Fourieranalysis

Prof. Dr. Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Vorlesungsbegleitendes Skript
Sommersemester 2023

Stand: 5. September 2023

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein Nachschlagewerk zur Vorlesung *Fourieranalysis*. Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:
`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Frau Christiane Scheld für die Erstellung der LaTeX-Version des Skriptums und Herrn Patrick Josef Schäfer für seine Korrekturvorschläge.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\right)$$

oder durch Fourier-Integrale

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ts} g(s) ds.$$

Sie besitzt unzählige Anwendungen in fast allen Gebieten der Mathematik sowie in der Physik und den Ingenieurwissenschaften. In der Vorlesung wird die Theorie der Fourierreihen entwickelt. Auch einige Anwendungen dieser Theorie werden besprochen, unter Anderem in einem parallel zur Vorlesung angebotenen gleichnamigen Seminar.

KAPITEL 1

Fourierreihen

1.1. Fourierkoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion, d.h. $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit genügt es die Funktion f auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ zu betrachten (oder $[0, 2\pi)$). Wegen der Periodizität von f ist es ganz natürlich, das Intervall $(-\pi, \pi]$ als Kreis aufzufassen:

$$\mathbb{T} := \{(x, y) | x = \cos t, y = \sin t, t \in (-\pi, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2$$

oder

$$= \{x + \mathrm{i}y | x = \cos t, y = \sin t, t \in (-\pi, \pi]\} \subset \mathbb{C}$$

und die Funktion f als Abbildung von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{C}$ zu betrachten. Offenbar ist auf $\mathbb{T}$ das Lebesque-Maß definiert. $\mathbb{T}$ ist ein metrischer Raum mit $d(z, z') = \min\{|t - t'|, 2\pi - |t - t'|$. Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^P \mathrm{d}t \right)^{1/P}$$

Definition 1.1. *Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ heißt*

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t$$

der n-ter Fourierkoeffizient *von f. Die Reihe $\mathcal{S}[f] := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ heißt* Fourierreihe *von f.*

Bemerkung. *Hier machen wir keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe.*

Beispiel. *Das trigonometrische Polynom*

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$$

hat Fourierkoeffizienten

$$\widehat{P}(n) = \begin{cases} a_n, & |n| \leq N \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Satz 1.2. *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T}), m, n \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{T}$ beliebig. Dann gilt*

(a) $\widehat{f + g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ *(Linearität)*
$\widehat{cf}(n) = c\widehat{f}(n)$

(b) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ *(Konjugation)*

(c) $\widehat{f(\cdot - \tau)}(n) = e^{-in\tau}\widehat{f}(n)$
(d) $\widehat{f(t)e^{imt}}(n) = \widehat{f}(n-m)$
(e) *die Abbildung* $\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ *ist beschränkt mit der Operatornorm* $\|\widehat{\cdot}\| = 1$
(f) *Aus* $f_m \to f$ *in* $L^1(\mathbb{T})$ *folgt* $\widehat{f_m}(n) \xrightarrow[m\to\infty]{} \widehat{f}(n)$ *gleichmäßig in* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (e) