphi \mapsto \ell_x(\varphi)$ ist ein lineares, beschränktes, positives F-invariantes Funktional.

BEWEIS. Linearität ist offensichtlich. Die Die Beschränktheit folgt aus der Abschätzung

$$|\ell_x(\varphi)| \le \sup_{x\in X} |\varphi(x)|.$$

Falls $\varphi \ge 0$ ist, dann ist $\ell(\varphi) \ge 0$. Also ist das Funktional positiv. Nun betrachte

$$\begin{aligned} \ell_x(\varphi\circ F) - \ell_x(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\Big(\sum_{\ell=0}^{n_k-1} \varphi\big(F^{\ell+1}(x)\big) - \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \varphi\big(F^\ell(x)\big)\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\Big(\varphi\big(F^{n_k}(x)\big) - \varphi(x)\Big) = 0, \end{aligned}$$

d.h. das Funktional ist F-invariant. $\boxed{\text{B}}$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz entspricht dem Funktional $\ell_x(\varphi)$ ein eindeutiges invariantes Maß μ_x,

$$\ell_x(\varphi) = \int_X \varphi(y)\, d\mu_x(y).$$

Da $\ell_x(1) = 1$ ist, ist μ_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß. $\square$

4.4. Der Wiederkehrsatz von Poincaré

SATZ 4.18. *Sei $F : X \to X$ eine Borel-Abbildung. Sei μ ein F-invariantes Wahrscheinlichkeits-Borelmaß. Sei $U \subset X$ beliebige Borelmenge mit $\mu(U) > 0$. Dann existiert für μ-fast jedes $x \in U$ eine strikt monoton steigende unendliche Folge $\{n(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, sodass $F^{n(k)}(x) \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

AUFGABE. *Ein Punkt $x \in X$ heißt rekurrent falls eine strikt monoton steigende Folge natürlicher Zahlen n_k existiert, sodass $x = \lim_{k\to\infty} F^{n_k}(x)$ gilt. Zeigen Sie: μ-fast jedes $x \in X$ ist rekurrent.*

LEMMA 4.19. *Sei ein Wahrscheinlichkeits-Borelmaß μ F-invariant. Sei $U \subset X$ sei beliebige Borelmenge mit $\mu(U) > 0$. Dann existiert für μ-fast jedes $x \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $F^n(x) \in U$.*

BEWEIS. Bezeichne $V_j := \{x \in U \mid F^j(x) \in X \setminus U\}$. Offenbar gilt

$$V_j = U \cap F^{-j}(X \setminus U).$$

Betrachte die Menge $N(F) := \{x \in U \mid F^j(x) \in X \setminus U \,\forall j \in \mathbb{N}\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} N(F) &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} V_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left(U \cap F^{-j}(X\backslash U)\right) \\ &= U \cap \Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} F^{-j}(X\backslash U)\Big). \end{aligned}$$

Ist $x \in N(F)$, so gilt $x \notin F^{-n}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $N(F) \subset U$ ist $F^{-n}(N(F)) \subset F^{-n}(U)$ und somit gilt $x \notin F^{-n}(N(F))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $N(F) \cap F^{-n}(N(F)) = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung. $F^{-n}(N(F)) \cap F^{-k}(N(F)) = \varnothing$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$.

Beweis. O.B.d.A. sei $n < k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F^{-n}(N(F)) \cap F^{-k}(N(F)) &= F^{-n}(N(F)) \cap F^{-n}\left(F^{-(k-n)}(N(F))\right) \\ &= F^{-n}\left(N(F) \cap F^{-(k-n)}(N(F))\right) = \varnothing. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Also sind die Mengen $N(F), F^{-1}(N(F)), F^{-2}(N(F)), \ldots$ paarweise disjunkt. Betrachte $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(N(F))\big)$:

$$\begin{aligned} 1 \geq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(N(F))\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mu\big(F^{-n}(N(F))\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mu(N(F)). \end{aligned}$$

Daher ist $N(F)$ eine μ-Nullmenge. □

Beweis von Satz 4.18. Sei $\widetilde{U} \subset U$ die Menge aller $x \in U$, welche die Menge U nur endlich oft besuchen, d.h.

$$\widetilde{U} = \{x \in U \mid \exists\, p \in \mathbb{N} : F^k(x) \notin U \,\forall\, k \geq p\}.$$

Offenbar gilt

$$\widetilde{U} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \widetilde{U}_p \text{ mit } \widetilde{U}_p = \{x \in U \mid F^k(x) \notin U \,\forall\, k \geq p\} \subset N(F^p)$$

Nach Lemma 4.19 ist $\mu\big(N(F^p)\big) = 0$. Folglich gilt

$$\mu(\widetilde{U}) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(\widetilde{U}_p) = 0.$$

□

Korollar 4.20. *Sei $F : X \to X$ eine Borel-Abbildung. Sei ein Wahrscheinlichkeits-Borelmaß μ F-invariant. Sei $W \subset X$ Borelsch mit $\mu(W) < 1$. Die Menge*

$$E := \{x \in X\backslash W \mid \exists\, p \in \mathbb{N} : F^k(x) \in W \,\forall\, k \geq p\}$$

ist eine μ-Nullmenge.

Beweis. Die Menge $X \backslash W := U$ ist Borelsch. Mit dem Wiederkehrsatz von Poincaré folgt, dass die Borelmenge

$$E = \{x \in U \mid \exists p \in \mathbb{N} : F^k(x) \notin U \, \forall \, k \geq p\}$$

eine μ-Nullmenge ist. □

An dieser Stelle betrachten wir eine einfache zahlentheoretsche Anwendung des Wiederkehrsatzes. Eine weitere, recht nichttriviale zahlentheoretische Anwendung des Wiederkehrsatzes behandeln wir im darauffolgenden Abschnitt.

Sei $X = [0, 1]$,

$$F(x) := \begin{cases} \{10x\}, & 10x \notin \mathbb{N}, \\ 1, & 10x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ist $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ die unendliche (d.h. $0,3 = 0,2999\ldots$) Dezimalbruchdarstellung einer Zahl $x \in [0, 1]$, so ist $0, x_2 x_3 x_3 \ldots$ eine Dezimalbruchdarstellung der Zahl $F(x)$. Also agiert die Abbildung F wie die Shiftabbildung.

Um zu zeigen, dass das Lebesgue-Borel-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ F-invariant ist, genügt es zu beweisen, dass $\lambda\Big(F^{-1}\big((a, b]\big)\Big) = \lambda\big((a, b]\big)$ für alle halboffenen Intervalle $(a, b] \subset [0, 1]$ gilt. Wegen

$$F^{-1}\big((0, \alpha; 0, \beta]\big) = \bigcup_{x_1 \in \{0,1,\ldots,9\}} (0, x_1\alpha; 0, x_1\beta]$$

(α und β sind beliebige Ziffernfolgen) ist diese Eigenschaft erfüllt, denn

$$\lambda\left((0, x_1\alpha; 0, x_1\beta]\right) = \frac{1}{10}\lambda\left((0, \alpha; 0, \beta]\right).$$

Wähle nun $U = (0, x_1 \ldots x_n 000\ldots; 0, x_1 \ldots x_n 999\ldots)$ für beliebige Ziffern $x_1, \ldots x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Der Dezimalbruch jeder Zahl $x \in U$ hat $x_1 \ldots x_n$ an den ersten n Hinterkommastellen. Offenbar ist $\lambda(U) > 0$. Nach dem Wiederkehrsatz besucht fast jedes $x \in U$ unter der Abbildung F die Menge U unendlich oft. Folgerung: Der Dezimalbruch fast jeder Zahl $x \in [0, 1]$ enthält beliebige endliche Ziffernfolge $x_1 \ldots x_n$ unendlich oft.

4.5. Eine zahlentheoretische Anwendung

Definition 4.21. *Sei $S \subset \mathbb{N}$ unendlich. Die Zahl*

$$D^*(S) := \limsup_{N\to\infty} \frac{|S \cap [1, N]|}{N}$$

heißt die obere Dichte *von S. Die Zahl*

$$BD^*(S) := \limsup_{|I|\to\infty} \frac{|S \cap I|}{|I|}$$

mit $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{N}$ heißt die obere Banachdichte *von S.*

Offenbar gilt:

$$0 \leq D^*(S) \leq BD^*(S) \leq 1.$$

BEISPIELE. (1) $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, $S_n := [n^3, n^3+n] \cap \mathbb{N} \Rightarrow |S_n| = n+1$.

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} |S \cap [1,N]| \overset{N=n^3+n}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |S_k|}_{\substack{\sum_{k=1}^n (n+1) = n+\frac{1}{2}n(n+1) \\ =\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2(n^3+n)} = 0 \Rightarrow D^*(S) = 0.$$

$$BD^*(S) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap S_n|}{|S_n|} = 1 \Rightarrow BD^*(S) = 1.$$

(2) *$S = \mathbb{P}$ (Primzahlen). $|S \cap [1,n|| =: \pi(N)$ ist die sogenannte Dirichlet-Funktion. Ihre Asymptotik für $N \to \infty$ ist ein klassisches Ergebnis der analytischen Zahlentheorie,*

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log N}.$$

Somit ist $D^*(S) = 0$.

Über die obere Banachdichte von Primzahlen ist dem Verfasser dieser Notizen nichts bekannt. Es lässt sich aber vermuten, dass $BD^*(\mathbb{P})$ ebenfalls Null ist.

SATZ 4.22 (Szemerédi). *Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$ besitze positive obere Banachdichte. Dann enthält S beliebig lange arithmetische Progressionen, d.h. die Mengen $\{a, a+q, \ldots, a+(n-1)q\}$, n ist die Länge der Progression.*

Für den Beweis brauchen wir die folgende Variante des Wiederkehrsatzes, genauer von Lemma 4.19.

SATZ 4.23 (Furstenberg). *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $F : X \to X$ Borelsch. Es gebe ein F-invariantes Borelmaß μ mit $\mu(X) = 1$. Sei $U \subset X$ Borelsch mit $\mu(U) > 0$. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\mu\Big(U \cap F^{-n}(U) \cap F^{-2n}(U) \cap \cdots \cap F^{-\ell n}(U)\Big) > 0$$

Der BEWEIS ist eine Übungsaufgabe.

Wir beginnen mit dem Beweis von Satz 4.22. Sei $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d die Standardmetrik auf Σ,

$$d(u,v) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{|u_j - v_j|}{2^j}.$$

Sei

$$s_n := \begin{cases} 1, & n \in S, \\ 0, & n \notin S. \end{cases}$$

Setze $s = (s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma$. Sei $Y := \overline{\{\sigma^n(s) \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$ (Abschluss des Orbits von s unter der Shiftabbildung σ). Da Σ kompakt und Y abgeschlossen ist, ist (Y,d) ein kompakter metrischer Raum. Die Shiftabbildung σ lässt Y invariant, also ist $(Y, \sigma|_Y)$ ein dynamisches System. Nach Satz 4.17 gibt es ein σ-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf Y.

Wir beweisen nun eine schärfere Aussage.

LEMMA 4.24. *Sei* $A := \{t \in \Sigma \,|\, t_1 = 1\}$. *Es gibt ein* σ*-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf* Y *mit* $\mu(A \cap Y) > 0$.

BEWEIS. Da Y kompakt ist, ist der Banachraum $(C(Y), \|\cdot\|_\infty)$ separabel. Daher gibt es eine abzählbare totale Menge $\{p_m(x)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C(Y)$ mit

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{x\in Y} |p_m(x)| =: M < \infty.$$

Sei $I_n \subset \mathbb{N}$ eine Intervallenfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap I_n|}{|I_n|} = BD^*(S) > 0.$$

Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$\phi_n^{(m)} := \frac{1}{|I_n|} \sum_{k+1\in I_n} p_m(\sigma^k(s)) \qquad (s \text{ wie oben!})$$

Wie im Beweis von Satz 4.17 (Krylov-Bogolubov) stellen wir fest, dass es eine Teilfolge $n(j)$ gibt mit

$$\lim_{j\to\infty} \phi_{n(j)}^m \text{ existiert für jedes } m \in \mathbb{N}.$$

Ferner zeigen wir, dass

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|I_{n(j)}|} \sum_{k+1\in I_{n(j)}} \varphi(\sigma^k(s))$$

existiert für alle $\varphi \in C(Y)$. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit $\ell(\varphi)$. Die Abbildung $\varphi \mapsto \ell(\varphi)$ ist ein lineares, beschränktes, positives σ-invariantes Funktional, d.h. $\ell(\varphi \circ \sigma) = \ell(\varphi)$. Daher gibt es ein endliches F-invariantes Borelmaß mit $\ell(\varphi) = \int_Y \varphi(x)\, d\mu(x)$. Nun untersuche

$$\mu(A \cap Y) = \int_Y 1_A(x)\, d\mu(x) = \ell(1_A).$$

$\ell(1_A)$ ist wohldefiniert, denn $1_A \in C(Y)$. Ferner

$$\begin{aligned}
\ell(1_A) &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|I_{n(j)}|} \sum_{k+1\in I_{n(j)}} 1_A(\sigma^k(s)) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|I_{n(j)}|} \sum_{k+1\in I_{n(j)}} \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad s_k = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad s_k = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|I_{n(j)}|} \sum_{k+1\in I_{n(j)}} \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad k \in S \\ 0 & \text{falls} \quad k \notin S \end{cases} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{|S \cap I_{n(j)}|}{|I_{n(j)}|} = BD^*(S) > 0.
\end{aligned}$$

□

Nun beschäftigen wir uns mit dem Beweis des Satzes von Szemerédi. Nach Satz 4.23 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $t \in Y \cap A$ mit

$$\sigma^n(t) \in A \cap Y, \quad \sigma^{2n}(t) \in A \cap Y, \quad \ldots \quad, \sigma^{\ell n}(t) \in A \cap Y.$$

Das bedeutet, dass $t_1 = t_{n+1} = t_{2n+1} = \cdots = t_{\ell n+1} = 1$.

Sei $0 < \varepsilon < 2^{-\ell n-1}$. Da der Orbit $(\sigma^n(s))$ in Y dicht liegt, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $d(t, \sigma^m(s)) < \varepsilon$. Folglich gilt

$$t_1 = s_{m+1}, \quad t_2 = s_{m+2}, \quad \ldots t_{\ell n+1} = s_{m+\ell n+1},$$

d.h.

$$m+1, m+n+1, \ldots, m+\ell n+1 \in S.$$

Der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. *Hier erwähnen wir den Satz von Green-Tao (2005): Sei $S \subset \mathbb{N}$ eine Menge von Primzahlen mit*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S \cap [1,N]|}{\pi(N)} > 0.$$

Dann enthält S beliebig lange arithmetische Progressionen.

4.6. Invariantes Punktmaß und periodische Bahnen

Hier diskutieren wir noch eine Anwendung des Wiederkehrsatzes von Poincaré. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $F : X \to X$ Borelsch.

Sei $\{x_0, \ldots, x_{p-1}\}$ ein periodischer Orbit des dynamischen System (X, F). Betrachte das Warscheinlichkeitsmaß

$$\mu = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{x_k}.$$

Das Maß ist offensichtlich F-invariant.

Seien $\{x_0, \ldots, x_{p-1}\}$ und $\{y_0, \ldots, y_{q-1}\}$ zwei verschiedene periodische Orbits. Sei eine Zahl $\alpha \in (0,1)$ beliebig. Dann ist

$$\mu = \frac{1}{p}\alpha \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{x_k} + \frac{1}{q}(1-\alpha) \sum_{k=0}^{q-1} \delta_{y_k}$$

ein F-invariantes Warscheinlichkeitsmaß.

Analog kann man konvexe Kombinationen beliebiger Anzahl der periodischen Orbits betrachten. Umgekehrt gilt:

Satz 4.25. *Sei μ ein F-invariantes Warscheinlichkeitspunktmaß, d.h.*

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \delta_{x_j}$$

für gewisse Punkte $x_j \in X$ und gewisse Zahlen $0 < \beta_j \leq 1$ mit $\sum_{j=1}^{N} \beta_j = 1$, $n \in \mathbb{N}$ oder $N = \infty$. Dann besitzt das dynamische System (X, F) periodische Orbits $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ mit Primperioden $p_1, p_2, \ldots$. Es gilt

$$\mu = \sum_k \frac{\alpha_k}{p_k} \sum_{j=0}^{p_k-1} \delta_{F^j(x_k)}$$

mit $x_k \in \mathcal{O}_k$, $\alpha_k > 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$.

BEMERKUNG. *Falls $N < \infty$ ist, dann ist $\sum_k$ endlich. Falls $N = \infty$ ist, dann ist $\sum_k$ eine unendliche Reihe.*

BEWEIS. Sei $x_1 \in X$ ein beliebiger Punkt mit $\mu(\{x_1\}) > 0$. Nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré gibt es ein $p_1 \in \mathbb{N}$, sodass $F^{p_1}(x_1) = x_1$ ist und $F^j(x_1) \neq x_1$ für alle $j = 1, \ldots, p_1 - 1$. Also ist $\{x_1, F(x_1), \ldots, F^{p_1-1}(x_1)\}$ ein periodischer Orbit mit Primperiode p_1. Daher gilt

$$\begin{aligned} &x_1 \in F^{-1}(\{F(x_1)\}), \\ &F(x_1) \in F^{-1}\left(\{F^2(x_1)\}\right), \\ &\ldots \\ &F^{p_1-1}(x_1) \in F^{-1}(\{x_1\}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Da das Maß μ F-invariant ist, gilt

$$\mu\left(F^{-1}(A)\right) = \mu(A)$$

für $A = \left\{F^j(x_1)\right\}$, $j = 1, \ldots, p_1 - 1$. Mit (4.2) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \mu(\{x_1\}) &\leq \mu\left(F^{-1}(\{F(x_1)\})\right) = \mu(\{F(x_1)\}), \\ \mu(\{F(x_1)\}) &\leq \mu\left(F^{-1}\left(\{F^2(x_1)\}\right)\right) = \mu\left(\{F^2(x_1)\}\right), \\ &\ldots \\ \mu\left(\left\{F^{p_1-1}(x_1)\right\}\right) &\leq \mu\left(F^{-1}(\{x_1\})\right) = \mu(\{x_1\}). \end{aligned}$$

Also gilt $\mu(\{x_1\}) = \mu(\{F(x_1)\}) = \ldots = \mu\left(\{F^{p_1-1}(x_1)\}\right)$.

Nun setze $\alpha_1 := p_1 \mu(\{x_1\})$. Ist $\alpha_1 = 1$, so ist

$$\mu\left(\{x_1, F(x_1), \ldots, F^{p_1-1}(x_1)\}\right) = 1$$

und der Satz mit $N = 1$ bewiesen.

Sei nun $\alpha_1 < 1$. Betrachte

$$\mu^{(1)} := \frac{1}{1-\alpha_1}\left(\mu - \frac{\alpha_1}{p_1}\sum_{j=0}^{p_1-1}\delta_{F^j(x_1)}\right).$$

Wir notieren die Eigenschaften des Maßes $\mu^{(1)}$:

1. $\mu^{(1)}$ ist ein F-invariantes Punktmaß;
2. $\mu^{(1)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn

$$\mu^{(1)}(X) = \frac{1}{1-\alpha_1}(1-\alpha_1) = 1;$$

3. $\mu^{(1)}(\{x_1\}) = \mu^{(1)}(\{F(x_1)\} = \ldots = \mu^{(1)}(\{F^{p_1-1}(x_1)\} = 0$.

Sei $x_2 \in X$ ein beliebiger Punkt mit $\mu^{(1)}(\{x_1\}) > 0$. Nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré gibt es ein $p_2 \in \mathbb{N}$, sodass $F^{p_2}(x_2) = x_2$ ist und $F^j(x_2) \neq x_2$ für alle $j = 1, \ldots, p_2 - 1$. Also ist $\{x_2, F(x_2), \ldots, F^{p_1-1}(x_2)\}$ ein periodischer Orbit mit Primperiode p_2. Wie oben zeigt man, dass $\mu^{(1)}(\{x_2\}) = \mu^{(1)}(\{F(x_2)\}) = \ldots = \mu^{(1)}\left(\{F^{p_2-1}(x_2)\}\right)$ gilt.

Nun setze $\alpha_2 := p_2\mu^{(1)}(\{x_2\})$. Ist $\alpha_2 = 1$, so ist

$$\mu^{(1)}\left(\{x_2, F(x_2), \ldots, F^{p_2-1}(x_2)\}\right) = 1$$

und der Satz mit $N = 2$ bewiesen. Dabei gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und

$$\mu = (1-\alpha_1)\mu^{(1)} + \frac{\alpha_1}{p_1}\sum_{j=0}^{p_1-1}\delta_{F^j(x_1)} = \frac{\alpha_2}{p_2}\sum_{j=0}^{p_2-1}\delta_{F^j(x_2)} + \frac{\alpha_1}{p_1}\sum_{j=0}^{p_1-1}\delta_{F^j(x_1)}.$$

Sei nun $\alpha_2 < 1$. Betrachte

$$\mu^{(2)} := \frac{1}{1-\alpha_2}\left(\mu - \frac{\alpha_2}{p_2}\sum_{j=0}^{p_2-1}\delta_{F^j(x_2)}\right).$$

Das Maß $\mu^{(2)}$ hat ähnliche Eigenschaften wie das Maß $\mu^{(1)}$:

1. $\mu^{(2)}$ ist ein F-invariantes Punktmaß;
2. $\mu^{(2)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn
$$\mu^{(2)}(X) = \frac{1}{1-\alpha_2}(1-\alpha_2) = 1;$$
3. $\mu^{(2)}(\{x_1\}) = \mu^{(2)}(\{F(x_1)\} = \ldots = \mu^{(2)}(\{F^{p_1-1}(x_1)\} = 0$ und $\mu^{(2)}(\{x_2\}) = \mu^{(2)}(\{F(x_2)\} = \ldots = \mu^{(2)}(\{F^{p_2-1}(x_2)\} = 0.$

Induktive Wiederholung des Arguments liefert die Behauptung. □

KAPITEL 5

Der Ergodensatz

5.1. Ergodische Abbildungen

Definition 5.1. *Eine Abbildung $F : X \to X$ heißt* ergodisch bezüglich ihres invarianten Borelmaßes μ, *wenn für jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $F^{-1}(A) = A$ entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(X \backslash A) = 0$ gilt. Man sagt auch: Das Maß μ ist für die Abbildung F ergodisch.*

Definition 5.2. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt F-invariant, wenn gilt:*

$$f(F(x)) = f(x) \; \forall \, x \in X.$$

Satz 5.3. *Eine Abbildung $F : X \to X$ sei bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ ergodisch. Dann ist jede F-invariante Borelfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ μ-fast überall konstant, d.h. es gibt eine Borelmenge $A \subset X$ mit $\mu(X \backslash A) = 0$ und $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in A$.*

Beweis. Sei eine Borelfunktion f F-invariant. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $C_a := \{x \in X \mid f(x) < a\}$ F-invariant, denn

$$\begin{aligned} F^{-1}(C_a) &= \{x \in X \mid F(x) \in C_a\} \\ &= \{x \in X \mid f(F(x)) < a\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) < a\} = C_a. \end{aligned}$$

Da F ergodisch ist, gilt entweder $\mu(C_a) = 0$ oder $\mu(C_a) = 1$. Analog gilt entweder $\mu\left(\{x \in X \mid f(x) = a\}\right) = 1$ oder $\mu\left(\{x \in X \mid f(x) = a\}\right) = 0$.

Die Funktion f ist μ-fast überall konstant genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mu\big(\{x \in X \mid f(x) = t\}\big) = 1$. Folglich ist die Funktion f <u>nicht</u> μ-fast überall konstant genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mu\big(\{x \in X \mid f(x) = t\}\big) < 1$, d.h. $\mu\big(\{x \in X \mid f(x) = t\}\big) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Angenommen, f wäre nicht μ-fast überall konstant. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\mu\Big(\{x \in X \mid f(x) < t\} \cup \{x \in X \mid f(x) > t\}\Big) \\ =&\mu\Big(\{x \in X \mid f(x) < t\}\Big) + \mu\Big(\{x \in X \mid f(x) > t\}\Big) = 1. \end{aligned}$$

Also gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ entweder

$$\mu\Big(\{x \in X \mid f(x) < t\}\Big) = 1, \quad \mu\Big(\{x \in X \mid f(x) > t\}\Big) = 0$$

oder

$$\mu\Big(\{x \in X \mid f(x) > t\}\Big) = 0, \quad \mu\Big(\{x \in X \mid f(x) < t\}\Big) = 1.$$

BEHAUPTUNG. Es gibt ein $t_+ \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{x \in X \mid f(x) < t_+\}) = 1$.

BEWEIS. Angenommen, $\mu(\{x \in X \mid f(x) < t\}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mu\Big(\{x \in X \mid f(x) > t\}\Big) = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also gilt $f(x) = +\infty$ für μ-fast alle $x \in X$. Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$

Analog, es gibt ein $t_- \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{x \in X \mid f(x) > t_-\}) = 1$. Es gilt $t_- < t_+$ und

$$\mu\Big(\{x \in X \mid t_- < f(x) < t_+\}\Big) = 1.$$

Betrachte die Zerlegung

$$\begin{aligned}
& \Big\{x \in X \mid t_- < f(x) < t_+\Big\} \\
= \; & \Big\{x \in X \mid t_- < f(x) < \frac{t_- + t_+}{2}\Big\} \cup \Big\{x \in X \mid f(x) = \frac{t_- + t_+}{2}\Big\} \\
& \cup \Big\{x \in X \mid \frac{t_- + t_+}{2} < f(x) < t_+\Big\}.
\end{aligned}$$

Mit obigen Argumenten kommt man zur Schlussfolgerung, dass entweder

$$\mu\left(\Big\{x \in X \mid t_- < f(x) < \frac{t_- + t_+}{2}\Big\}\right) = 1$$

oder

$$\mu\left(\Big\{x \in X \mid \frac{t_- + t_+}{2} < f(x) < t_+\Big\}\right) = 1$$

gilt. Induktive Wiederholung des Arguments zeigt, dass es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mu(\{x \in X \mid f(x) = t_0\}) = 1$. Widerspruch! □

AUFGABE. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion, die μ-fast überall bezüglich F invariant ist, d.h.*

$$f(F(x)) = f(x) \quad \textit{für } \mu\textit{-fast alle} \quad x \in X.$$

Ist die Abbildung $F : X \to X$ ergodisch, so ist f μ-fast überall konstant. BEWEIS *selbst.*

Die Umkehrung von Satz 5.3 ist auch richtig.

SATZ 5.4. *Ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ sei invariant bezüglich der Abbildung $F : X \to X$. Falls jede beschränkte F-invariante Borelfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ μ-fast überall konstant ist, dann ist F ergodisch.*

BEWEIS. Eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}(X)$ sei F-invariant, d.h. $F^{-1}(A) = A$. Dann ist $1_A(x)$ F-invariant, denn

$$1_A(F(x)) = 1_{F^{-1}(A)}(x) = 1_A(x).$$

Da die charakteristische Funktion 1_A Borelsch ist, ist sie μ-fast überall konstant, d.h. $1_A(x) = 0$ oder $1_A(x) = 1$ für μ-fast alle $x \in X$. Also ist $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$. □

BEISPIELE. (1) *Sei X beliebig, $F = \mathrm{id}_X$. Offenbar ist jedes Borelmaß F-invariant.*

BEHAUPTUNG. *Sei $x \in X$ beliebig. Das Diracmaß δ_x ist für F ergodisch.*

BEWEIS. *Jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(X)$ ist F-invariant. $\delta_x(A) = 0$, falls $x \notin A$ und $\delta_x(A) = 1$, falls $x \in A$.* $\boxed{B}$

Das Punktmaß $\mu = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y)$ mit $x \neq y$ ist nicht ergodisch, denn es gibt $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A) = \frac{1}{2}$.

(2) *Rotationsabbildung $R_\omega : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $R_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega, \omega \in \mathbb{R}$. Das Lebesgue-Borelmaß auf $\mathbb{S}^1$ ist offensichtlich R_ω-invariant.*

BEHAUPTUNG: *Für $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Abbildung R_ω ergodisch bezüglich des Lebesgue-Borelmaßes.*

BEWEIS. *Wir zeigen, dass jede R_ω-invariante Funktion $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ fast überall konstant ist. Jede beschränkte Borelfunktion ist in $L^2(\mathbb{S}^1)$. Die Menge $\{\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine orthonormale Basis in $L^2(\mathbb{S}^1)$. Zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ sind genau dann fast überall gleich, wenn deren Fourier-Koeffizienten gleich sind, d.h.*

$$\begin{aligned} c_k &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \\ d_k &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ik\theta}d\theta \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Setze $g(\theta) := f(R_\omega(\theta)) = f(\theta + 2\pi\omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta + 2\pi\omega)e^{-ik\theta}d\theta \\ &\overset{\theta+2\pi\omega=:\theta'}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi\omega}^{2\pi(\omega+1)} f(\theta')e^{-ik\theta'}d\theta' e^{i2\pi k\omega} \\ &\overset{f \text{ ist } 2\pi\text{-period.}}{=} e^{i2\pi k\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta')e^{-ik\theta'}d\theta' \\ &= c_k e^{i2\pi k\omega} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten c_k und d_k sind genau dann gleich, wenn $2\pi k\omega = 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $c_k \neq 0$ oder $c_k = 0$. Da ω irrational ist, gilt $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Also ist f fast überall konstant. $\boxed{B}$

(3) *Die Zeltabbildung $x = [0,1]$, $T_2(x) = 2\min\{x, 1-x\}$. Wir haben bereits gezeigt, dass das Lebesgue-Borel-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ T_2-invariant ist.*

BEHAUPTUNG. *T_2 ist ergodisch bezüglich $\lambda|_{[0,1]}$.*

Beweis. *Sei $\phi \in L^2([0,1];\mathbb{R})$ beliebig. Die Menge $\{e^{2i\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine orthonormale Basis in $L^2([0,1];\mathbb{R})$, d.h.*

$$\lim_{N\to\infty} \|\phi - \phi_N\|_{L^2} = 0 \quad \textit{mit } \phi_N = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\le N}} c_k e^{2i\pi kx},$$

$$c_k = \int_0^1 e^{-2i\pi kx}\phi(x)\,dx = \overline{c_{-k}} \qquad (\phi \textit{ reellwertig}).$$

Ist ϕ eine T_2-invariante Funktion, so ist sie symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes $x = 1/2$, denn

$$\phi(1-x) = \phi(T_2(1-x)) = \phi(T_2(x)) = \phi(x).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 e^{-2i\pi kx}\phi(x)\,dx \overset{x=1-y}{=} \int_0^1 e^{2i\pi ky}\phi(1-y)\,dy \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi ky}\phi(y)\,dy = c_{-k} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Betrachte

$$\begin{aligned} \phi(T_2(x)) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kT_2(x)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \begin{cases} e^{4\pi ikx}, & x \in [0,1/2] \\ e^{4\pi ik}e^{-4\pi ikx}, & x \in [1/2,1] \end{cases} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \begin{cases} e^{4\pi ikx}, & x \in [0,1/2] \\ e^{-4\pi ikx}, & x \in [1/2,1] \end{cases} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{4\pi ikx} \begin{cases} c_k, & x \in [0,1/2] \\ c_{-k}, & x \in [1/2,1] \end{cases} \\ &\overset{c_k=c_{-k}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{4\pi ikx},\ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Vergleiche mit

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k} e^{4\pi ikx} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k+1} e^{2\pi i(2k+1)x} \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich ergeben sich die Gleichungen $c_{2k+1} = 0$ und $c_{2k} = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Somit ist $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Also ist $\phi(x) = c_0$ für fast alle $x \in [0,1]$. $\boxed{B}$

Zwei dynamische Systeme (X_1, F_1) und (X_2, F_2) seien topologisch konjugiert (siehe Satz 1.27), d.h. es gebe einen Homöomorphismus $h : X_1 \to X_2$ mit $h \circ F_1 = F_2 \circ h$. Ein Borelmaß μ_1 sei F_1-invariant. Betrachte $\mu_2(A) := \mu_1(h^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}(X_2)$. Wir haben bereits gezeigt, dass μ_2 ein Borelmaß ist.

Behauptung. Das Maß μ_2 ist F_2-invariant.

BEWEIS. Sei $A \subset X_2$ eine beliebige Borelmenge. Betrachte

$$\begin{aligned} h^{-1}\left(F_2^{-1}(A)\right) &= \left\{x_1 \in X_1 | h(x_1) \in F_2^{-1}(A)\right\} \\ &= \{x_1 \in X_1 | F_2\left(h(x_1)\right) \in A\} \\ &= \{x_1 \in X_1 | h\left(F_1(x_1)\right) \in A\} \\ &= \left\{x_1 \in X_1 | F_1(x_1) \in h^{-1}(A)\right\} \\ &= \left\{x_1 \in X_1 | x_1 \in F_1^{-1}\left(h^{-1}(A)\right)\right\} \\ &= F_1^{-1}\left(h^{-1}(A)\right). \end{aligned}$$

Nun betrachte

$$\begin{aligned} \mu_2(F_2^{-1}(A)) &= \mu_1\Big(h^{-1}(F_2^{-1}(A))\Big) \\ &= \mu_1\Big(F_1^{-1}(h^{-1}(A))\Big) \\ &\overset{\mu_1\ F_1\text{-invariant}}{=} \mu_1(h^{-1}(A)) = \mu_2(A). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Nun sei das Borelmaß μ_1 ergodisch für die Abbildung F_1.

BEHAUPTUNG. Das Maß μ_2 ist ergodisch für F_2.

BEWEIS. Sei $B \in \mathcal{B}(X_1)$ F_1-invariant, d.h. $F_1^{-1}(B) = B$. Da μ_1 ergodisch ist, ist $\mu_1(B) = 0$ oder $= 1$. Die Menge $h(B)$ ist F_2-invariant, denn aus (**??**) mit $A = h(B)$ folgt

$$\begin{aligned} h^{-1}\Big(F_2^{-1}(h(B))\Big) &= F_1^{-1}(B) \\ \Rightarrow F_2^{-1}\big(h(B)\big) &= h\big(F_1^{-1}(B)\big) = h(B). \end{aligned}$$

Es gelte $\mu_1(B) = 0$. Dann ist

$$\mu_2(h(B)) \overset{\text{Def. von } \mu_2}{=} \mu_1\big((h^{-1} \circ h)(B)\big) = \mu_1(B) = 0.$$

Analog folgt $\mu_2(h(B)) = 1$ aus $\mu_1(B) = 1$. $\boxed{\text{B}}$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

SATZ 5.5. *Seien dynamische Systeme (X_1, F_1) und (X_2, F_2) topologisch konjugiert. Ist F_1 ergodisch bezüglich eines invarianten Maßes μ_1, so ist F_2 ergodisch bezüglich $\mu_2(\cdot) = \mu_1(h^{-1}(\cdot))$.*

BEISPIEL. *Logistische Abbildung $F_a(x) = ax(1-x)$ mit $a = 4$. F_4 und T_2 sind topologisch konjugiert mit*

$$h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

T_2 ist ergodisch bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes $\lambda|_{[0,1]}$. Mit Satz 5.5 ist die Abbildung F_4 ergodisch bezüglich des Maßes

$$\mu(A) = \lambda\big(h^{-1}(A)\big) = \int_{h^{-1}(A)} dx \overset{x=h^{-1}(y)}{=} \int_A \frac{dy}{\pi\sqrt{y(1-y)}},$$

denn $\frac{d}{dx}\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

Bleibt die Ergodizität unter topologischer Semikonjugation erhalten? Die Antwort ist positiv:

SATZ 5.6. *Sei* (X_2, F_2) *ein topologischer Faktor von* (X_1, F_1). *Ist* F_1 *ergodisch bezüglich eines invarianten Maßes* μ_1, *so ist* F_2 *ergodisch bezüglich* $\mu_2(\cdot) = \mu_1(h^{-1}\cdot))$.

Der Beweis von Satz 5.5 lässt sich fast vollständig auf den Fall übertragen, wenn die Abbildung $h : X_1 \to X_2$ surjektiv aber nicht injektiv ist. Das einzige Problem besteht darin, dass (**??**) nur für bijektives h bewiesen worden ist. Wir argumentieren nun wie foglt. Aus $h \circ F_1 = F_2 \circ h$ folgt, dass $(h \circ F_1)(h^{-1}(A)) = F_2(A)$. Somit gilt für die Urbilder $F_1(h^{-1}(A)) = h^{-1}(F_2(A))$. Nun setze $A = F_2^{-1}(B)$ und erhalte $F_1\Big(h^{-1}(F_2^{-1}(B))\Big) = h^{-1}(B)$. Folglich gilt $h^{-1}(F_2^{-1}(B)) = F^{-1}(h^{-1}(B))$.

5.2. Konvergenz von Maßfolgen

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $M(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeits-Borelmaße auf X. Offenbar ist $M(X) \neq 0$. $M(X)$ ist eine konvexe Menge, denn $p\mu + (1-p)\nu \in M(X)$ für alle $p \in [0, 1]$ und alle $\mu, \nu \in M(X)$.

Da der metrische Raum (X, d) kompakt ist, ist der Banachraum $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ separabel. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von $C(X)$. Betrachte

$$d_M(\mu, \nu) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n \|f_n\|} \left| \int_X f_n(x)\, d\mu(x) - \int_X f_n(x)\, d\nu(x) \right|$$

BEHAUPTUNG. d_M ist eine Metrik auf $M(X)$.

BEWEIS. Die Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar. Es bleibt nur zu zeigen, dass aus $d_M(\mu, \nu) = 0$ die Gleichheit $\mu = \nu$ folgt. Es gelte

$$\int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f_n(x)\, d\nu(x)\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sei $f \in C(X)$ beliebig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein f_n mit $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Dann ist

$$\left| \int_X f(x)\, d\mu(x) - \int_X f(x)\, d\nu(x) \right| \le \underbrace{\left| \int_X f_n(x)\, d\mu(x) - f_n(x)\, d\nu(x) \right|}_{=0}$$

$$+ \int_X \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon}\, d\mu(x) + \int_X \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon}\, d\nu(x) < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\nu(x)\ \forall\, f \in C(X).$$

Mit Lemma 4.16 folgt daraus, dass $\mu = \nu$ ist. $\boxed{\text{B}}$

LEMMA 5.7. *Eine Folge μ_j in $(M(X), d_M)$ konvergiert gegen $\mu \in M(X)$ genau dann, wenn*

$$\int_X f(x)\, d\mu_j(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x)\, d\,\mu(x)$$

für jedes $f \in C(X)$.

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Sei $f \in C(X)$ beliebig. Wähle f_n mit $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Betrachte

$$\Big|\int_X f(x)\, d\mu_j(x) - \int_X f(x)\, d\mu(x)\Big| \leq \int_X \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon}\, d\mu_j(x)$$

$$+ \int_X \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon}\, d\mu(x) + \underbrace{\Big|\int_X f_n(x)\, d\mu_j(x) - \int_X f_n(x)\, d\mu(x)\Big|}_{\searrow_{j\to\infty}\, 0}.$$

Folglich gilt

$$\limsup_{j\to\infty} \Big|\int_X f(x)\, d\mu_j(x) - \int_X f(x)\, d\mu(x)\Big| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f(x)\, d\mu_j(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left|\int f_n(x)\, d\mu_j(x) - \int f_n(x)\, d\mu(x)\right|}{2^n \|f_n\|_\infty}$$

$$\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Wähle $L \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\Big|\int_X f_n(x) d\mu_j(x) - \int_X f_n(x) d\mu(x)\Big| < \varepsilon \|f_n\|_\infty$$

für alle $n = 1, 2, \ldots, N$ und alle $j \geq L$. Folglich gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \Big|\int_X f_n(x) d\mu_j(x) - \int_X f_n(x) d\mu(x)\Big| < \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Somit ist $d_M(\mu_j, \mu) < 2\varepsilon$. □

BEMERKUNG. *Die von der Metrik d_M erzeugte Topologie hängt nicht von der Wahl der dichten Teilmenge $\{f_n\}$ ab. Diese Topologie heißt schwach∗-Topologie (vgl. Funktionalanalysis).*

LEMMA 5.8. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\mu_j \xrightarrow{d_M} \mu$;

(b) $\limsup_{j\to\infty} \mu_j(K) \le \mu(K)$ *für alle kompakten* $K \subset X$;

(c) $\liminf_{j\to\infty} \mu_j(U) \ge \mu(U)$ *für alle offenen* $U \subset X$;

(d) $\mu_j(A) \to \mu(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{B}(X)$ *mit* $\mu(\partial A) = 0$.

Beweis. (a)$\Rightarrow$ (b) Sei $K \subset X$ kompakt. Bezeichne

$$U_j := \Big\{ x \in X \,\Big|\, d_X(x, K) < \frac{1}{j} \Big\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Die Mengen U_j sind offen und $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset K$. Nach Satz 4.10 gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \inf\{\mu(U) \mid U \supset K,\, U \subset X \text{ offen}\} \\ &\le \lim_{j\to\infty} \mu(U_j). \end{aligned}$$

Für jedes offene $U \supset K$ mit $\mu(U) < \mu(K) + \varepsilon$ kann man ein U_j finden, sodass $\mu(U_j) < \mu(U)$ ist. Daher gilt

$$\mu(K) = \lim_{j\to\infty} \mu(U_j).$$

Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es nach Lemma von Urysohn ein $f_j \in C(X)$ mit $0 \le f_j \le 1$, $f_j\big|_K = 1$ und $f_j\big|_{X\setminus U_j} = 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) &\le \limsup_{n\to\infty} \int_X f_j(x)\, d\mu_n(x) \\ &= \int_X f_j(x)\, d\mu(x) \le \mu(U_j) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \to \infty$ erhält man

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \le \mu(K).$$

(b)$\Rightarrow$ (c) Sei $U \subset X$ offen. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\underbrace{X\setminus U}_{\text{kompakt}}) \le \mu(X\setminus U)$$

und folglich

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) = 1 - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(X\setminus U) \ge 1 - \mu(X\setminus U) = \mu(U).$$

(c)$\Rightarrow$ (b) analog.

(b),(c)$\Rightarrow$ (d) Sei $A \subset X$ eine Borelmenge mit $\mu(\partial A) = 0$. Dann ist $\mu(\mathring{A}) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$ und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \le \mu(\overline{A}) = \mu(A)$$

sowie

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{A}) \ge \mu(\mathring{A}) = \mu(A).$$

Wegen $\mu_n(\overset{\circ}{A}) \leq \mu_n(A) \leq \mu_n(\overline{A})$ folgt daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

(d)$\Rightarrow$ (a) Sei $f \in C(X)$ beliebig. Betrachte

$$\nu_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+, \quad \nu_f(B) := \mu\big(\{x \in X \,|\, f(x) \in B\}\big) = \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

Also ist ν_f ein Borelmaß mit $\nu_f(\mathbb{R}) = \mu(X) = 1$. Da f beschränkt ist, ist $\nu_f\big((-\infty, -t)\big) = \nu_f\big((t, +\infty)\big) = 0$ für hinreichend große $t > 0$.

Betrachte die Vertreilungsfunktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \nu_f\big((-\infty, t)\big)$ des Maßes ν_f. Diese Funktion ist monoton wachsend und links stetig.

Behauptung. Die Funktion $t \mapsto \varphi(t) := \nu_f\big((-\infty, t)\big)$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Beweis. Sei φ im Punkt t_0 nicht stetig, d.h.

$$\varphi(t_0) < \varphi(t_0 + 0).$$

Dann existiert ein $w_{t_0} \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(t_0) < w_{t_0} < \varphi(t_0 + 0)$. Ist $t_1 > t_0$ eine weitere Unstetigkeitsstelle, so gilt $w_{t_0} < w_{t_1}$. Sei $D \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Stellen, wo φ nicht stetig ist. Dann ist die Funktion $D \ni t \mapsto w_t$ streng monoton wachsend. Somit ist die Abbildung $D \ni t \mapsto w_t$ bijektiv. Folglich ist die Menge D höchstens abzählbar. $\boxed{\text{B}}$

Ist φ im Punkt t_0 stetig, so gilt $\nu_f(\{t_0\}) = 0$, d.h. $\mu\big(\{x \in X \,|\, f(x) = t_0\}\big) = 0$.

Zu jedem ε gibt es Zahlen

$$\min_{x\in X} f(x) = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \max_{x\in X} f(x)$$

mit $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ für alle $j = 1, 2, \ldots, m$ und

$$\mu\big(\{x \in X \,|\, f(x) = t_j\}\big) = 0.$$

Seien $A_j := \{x \in X \,|\, t_{j-1} \leq f(x) < t_j\}$, $j = 1, \ldots, m$. Die Mengen $A_1, \ldots, A_m$ sind Borelsch, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{j=1}^{m} A_j = X$. Ferner gilt $\mu(\partial A_j) = 0$. Nach der Voraussetzung gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_j) = \mu(A_j).$$

Sei nun $g(x) = \sum_{j=1}^{m} t_{j-1} 1_{A_j}(x)$. Dann ist $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Betrachte

$$\Big| \int_X f(x)\, d\mu_n(x) - \int_X f(x)\, d\mu(x) \Big| \leq \int_X \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{<\varepsilon}\, d\mu_n(x)$$

$$+ \int_X \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{<\varepsilon}\, d\mu(x) + \Big| \int_X g(x)\, d\mu_n(x) - \int_X g(x)\, d\mu(x) \Big|$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} |\mu_n(A_j) - \mu(A_j)|\, |t_{j-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\varepsilon.$$

□

SATZ 5.9. *Der metrische Raum $(M(X), d_M)$ ist kompakt und somit vollständig.*

BEWEISSKIZZE. Es genügt die Folgenkompaktheit zu zeigen. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M(X)$. Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine totale Menge in $C(X)$. Betrachte

$$C_{kn} := \int_X f_k(x)\, d\mu_n(x).$$

Mit dem Diagonalfolgenverfahren erhält man die Existenz einer Teilfolge $(C_{kn(\ell)})_{\ell\in\mathbb{N}}$, die für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. Sei

$$J(f_k) := \lim_{\ell\to\infty} \int_X f_k(x) d\mu_{n(\ell)}(x).$$

Das Funktional J lässt sich ganz auf X als stetiges lineares positives Funktional fortsetzen. Somit gibt es ein $\mu \in M(X)$ mit

$$J(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

Nach Lemma 5.7 gilt $\mu_{n(\ell)} \xrightarrow{d_M} \mu$. □

BEMERKUNG. *$(M(X), d\mu)$ ist kompakt genau dann, wenn (X, d_∞) kompakt ist. Die Implikation „$\Leftarrow$" ist Lemma 3.9. Um die Implikation „$\Rightarrow$" zu beweisen betrachte die Abbildung $X \to M(X)$, $x \mapsto \delta_x$. Sei $M_\delta(X) := \{\delta_x \,|\, x \in X\}$. Die Menge $M_\delta(X) \subset M(X)$ ist abgeschlossen und somit kompakt. Die Abbildung $x \mapsto \delta_x$ ist ein Homöomorphismus zwischen X und $M_\delta(X)$. Folglich ist X kompakt.*

5.3. Existenz eines ergodischen Maßes

5.3.1. Konvexe Mengen und Extremalpunkte.

DEFINITION 5.10. *Sei X ein Vektorraum und $K \subset X$ konvex. Ein Punkt $x \in K$ heißt* Extremalpunkt *von K, falls*

$$x_1, x_2 \in K, \quad 0 < t < 1, \quad tx_1 + (1-t)x_2 = x \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x.$$

Die Menge aller Extremalpunkte von K bezeichnet man mit $\mathrm{ex}(K)$.

Alle Extremalpunkte einer Menge liegen auf dem Rand dieser Menge, $\mathrm{ex}(K) \subset \partial K$. Ein Randpunkt braucht aber nicht extremal zu sein.

BEISPIELE.
(1) *Sei $X = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{ex}([a, b]) = \{a, b\}$ und $\mathrm{ex}((a, b)) = \emptyset$.*
(2) *Sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathrm{ex}(\overline{B_1(0)}) = \partial B_1(0)$.*
(3) *Sei $X = C([0, 1])$, $K = \{x \in C([0, 1]) \,|\, 0 \le x(t) \le 1\}$. Dann ist $\mathrm{ex}(K) = \{0, 1\}$.*
(4) *Sei $X = L^\infty([0, 1])$, $K = \{x \in X \,|\, 0 \le x(t) \le 1$ fast überall$\}$. Dann ist $\mathrm{ex}(K) = \{1_E \,|\, E \subset [0, 1], E$ messbar$\}$.*
(5) *Sei $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ oder ℓ^p, $1 < p < \infty$, $K = \overline{B_1(0)}$. Dann ist $\mathrm{ex}(K) = \partial B_1(0)$. Gilt in einem normierten Raum X die Gleichheit $\mathrm{ex}(\overline{B_1(0)}) = \partial B_1(0)$, so heißt X strikt konvex.*
(6) *Sei $X = L^1([0, 1])$, $K = \overline{B_1(0)}$. Dann ist $\mathrm{ex}(K) = \emptyset$.*

BEWEIS. Es gelte $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$. Die Funktion $s \mapsto \int_0^s |f(t)|\,dt$ ist stetig. Somit existiert ein s_0 mit $\int_0^{s_0} |f(t)|\,dt = 1/2$. Setze

$$f_1 := 2 \cdot 1_{[0,s_0]} f, \qquad f_2 := 2 \cdot 1_{[s_0,1]} f.$$

Dann ist

$$\|f_1\| = \|f_2\| = 1, \quad f_1 \neq f_2 \text{ und } f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

□

(7) *Für jede konvexe kompakte Teilmenge* $K \subset \mathbb{R}^n$ *ist* $\operatorname{ex}(K) \neq \emptyset$ *und* $K = \operatorname{konv}(\operatorname{ex}(K))$ *(Satz von Minkowski). Hier bezeichnet* konv *die konvexe Hülle.*

SATZ 5.11 (Krein-Milman). *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ kompakt. Ist K konvex, so gilt* $\operatorname{ex}(K) \neq \emptyset$ *und*

$$K = \overline{\operatorname{konv}(\operatorname{ex}(K))}.$$

5.3.2. Ergodische Maße als Extremalpunkte. Sei $F : X \to X$ stetig. Sei $M_F(X) \subset M(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsborelmaße auf X, die bezügich F invariant sind. $M_F(X)$ ist konvex, denn aus $\mu_1, \mu_2 \in M_F(X)$ folgt

$$\begin{aligned}
\big(t\mu_1 + (1-t)\mu_2\big)\big(F^{-1}(B)\big) &= t\mu_1\big(F^{-1}(B)\big) + (1-t)\mu_2\big(F^{-1}(B)\big)\\
&= t\mu_1(B) + (1-t)\mu_2(B)\\
&= \big(t\mu_1 + (1-t)\mu_2\big)(B)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $B \in \mathcal{B}(X)$.

BEHAUPTUNG. $M_F(X)$ ist abgeschlossen.

BEWEIS. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M_F(X)$ mit Grenzwert $\mu \in M(X)$. Sei $\tilde{\mu}(B) := \mu\big(F^{-1}(B)\big)$ für $B \in \mathcal{B}(X)$. Für beliebiges $f \in C(X)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)d\tilde{\mu}(x) &\overset{\text{Bew. von Satz 4.15}}{=} \int_X f\big(F(x)\big)\,d\mu\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f\big(F(x)\big)d\mu_n\\
&\overset{\text{Bew. von Satz 4.15}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\,d\mu_n(x)\\
&= \int_X f(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.16 ist $\tilde{\mu} = \mu$. Also ist $\mu \in M_F(X)$. $\boxed{\text{B}}$

LEMMA 5.12. *$M_F(X)$ ist kompakt.*

BEWEIS. $M_F(X)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes. □

LEMMA 5.13. *Ist $\mu \in M_F(X)$ nicht ergodisch, so existieren $\mu_1, \mu_2 \in M_F(X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$, und $0 < t < 1$, sodass $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$.*

Beweis. Ist μ ist nicht ergodisch, so existiert eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $F^{-1}(A) = A$ und $0 < \mu(A) < 1$. Setze

$$\mu_1(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \quad \text{und} \quad \mu_2(B) := \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(X)$. Betrachte

$$\begin{aligned} \mu_1(F^{-1}(B)) &= \frac{\mu(F^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} \\ &= \frac{(F^{-1}(B) \cap F^{-1}(A))}{\mu(A)} \\ &= \frac{(F^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} \\ &= \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_1(B). \end{aligned}$$

Also ist μ_1 F-invariant. Analog zeigt man, dass μ_2 F-invariant ist. Sei $t = \mu(A)$. Dann gilt $\mu(B) = t\mu_1(B) + (1-t)\mu_2(B)$. □

Korollar 5.14. *Ist $\mu \in \mathrm{ex}(M_F(X))$, so ist μ ergodisch.*

Beweis. Sei μ nicht ergodisch, dann ist $\mu \notin \mathrm{ex}(M_F(X))$. Widerspruch! □

Aufgabe 5.15. $\mathrm{ex}(M(X)) = \{\delta_x \mid x \in X\}$.

Um die Existenz ergodischer Maße zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass $\mathrm{ex}(M_F(X)) \neq \varnothing$. Das wollen wir mit dem Satz von Krein-Milman machen.

Sei $\mathfrak{M} = \mathrm{lin}\, M(X)$, der Vektorraum signierter Borelmaße. Setze

$$\|\mu\|_{\mathfrak{M}} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \|\varphi_n\|} \left| \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x) \right|,$$

wobei $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von $C(X)$ ist. $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathfrak{M}$.

Satz 5.16. *Sei X kompakt und $F : X \to X$ stetig. Dann ist $\mathrm{ex}(M_F(X)) \neq \varnothing$. Alle $\mu \in \mathrm{ex}(M_F(X))$ sind ergodisch. Somit besitzt jedes stetige $F : X \to X$ ein ergodisches Maß.*

Beweis. $M_F(X) \subset \mathfrak{M}$ ist konvex und kompakt. Mit dem Satz von Krein-Milman ist $\mathrm{ex}(M_F(X)) \neq \varnothing$. Mit Korollar 5.14 ist jedes $\mu \in \mathrm{ex}(M_F(X))$ ergodisch. □

Korollar 5.17. *Gilt $M_F(X) = \{\mu\}$, so ist μ ergodisch.*

Bemerkung. *Gilt $M_F(X) = \{\mu\}$, so heißt F* eindeutig ergodisch.

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 5.16:

Satz 5.18. *Sei X kompakt. Ist $\mu \in M_F(X)$ ergodisch, so ist $\mu \in \mathrm{ex}(M_F(X))$.*

Dieser Satz wird am Ende des Abschnittes bewiesen.

DEFINITION 5.19. *Zwei Borelmaße μ, ν heißen* zueinander singulär, *wenn es eine Zerlegung $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ gibt, sodass $\mu(A) = 0$ und $\nu(B) = 0$. In Zeichen: $\mu \perp \nu$.*

BEISPIEL. *Sei $X = [0,1]$. Dann ist das Lebesgue-Borelmaß $\lambda|_{[0,1]}$ und das Diracmaß $\delta_{1/2}$ zueinander singulär. Um das zu beweisen wählen wir $A = [0,1/2) \cup (1/2,1]$ und $B = \{1/2\}$. Dann ist $\lambda(B) = 0$ mit $\delta_{1/2}(A) = 0$.*

DEFINITION 5.20. *Seien μ, ν Wahrscheinlichkeits-Borelmaße auf X.*

(1) *μ heißt* absolut stetig *bezüglich ν, falls $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ mit $\nu(B) = 0$. In Zeichen: $\mu \ll \nu$.*
(2) *Gilt $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$, so heißen μ und ν* äquivalent.

SATZ 5.21 (Zerlegungssatz von Lebesgue). *Seien μ, ν Wahrscheinlichkeits-Borelmaße auf X. Dann gibt es eine Zahl $p \in [0,1]$ und Wahrscheinlichkeits-Borelmaße μ_1 und μ_2, sodass*

$$\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2, \qquad \mu_1 \ll \nu, \qquad \mu_2 \perp \nu.$$

Die Zahl p und Maße μ_1, μ_2 sind eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis.

SATZ 5.22. *Sind $\mu, \nu \in M_F(X)$, $\mu \neq \nu$ ergodisch, so ist $\mu \perp \nu$.*

BEWEIS. Nach Satz 5.21 gibt es ein $p \in [0,1]$ und Wahrscheinlichkeits-Borelmaße μ_1, μ_2, sodass

$$\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2,\ \mu_1 \ll \nu,\ \mu_2 \perp \nu.$$

Da μ F-invariant ist, gilt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(F^{-1}(B)) \\ &= p\mu_1\big(F^{-1}(B)\big) + (1-p)\mu_2\big(F^{-1}(B)\big) \\ &= p\tilde{\mu}_1(B) + (1-p)\tilde{\mu}_2(B) \quad \forall\, B \in \mathcal{B}(X) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mu}_i(B) := \mu_i\big(F^{-1}(B)\big)$, $i = 1,2$.

Das Maß ν ist F-invariant, d.h. $\tilde{\nu}(B) := \nu\big(F^{-1}(B)\big) = \nu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(X)$. Aus $\mu_1 \ll \nu$ und $\mu_2 \perp \nu$ folgt $\tilde{\mu}_1 \ll \tilde{\nu} = \nu$ und $\tilde{\mu}_2 \perp \tilde{\nu} = \nu$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung gilt:

$$\mu_1 = \tilde{\mu}_1, \quad \mu_2 = \tilde{\mu}_2 \Rightarrow \mu_1, \mu_2 \in M_F(X).$$

Da μ ergodisch ist, folgt mit Satz 5.18 $\mu \in \mathrm{ex}(M_F(X))$. Also gilt entweder $p = 0$ oder $p = 1$.

Für $p = 0$ gilt $\mu = \mu_2 \perp \nu$. Sei nun $p = 1$. Dann gilt $\mu = \mu_1 \ll \nu$.

BEHAUPTUNG. (Satz von Radon-Nikodym) Ist $\mu \ll \nu$, so gibt es ein $f \in L^1(X, d\nu)$, $f \geq 0$, $\int_X f(x)\, d\nu(x) = 1$, sodass $\mu(B) = \int_B f(x)\, d\nu(x)$ für alle $B \in \mathcal{B}(X)$. Die Funktion f heißt Radon-Nikodym-Ableitung von μ nach ν.

Sei $E := \{x \in X | f(x) < 1\}$. Es gilt

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\nu(x) = \int_{E \cap F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x) + \int_{E \setminus F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x)$$

und

$$\begin{aligned}\mu(E) = \mu(F^{-1}(E)) &= \int_{F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x) \\ &= \int_{E\cap F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x) + \int_{F^{-1}(E)\setminus E} f(x) d\nu(x).\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{E\setminus F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x) = \int_{F^{-1}(E)\setminus E} f(x) d\nu(x), \tag{5.1}$$

d.h. $\mu(E \setminus F^{-1}(E)) = \mu(F^{-1}(E) \setminus E)$. Die Mengen $E \setminus F^{-1}(E)$ und $F^{-1}(E) \setminus E$ haben auch das gleiche ν-Maß, denn

$$\begin{aligned}\nu(F^{-1}(E) \setminus E) &= \nu(F^{-1}(E)) - \nu(F^{-1}(E) \cap E) \\ &= \nu(E) - \nu(F^{-1}(E) \cap E) = \nu(E \setminus F^{-1}(E)).\end{aligned}$$

Angenommen, dass $\nu(F^{-1}(E) \setminus E) \neq 0$. Da $f(x) < 1$ für alle $x \in E \setminus F^{-1}(E)$ und $f(x) \geq 1$ für alle $x \in F^{-1}(E) \setminus E$, folgt aus (5.1), dass

$$\nu(F^{-1}(E) \setminus E) \leq \int_{F^{-1}(E)\setminus E} f(x) d\nu(x) = \int_{E\setminus F^{-1}(E)} f(x) d\nu(x) < \nu(E \setminus F^{-1}(E)).$$

Widerspruch! Also ist $\nu(F^{-1}(E) \setminus E) = \nu(E \setminus F^{-1}(E)) = 0$ und somit

$$\nu(E \triangle F^{-1}(E)) = 0,$$

wobei $A \triangle B$ die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B bezeichnet.

Behauptung. Gilt $\nu(E \triangle F^{-1}(E)) = 0$, so ist $\nu(E) = 0$ oder $\nu(E) = 1$.

Beweis. Setze

$$\widetilde{E} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k}(E).$$

Wegen

$$F^{-n}(E) \triangle E \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} F^{-(k+1)}(E) \triangle F^{-k}(E) = \bigcup_{k=0}^{n-1} F^{-k} \left(F^{-1}(E) \triangle E\right)$$

ist $F^{-n}(E) \triangle E$ eine ν-Nullmenge für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt

$$\nu \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k}(E) \triangle E \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \nu \left(F^{-k}(E) \triangle E\right) = 0.$$

Da die Mengenfolge

$$n \mapsto \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k}(E)$$

monoton fallend ist, gilt

$$\begin{aligned}\nu(\widetilde{E} \triangle E) &= \nu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k}(E) \triangle E \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k}(E) \triangle E \right) = 0.\end{aligned}$$

Weiterhin ist die Menge $\widetilde{E}$ F-invariant, denn

$$F^{-1}(\widetilde{E}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k-1}(E) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n+1}^{\infty} F^{-k}(E)$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k-1}(E) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F^{-k-1}(E) = \widetilde{E}.$$

Wegen der Ergodizität ist $\nu(E) = \nu(\widetilde{E}) = 0$ oder $\nu(E) = \nu(\widetilde{E}) = 1$. $\boxed{\text{B}}$

Ist $\nu(E) = 1$, so gilt

$$1 = \mu(X) = \int_E f(x)d\nu(x) + \int_{X \setminus E} f(x)d\nu(x) = \int_E f(x)d\nu(x) < \nu(E) = 1.$$

Widerspruch! Somit gilt $\nu(E) = 0$.

Sei nun $F := \{x \in X | f(x) > 1\}$. Analog zum obigen Beweis erhalten wir $\nu(F) = 0$. Somit ist $f(x) = 1$ ν-fast überall und folglich $\mu = \nu$. Widerspruch! $\square$

Beweis von Satz 5.18. Sei die Wahrscheinlichkeitsborelmaß μ erodisch. Angenommen, $\mu \in M_F(X)$ wäre kein Extremalpunkt, d.h. es gäbe $\mu_1, \mu_2 \in M_F(X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$, und ein $p \in (0,1)$, sodass $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ ist. Offenbar ist das Maß μ_1 bezüglich μ absolut stetig, $\mu_1 \ll \mu$. Sei f die Radon-Nikodym-Ableitung von μ_1 nach μ, d.h.

$$\mu_1(B) = \int_B f(x)d\mu(x) \qquad \text{für alle} \qquad B \in \mathcal{B}(X).$$

Setze

$$E = \{x \in X | f(x) < 1\} \qquad \text{und} \qquad F = \{x \in X | f(x) > 1\}.$$

Wie im Beweis von Satz 5.22 lässt sich zeigen, dass $\mu(E) = \mu(F) = 0$. Also ist $f(x) = 1$ für μ-fast alle $x \in X$. Somit ist $\mu_1 = \mu$. Widerspruch! $\square$

5.3.3. Ergodizität und topologische Transitivität.

Satz 5.23. *Die stetige Abbildung $F : X \to X$ besitze ein invariantes Wahrscheinlichkeits-Borelmaß μ, sodass $\mu(U) > 0$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$. Falls F bezüglich μ ergodisch ist, so ist*

$$\mu\left(\{x \in X \,|\, \{F^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0} \textit{ ist dicht in } X\}\right) = 1.$$

Insbesondere ist das dynamische System (X, F) topologisch transitiv.

Für den Beweis brauchen wir zwei Hilfsergebnisse.

Lemma 5.24. *Sei $\mu \in M_F(X)$. Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ eine Teilmenge mit $F^{-1}(A) \subset A$. Dann gibt es eine Borelmenge $\tilde{A} \subset A$ mit $\mu(A \setminus \tilde{A}) = 0$ und $F^{-1}(\tilde{A}) = \tilde{A}$. (Keine Ergodizität ist vorausgesetzt!)*

Beweis. Wir zeigen zunchst, dass $F^{-1}(A) \supset F^{-2}(A)$. Angenommen, es gäbe ein $x \in F^{-2}(A)$ mit $x \notin F^{-1}(A)$. Dann ist $F(x) \notin A$ und $F\big(F(x)\big) \in A$. Folglich ist $F(x) \notin A$ und $F(x) \in F^{-1}(A) \subset A$. Widerspruch!

Also gilt

$$A \supset F^{-1}(A) \supset F^{-2}(A) \supset F^{-3}(A) \ldots .$$

Definiere
$$\tilde{A} := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(A) \subset A.$$
Diese Menge ist offensichtlich Borelsch. Sie is F-invariant, denn
$$F^{-1}(\tilde{A}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^{-k}(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(A) = \tilde{A}.$$
Da die Mengenfolge $n \mapsto \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(A)$ monoton wachsend ist, gilt
$$\begin{aligned}
\mu(\tilde{A}) &= \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(A)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu\big(F^{-k}(A)\big) \overset{\mu\in M_F(X)}{=} \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A) = \mu(A).
\end{aligned}$$

□

Lemma. *In jedem separablen metrischen Raum (X,d) lässt sich jede offene Teilmenge $A \subset X$ als eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Kugeln darstellen, d.h. es gibt eine abzählbare Basis der Topologie.*

Beweis. Sei $\{x_k | k \in N_0\}$ mit $N_0 \subset \mathbb{N}$ eine dichte Teilmenge in X. Setze
$$N_1 := \{k \in N_0 | x_k \in A\}.$$
Für jedes $k \in N_1$ setze
$$\ell_k := \min\{\ell \in \mathbb{N} | B_{2^{-\ell}}(x_k) \subset A\}.$$
Dann gilt offenbar $B_{2^{-\ell}}(x_k) \subset A$ für alle $k \in N_1$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq \ell_k$. Somit ist
$$\bigcup_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k) \subset A.$$
Sei nun $x \in A$ beliebig. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $B_{2^{-\ell}}(x) \subset A$ für alle $l \geq m$. Es gibt ein x_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $x_k \in B_{2^{-m-1}}(x)$. Es gilt also sogar $k \in N_1$. Sei $y \in B_{2^{-m-1}}(x_k)$ beliebig. Dann gilt
$$d(x,y) \leq d(x,x_k) + d(x_k,y) < 2^{-m-1} + 2^{-m-1} = 2^{-m}$$
und folglich
$$B_{2^{-m-1}}(x_k) \subset B_{2^{-m}(x)} \subset A.$$
Insbesondere folgt daraus, dass $m+1 \geq \ell_k$. Wegen
$$x \in B_{2^{-m-1}}(x_k) \subset B_{2^{-\ell_k}}(x_k)$$
gilt $x \in \bigcup\limits_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k)$, d.h.
$$A \subset \bigcup_{k\in N_1} B_{2^{-\ell_k}}(x_k).$$

□

BEWEIS VON SATZ 5.23. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel. Sei $\{B_{r_n}\}(x_n)|n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der Topologie, d.h. jede offene Menge kann als $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_{n(k)}}(x_{n(k)})$ dargestellt werden. Setze

$$U_n := B_{r_n}(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

BEHAUPTUNG. $\{F^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist dicht in X gilt genau dann, wenn $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n) &= \{x \in X \,|\, \exists\, \ell \in \mathbb{N}_0 : F^\ell(x) \in U_n\} \\ \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n) &= \{x \in X \,|\, \forall\, n \in \mathbb{N} \exists\, \ell \in \mathbb{N}_0 : F^\ell(x) \in U_n\}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Es gilt

$$F^{-1}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F^{-k}(U_n) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n).$$

Nach Lemma 5.24 gibt es eine Borelmenge

$$\tilde{A} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)$$

mit

$$F^{-1}(\tilde{A}) = \tilde{A} \quad \text{und} \quad \mu(\tilde{A}) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big).$$

Da F ergodisch ist, gilt entweder $\mu(\tilde{A}) = 0$ oder $\mu(\tilde{A}) = 1$, d.h.

$$\text{entweder } \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) = 0 \text{ oder } \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) = 1.$$

Wegen der Steigkeit von F sind die Mengen $F^{-k}(U_n)$ offen. Folglich ist

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) > 0$$

und somit

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) = 1.$$

Nun betrachte

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) &= 1 - \mu\Big(X \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) \\ &= 1 - \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n))\Big) \\ &\overset{\sigma\text{-Subadditivität}}{\geq} 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(X \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F^{-k}(U_n)\Big) = 1. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mu\left(\left\{x \in X \mid \{F^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ ist dicht in } X\right\}\right) = 1.$$

□

5.4. Der Ergodensatz von Birkhoff

Sei μ ein Borelmaß. Man definiert

$$L^1(X,\mu) := \left\{u : X \to \mathbb{R} \text{ Borelsch} \;\middle|\; \int_X |u(x)|\, d\mu(x) < \infty\right\}/\mathcal{N}$$

wobei

$$\mathcal{N} := \{u : X \to \mathbb{R} \text{ Borelsch} \mid u(x) = 0 \quad \mu - \text{fast überall}\}.$$

Satz 5.25. *Die Borelabbildung $F : X \to X$ besitze ein invariantes Wahrscheinlichkeits-Borelmaß μ. Sei $\varphi \in L^1(X,\mu)$ beliebig. Dann existiert für μ-fast jedes $x \in X$ der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(F^k(x)) =: \varphi_F(x). \tag{5.2}$$

Die Funktion φ_F ist in $L^1(X,\mu)$ und μ-fast überall F invariant, d.h. $\varphi_F \circ F = \varphi_F$ fast überall. Es gilt

$$\int_X \varphi_F(x)\, d\mu(x) = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Ist μ ergodisch, so ist φ_F konstant mit

$$\varphi_F(x) = \int_X \varphi(y)\, d\mu(y). \tag{5.3}$$

Bemerkungen. (1) *Es gilt auch*

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(F^k(\cdot)) - \varphi_F\right\|_{L^1(X,\mu)} \to 0.$$

(2) *Die μ-Nullmenge, für welche der Grenzwert in (5.2) nicht existiert, hängt im Allgemeinen von φ ab.*
(3) *Für ergodische Abbildungen bedeuten (5.2) und (5.3)*

Zeitmittel = Raummittel.

In dieser Form wird der Ergodensatz in der Physik angewendet.
(4) *Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ beliebig. Für ein $x \in X$ wollen wir wissen, mit welcher relativen Häufigkeit die Punkte $x, F(x), F^2(x) \dots$ in der Menge $A \subset X$ liegen. Wähle $\varphi = 1_A$. Offenbar gilt*

$$\textit{Relative Häufigkeit} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A(F^k(x)).$$

Nach (5.2) existiert dieser Grenzwert für μ-fast alle $x \in X$. Ist μ ergodisch, so ist der Grenzwert konstant mit Wert

$$\int_X 1_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A).$$

Bevor wir den Ergodensatz beweisen, diskutieren wir einige Anwendungen.

Korollar 5.26. *Die Borelabbildung $F : X \to X$ besitze ein invariantes Wahrscheinlichkeits-Borelmaß μ. Dann ist F ergodisch genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(F^{-k}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B) \tag{5.4}$$

für alle $A, B \in \mathcal{B}(X)$ gilt.

Beweis. $(\Rightarrow)$ Sei F ergodisch. Wähle $\varphi = 1_A$. Nach Satz 5.25 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A\big(F^k(x)\big) = \mu(A) \text{ fast überall.}$$

Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A\big(F^k(x)\big) 1_B(x) = \mu(A) 1_B(x).$$

Betrachte

$$\int_X 1_A\big(F(x)\big) 1_B(x)\, d\mu(x) = \int_{\{x\in X \mid x\in B \text{ und } F^k(x)\in A\}} d\mu(x) = \mu\big(F^{-k}(A) \cap B\big).$$

Mit dem Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(F^{-k}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B).$$

$(\Leftarrow)$ Sei $E \in \mathcal{B}(X)$ eine F-invariante Menge, d.h. $F^{-1}(E) = E$. Setze in (5.4) $A = B = E$. Dann gilt

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(F^{-k}(E) \cap E\big) = \mu(E)^2.$$

Also ist $\mu(E)$ Null oder Eins. □

Wir beginnen den Beweis des Satzes von Birkhoff mit einigen Vorbereitungen.

Lemma 5.27. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Borelfunktionen, so sind*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ x &\mapsto \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ x &\mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \\ x &\mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

ebenfalls Borelsch.

Beweis. (1) Sei $g(x) := \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Menge

$$g^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \{x \in X \mid g(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) < a\}$$

ist Borelsch. Somit ist $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Also ist g eine Borelfunktion.

(2) Analog für Supremum.

(3) Es gilt
$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m(x)$$
mit
$$g_m(x) = \inf_{n\geq m} f_n(x).$$
Nach (1) und (2) ist $x \mapsto \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ Borelsch.

(4) Analog für Limes superior. □

Sei $u \in L^1(X,\mu)$ beliebig. Definiere
$$s_n(x;u) := \sum_{k=0}^{n-1} u(F^k(x)), \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } s_0(x;u) := 0.$$
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $s_n(\cdot;u)$ eine Borelfunktion. Nach Lemma 5.27 ist die Menge
$$A(u) := \left\{ x \in X \,|\, \sup_{n\geq 0} s_n(x;u) > 0 \right\}$$
Borelsch.

Lemma 5.28. *Für jedes $u \in L^1(X,\mu)$ gilt $\int_{A(u)} u(x)\,d\mu(x) \geq 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $s_n(\cdot;u) \in L^1(X,\mu)$. Dafür genügt es zu beweisen, dass $u(F(\cdot)) \in L^1(X,\mu)$ ist. Sei v_j eine monoton steigende Folge der Treppenfunktionen, sodass $v_j(x) \to |u(x)|$ für alle $x \in X$. Betrachte
$$\begin{aligned}
\int_X |u(F(x))|\,d\mu(x) &= \lim_{j\to\infty} \int_X v_j(F(x))\,d\mu(x) \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_X v_j(x)\,d\mu(x) = \int_X |u(x)|\,d\mu(x).
\end{aligned}$$
Also ist $u(F(\cdot) \in L^1(X,\mu)$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\begin{aligned}
s_k(F(x);u) &= \sum_{j=0}^{k-1} u(F^{j+1}(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{k} u(F^j(x)) - u(x) \\
&= s_{k+1}(x;u) - u(x).
\end{aligned}$$
Daher gilt für jedes $x \in X$:
$$\max_{0\leq k\leq n} s_k(F(x);u) = \max_{0\leq k\leq n} s_{k+1}(x;u) - u(x). \tag{5.5}$$
Bezeichne
$$\begin{aligned}
\Phi_n(x;u) &:= \max_{0\leq k\leq n} s_k(x;u), \\
\overline{\Phi}_n(x;u) &:= \max_{1\leq k\leq n} s_k(x;u).
\end{aligned}$$

Aus (5.5) folgt

$$\overline{\Phi}_{n+1} - u(x) = \Phi_n\big(F(x); u\big).$$

Also ist

$$u(x) = \overline{\Phi}_{n+1}(x; u) - \Phi_n\big(F(x); u\big) \geq \overline{\Phi}_n(x; u) - \Phi_n\big(F(x); u\big). \tag{5.6}$$

Betrachte die Mengen

$$A_n := \{x \in X \,|\, \Phi_n(x; u) > 0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Da $\Phi_n(\cdot; u)$ eine Borelfunktion ist, sind A_n Borelsch. Offenbar gilt $\overline{\Phi}(x; u) = \Phi_n(x; u)$, falls $x \in A_n$ und $\Phi_n(x; u) = 0$, falls $x \notin A_n$. Daher folgt aus (5.6), dass

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} u(x)\, d\mu(x) &\geq \int_{A_n} \overline{\Phi}(x; u)\, d\mu(x) - \int_{A_n} \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x) \\
&= \int_{A_n} \Phi_n(x; u)\, d\mu(x) - \int_{A_n} \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x) \\
&= \int_{X} \Phi_n(x; u)\, d\mu(x) - \int_{A_n} \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x) \\
&\overset{\Phi_n \geq 0}{\geq} \int_{X} \Phi_n(x; u)\, d\mu(x) - \int_{X} \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Behauptung. $\int_X \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x) = \Phi_n(x; u)\, d\mu(x)$.

Beweis. Ist $u : X \to \mathbb{R}$ stetig, so folgt die Behauptung aus Satz 4.15. Der Beweis von Satz 4.15 lässt sich auf allgemeine $u \in L^1(X, \mu)$ fast ohne Modifikationen übertragen. Man approximiert u durch eine Folge der Treppenfunktionen und zeigt die Gleichheit

$$\int_X \Phi_n\big(F(x); u\big)\, d\mu(x) = \int_X \Phi_n(x; u)\, d\tilde{\mu}(x)$$

mit $\tilde{\mu}(B) = \mu(F^{-1}(B))$ für $B \in \mathcal{B}(x)$. B

Mit der Behauptung erhalten wir, dass

$$\int_{A_n} u(x)\, d\mu(x) \geq 0.$$

Für $n \to \infty$ gilt $A_n \to A(u)$ im Sinne, dass $\mu(A_n \triangle A(u)) \to 0$. Also gilt

$$\int_{A(u)} u(x)\, d\mu(x) \geq 0.$$

□

Beweis des Ergodensatzes. (1) Beweisstrategie. Setze $s_n(x) := s_n(x; \varphi)$. Seien $a < b$ beliebig. Betrachte

$$E_{a,b} := \Big\{x \in X \,\Big|\, \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n(x)}{n} < a < b < \limsup \frac{s_n(x)}{n}\Big\}.$$

Wegen Lemma 5.27 ist $E_{a,b}$ Borelsch. Wir zeigen, dass $\mu(E_{a,b}) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$. Offenbar gilt

$$\Big\{x \in X \,\Big|\, \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n(x)}{n} \neq \limsup \frac{s_n(x)}{n}\Big\} = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} E_{a,b}.$$

Daher ist die Menge

$$\Big\{x \in X \,\Big|\, \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n(x)}{n} \neq \limsup \frac{s_n(x)}{n}\Big\}$$

Borelsch mit μ-Maß Null.

(2) Betrachte

$$g(x) := \begin{cases} \varphi(x) - b & \text{falls } x \in E_{a,b}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $g \in L^1(X, \mu)$. Mit Lemma 5.28 gilt

$$\int_{A(g)} g(x)\, d\mu(x) \geq 0 \tag{5.7}$$

für

$$\begin{aligned} A(g) &= \Big\{x \in X \,\Big|\, \sup_{n\geq 0} s_n(x; g) > 0\Big\} \\ &\overset{!}{=} \Big\{x \in X \,\Big|\, \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} s_n(x; g) > 0\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \,\Big|\, \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} s_n(x; \varphi) > b\Big\} \end{aligned}$$

(„$\overset{!}{=}$" ist leicht zu beweisen). Offensichtlich gilt $E_{a,b} \subset A(g)$.

Behauptung. Ist $x \notin E_{a,b}$, so ist $s_n(x; g) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $x \notin E_{a,b}$. Dann ist $g(x) = 0$. Betrachte

$$g\big(F(x)\big) = \begin{cases} \varphi\big(F(x)\big) - b & \text{falls } x \in E_{a,b}, \\ 0 & \text{falls } x \notin E_{a,b}. \end{cases}$$

Rekursiv zeigt man, dass

$$g\big(F^n(x)\big) = \begin{cases} \varphi\big(F^n(x)\big) - b & \text{falls } x \in E_{a,b}, \\ 0 & \text{falls } x \notin E_{a,b}. \end{cases}$$

Folglich ist $s_n(x; g) = 0$ für alle $x \notin E_{a,b}$. $\boxed{\text{B}}$

Aus der Behauptung folgt, dass $X \backslash E_{a,b} \subset X \backslash A(g)$. Also ist $A(g) \subset E_{a,b}$. Somit sind die Mengen $E_{a,b}$ und $A(g)$ gleich.

Aus (5.7) erhalten wir

$$\int_{E_{a,b}} g(x)\, d\mu(x) \geq 0,$$

d.h.

$$\int_{E_{a,b}} \varphi(x)\, d\mu(x) \geq b\mu(E_{a,b}).$$

Nun betrachten wir die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} a - \varphi(x) & \text{falls } x \in E_{a,b}, \\ 0 & \text{falls } x \notin E_{a,b}. \end{cases}$$

Analog beweisen wir die Ungleichung

$$\int_{E_{a,b}} \varphi(x)\, d\mu(x) \leq a\mu(E_{a,b}).$$

Folglich erhalten wir die zweiseitige Abschätzung

$$b\mu(E_{a,b}) \leq \int_{E_{a,b}} \varphi(x)\,d\mu(x) \leq a\mu(E_{a,b}).$$

Wegen $a < b$ kann sie nur dann gelten, wenn $\mu(E_{a,b}) = 0$ ist. Daher existiert der Grenzwert

$$\varphi_F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, s_n(x;\varphi)$$

für μ-fast alle $x \in X$.

(3) Nach Lemma 5.27 ist φ_F eine Borelfunktion. Betrachte

$$\frac{1}{n}\int_x |s_n(x;\varphi)|\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_x |\varphi(F^j(x))|\,d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi\|_{L^1(X,\mu)} = \|\varphi\|_{L^1(X,\mu)}.$$

Nach Lemma von Fatou gilt

$$\int_x |\varphi_F(x)|\,dx \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_x |s_n(x;\varphi)|\,dx \;\leq\; \|\varphi\|_{L^1(X,\mu)}.$$

Somit ist $\varphi_F \in L^1(X,\mu)$.

(4) Betrachte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\, s_n(F(x);\varphi) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(F^{j+1}(x)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(F^{j}(x)) \\
&= \frac{1}{n}\, s_{n+1}(x;\varphi) - \frac{1}{n}\,\varphi(x).
\end{aligned}$$

Im Grenzfall $n \to \infty$ erhalten wir

$$\varphi_F(F(x)) = \varphi_F(x) \;\mu\text{-fast überall.}$$

(5) Zunächst sei φ beschränkt, d.h. $|\varphi(x)| \leq M$ für μ-fast alle $x \in X$. Dann ist

$$\left|\frac{1}{n}\, s_n(x;\varphi)\right| \leq M \;\text{ und }\; |\varphi_F(x)| \leq M.$$

Folglich ist

$$\left|\frac{1}{n}\, s_n(x;\varphi) - \varphi_F(x)\right| \leq 2M.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt somit

$$\left\|\frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi) - \varphi_F\right\|_{L^1(X,\mu)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nun sei $\varphi \in L^1(X,\mu)$ beliebig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle ein $g \in L^\infty(X,\mu)$ so, dass $\|\varphi - g\|_{L^1(X,\mu)} < \frac{\varepsilon}{4}$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left\|\frac{1}{n}\, s_n(\cdot;g) - g_F\right\|_{L^1(X,\mu)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $n \geq N$. Für $n \geq N$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachte nun

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi) - \frac{1}{n+k}\, s_{n+k}(\cdot;\varphi) \right\|_{L^1(X,\mu)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi) - \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;g) \right\|_{L^1(X,\mu)} \\
&+ \left\| \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;g) - g_F \right\|_{L^1(X,\mu)} \\
&+ \left\| \frac{1}{n+k}\, s_{n+k}(\cdot;g) - g_F \right\|_{L^1(X,\mu)} \\
&+ \left\| \frac{1}{n+k}\, s_{n+k}(\cdot;g) - \frac{1}{n+k}\, s_{n+k}(\cdot;\varphi) \right\|_{L^1(X,\mu)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $(\frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(X,\mu)$. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(X,\mu)$ ist diese Folge konvergent.

Behauptung. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi) = \varphi_F$ in $L^1(X,\mu)$.

Beweis selbst.

Es gilt

$$\frac{1}{n} \int_x s_n(x;\varphi)\, d\mu(x) = \int_x \varphi(x)\, d\mu(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\left| \int_x \varphi(x)\, d\mu(x) - \int_x \varphi_F(x)\, d\mu(x) \right| \\
= \; &\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \int_x s_n(x;\varphi)\, d\mu(x) - \int_x \varphi_F(x)\, d\mu(x) \right| \\
\leq \; &\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n}\, s_n(\cdot;\varphi) - \varphi_F \right\|_{L^1(X,\mu)} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_x \varphi_F(x)\, d\mu(x) = \int_x \varphi(x)\, d\mu(x). \tag{5.8}$$

(6) Sei nun F ergodisch. Da φ_F F-invariant ist, ist diese Funktion μ-fast überall konstant. Aus Gleichung (5.8) erhält man

$$\varphi_F = \int_x \varphi(x)\, d\mu(x).$$

□

Eine Anwendung des Ergodensatzes:

Satz 5.29 (Borelscher Satz über normale Zahlen). *Die relative Häufigkeit einer bestimmten Ziffer im Dezimalbruch $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ Lebesgue-fast jeder Zahl $x \in [0,1]$ ist $1/10$.*

Bemerkung. *Betrachte* $0, x_1x_2\dots x_n$. *Sei* $a \in \{0,1,\dots,9\}$ *eine beliebige Ziffer. Zähle, wie oft die Ziffer* a *unter* $x_1x_2\dots x_n$ *zu finden ist und dividiere das Ergebnis durch* n. *Betrachte den Limes* $n \to \infty$.

Eine Zahl $x \in [0,1]$ *heißt* normal, *wenn die relative Häufigkeit einer bestimmten Ziffer im Dezimalbruch* $x = 0, x_1x_2x_3\dots$ $1/10$ *ist. Obwohl fast jede Zahl in* $[0,1]$ *normal ist, ist es nicht einfach eine solche Zahl zu finden. Einige Beispiele normaler Zahlen sind*

$$
\begin{aligned}
0,123456789101112131415161718192021\dots &\quad \textit{Champernowne, 1933},\\
0,235711131719232931374143\dots &\quad \textit{Copeland-Erdős, 1946},\\
0,149162536496481100121\dots &\quad \textit{Besicovich, 1953}.
\end{aligned}
$$

Beweis von Satz 5.29. Sei $F(x) = 10 \cdot x \,(\mathrm{mod}\, 1)$, $x \in [0,1]$. Das Lebesgue-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ ist F-invariant (siehe das Beispiel am Ende von Abschnitt 4.4). F ist ergodisch bezüglich des λ (Beweis selbst!). Aus dem Ergodensatz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[\frac{i}{10},\frac{i+1}{10})}(F^k(x)) = \frac{1}{10}$$

für jedes $i = 0,1,\dots,9$. □

5.5. Der Wiederkehrsatz von Kac

Satz 5.30. *Die Borelabbildung* $F : X \to X$ *besitze ein invariantes ergodisches Wahrscheinlichkeits-Borelmaß* μ. *Sei* $A \in \mathcal{B}(X)$ *mit* $\mu(A) > 0$ *beliebig. Für jedes* $x \in A$ *sei*

$$n_A(x) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid F^k(x) \in A\}$$

die erste Wiederkehrzeit in A *und* $n_A(x) = +\infty$ *falls* $F^k(x) \notin A$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $n_A \in L^1(A,\mu)$ *und*

$$\int_A n_A(x)\, d\mu(x) = 1.$$

Bemerkungen. (1) *Nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré gilt* $n(x) < \infty$ *für* μ*-fast alle* $x \in X$.
(2) *Der Satz besagt, dass der Mittelwert der ersten Wiederkehrzeit* $\frac{1}{\mu(A)}$ *ist.*

Der erste Beweis. Setze

$$
\begin{aligned}
A_k &:= \{x \in A \mid n(x) = k\}\\
&= \{x \in A \mid F^k(x) \in A \text{ und } F^j(x) \notin A \text{ für } j = 1,\dots,k-1\},\\
B_k &:= \{x \in X \mid F^k(x) \in A \text{ und } F^j(x) \notin A \text{ für } j = 1,\dots,k-1\},\\
C_k &:= B_k \setminus A_k,\ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Offensichtliche Eigenschaften:
(1) A_k, B_k, C_k sind Borelmengen;
(2) A_k sind paarweise disjunkt;
(3) B_k sind paarweise disjunkt.

Behauptung 1. $\left(X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \cap F^{-j}(A) = \varnothing$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $x \in (X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \cap F^{-j}(A)$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \notin B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in F^{-j}(A)$. Folglich gilt $F^k(x) \notin A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $F^j(x) \in A$. Widerspruch! $\boxed{\text{B1}}$

Behauptung 2. $\mu\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F^{-j}(A)\Big) = 1$.

Beweis. Sei $D := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F^{-j}(A)$. Es gilt $F^{-1}(D) \subset D$. Nach Lemma 5.24 ist $\mu(D) = 1$ oder $\mu(D) = 0$.

Sei $\mu(D) = 0$. Dann ist

$$\mu(A) = \mu(F^{-1}(A)) = 0.$$

Widerspruch! Also ist $\mu(D) = 1$. $\boxed{\text{B2}}$

Aus Behauptungen 1 und 2 folgt, dass

$$\mu\Big(X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) = 0,$$

d.h. $\mu(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k) = 1$. Offenbar gilt $F^{-1}(C_k) = B_{k+1}$. Foglich ist

$$\begin{aligned}
\mu(B_k) &= \mu(A_k) + \mu(C_k) = \mu(A_k) + \mu(F^{-1}(C_K)) \\
&= \mu(A_k) + \mu(B_{k+1}) \\
\Rightarrow \mu(B_k) &= \mu(A_k) + \mu(A_{k+1}) + \mu(B_{k+2}) \\
&= \cdots = \sum_{j\geq k} \mu(A_j).
\end{aligned}$$

Nun betrachte

$$\begin{aligned}
1 &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\geq k} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\mu(A_j) = \int_A n_A(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Somit ist $n_A \in L^1(A, \mu)$ und $\int_A n_A(x)\, d\mu(x) = 1$. □

Der zweite Beweis. Für alle $B \in \mathcal{B}(A)$ betrachte

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(B)}{\mu(A)}.$$

μ_A ist ein Wahrscheinlichkeits-Borelmaß auf A.

Sei

$$A' := \{x \in A \,|\, n_A(x) < \infty\} \subset A.$$

Nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré ist $\mu_A(A') = 1$. Für jedes $x \in A'$ setze

$$F_A(x) := F^{n_A(x)}(x).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in A' \mid n_a(x) = n\}, \\ B_n &= \{x \in X \setminus A' \mid F(x), \ldots, F^{n-1}(x) \notin A', \quad F^n(x) \in A'\}. \end{aligned}$$

Die Mengen A_n sowie B_n sind paarweise disjunkt,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A'.$$

Es gilt $A_n \cap B_n = \varnothing$ und

$$F^{-1}(A') = A_1 \cup B_1, \qquad F^{-1}(B_n) = A_{n+1} \cup B_{n+1} \tag{5.9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $C \subset A'$ eine Borelmenge. Es gilt $\mu(F^{-1}(C)) = \mu(C)$. Betrachte

$$\begin{aligned} F_A^{-1}(C) &= \{x \in A' \mid F_A(x) \in C\} = \{x \in A' \mid F^{n(x)}(x) \in C\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap F^{-n}(C), \end{aligned}$$

wobei die Mengen $A_n \cap F^{-n}(C)$ paarweise dijunkt sind. Also ist $F_A^{-1}(C)$ Borelsch und somit F_A eine Borelabbildung. Ferner es folgt

$$\mu\left(F^{-1}(C)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(A_n \cap F^{-n}(C)\right). \tag{5.10}$$

Widerholtes Anwenden von (5.9) liefert

$$\begin{aligned} \mu(F^{-1}(C)) &= \mu(A_1 \cap F^{-1}(C)) + \mu(B_1 \cap F^{-1}(C)) \\ &= \mu(A_1 \cap F^{-1}(C)) + \mu\left(F^{-1}(B_1 \cap F^{-1}(C))\right) \\ &= \mu(A_1 \cap F^{-1}(C)) + \mu(A_2 \cap F^{-2}(C)) + \mu(B_2 \cap F^{-2}(C)) \\ &\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n \cap F^{-n}(C)) + \mu(B_N \cap F^{-N}(C)). \end{aligned}$$

Da die Mengen B_n paarweise disjunkt sind, gilt

$$1 \geq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \cap F^{-n}(C)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n \cap F^{-n}(C)).$$

Also strebt $\mu(B_n \cap F^{-n}(C))$ mit $n \to \infty$ gegen Null. Nach (5.10) folgt dann

$$\mu(C) = \mu(F^{-1}(C)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap F^{-n}(C)) = \mu(F_A^{-1}(C)),$$

was auf

$$\mu_A(C) = \frac{\mu(C)}{\mu(A)} = \frac{\mu(F_A^{-1}(C))}{\mu(A)} = \mu_A(F_A^{-1}(C))$$

führt. Also ist μ_A invariant bezüglich der Abbildung F_A.

Nun zeigen wir, dass μ_A ergodisch ist. Sei $B \subset A'$ eine F_A-invariante Borelmenge, d.h.

$$\begin{aligned} B = F_A^{-1}(B) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap F^{-n}(B)\right) \\ &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(B)\right) \cap A' \\ &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B)\right) \cap A'. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Nun betrachte

$$F^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(B) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B).$$

Nach Lemma 5.24 gibt es eine F-invariante Borelmenge

$$D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B)$$

mit

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B) \setminus D\right) = 0.$$

Da F ergodisch ist, gilt somit

$$\text{entweder} \qquad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B)\right) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F^{-n}(B)\right) = 1.$$

Wegen (5.11) gilt

$$\text{entweder} \qquad \mu(B) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \mu(A \setminus B) = 0,$$

d.h.

$$\text{entweder} \qquad \mu_A(B) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \mu_A(B) = 1.$$

Für beliebiges $x \in A'$ betrachte

$$t_N := \sum_{n=0}^{N} n(F_A^n(x)), \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist t_N die Zeitdauer, die der Orbit von x under der Abbildung F benötigt, die Menge A genalu N mal zu besuchen, d.h.

$$\sum_{0\le n<t_N} 1_A(F^n(x)) = N.$$

Nun wenden wir den Birkhoffschen Ergodensatz auf F_A und F an:

$$\begin{aligned}\int_A n_A(x)d\mu_A(x) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{0\le n<N} n_A(F_A^n(x))\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{t_N}{\sum_{0\le n<t_N} 1_A(F^n(x))}\\ &= \left(\int_X 1_A(x)d\mu(x)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{\mu(A)}.\end{aligned}$$

□

5.6. Ergodensatz für eindeutig ergodische Abbildungen

SATZ 5.31. *Sei $\varphi \in C(X;\mathbb{R})$. Ist $F : X \to X$ eindeutig ergodisch, so konvergiert*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(F^k(x)) \tag{5.12}$$

gleichmäßig.

BEWEIS. Angenommen, für ein $\varphi \in C(X;\mathbb{R})$ konvergiert (5.12) nicht gleichmäßig, d.h. es gibt reelle Zahlen $a < b$, Folgen (x_k), (y_k) in X und eine Folge $n(k) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\varphi(F^\ell(x_k)) < a, \quad \frac{1}{n(k)}\sum_{\ell=0}^{n(k)-1}\varphi(F^\ell(y_k)) > b$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit Diagonalfolgenverfahren konstruiert man eine Teilfolge $n(k(j))$, sodass

$$\ell_1(\psi) := \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n(k(j))}\sum_{\ell=0}^{n(k(j))-1}\psi(F^\ell(x_{k(j)})$$

und

$$\ell_2(\psi) := \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n(k(j))}\sum_{\ell=0}^{n(k(j))-1}\psi(F^\ell(x_{k(j)})$$

existieren für alle $\psi \in C(X)$. ℓ_1 und ℓ_2 sind beschränkte positive lineare Funktionale. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\ell_1(\psi) &= \int_x \psi(x)\,d\mu_1(x) \quad \text{und}\\ \ell_2(\psi) &= \int_x \psi(x)\,d\mu_2(x)\end{aligned}$$

für geeignete F-invariante Wahrscheinlichkeits-Borelmaße μ_1 und μ_2.

Aus $\ell_1(\varphi) \le a < b \le \ell_2(\varphi)$ folgt, dass $\mu_1 \ne \mu_2$. Somit ist F ist nicht eindeutig ergodisch. Widerspruch! □

KOROLLAR 5.32. *Sei $F : X \to X$ eindeutig ergodisch bezüglich des Wahrscheinlichkeits-Borelmaßes μ. Sei $U \subset X$ offen mit $\mu(\partial U) = 0$. Dann konvergiert*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_U\big(F^k(x)\big) \to \mu(U)$$

gleichmäßig.

BEWEIS. Seien $u_m \geq 1_U$ und $v_m \leq 1_U$, $m \in \mathbb{N}$ Folgen stetiger Funktionen, sodass

$$\int_x u_m(x)\, d\mu(x) \to \mu(U) \quad \text{und} \quad \int_x v_m(x)\, d\mu(x) \to \mu(U).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_m\big(F^k(x)\big) &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_U\big(F^k(x)\big) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_m\big(F^k(x)\big). \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\begin{aligned} \int_x v_m(x)\, d\mu(x) &> \mu(U) - \delta/2 \quad \text{und} \\ \int_x u_m(x)\, d\mu(x) &< \mu(U) + \delta/2. \end{aligned}$$

Nach Satz 5.31 ist

$$\mu(U) - \delta \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_U\big(F^k(x)\big) \leq \mu(U) + \delta.$$

□

SATZ 5.33. *Sei $Y \subset C(X)$ eine dichte Teilmenge. Konvergiert*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(F^k(x)\big)$$

gleichmäßig gegen eine Konstante für alle $\varphi \in Y$, so ist die Abbildung F eindeutig ergodisch.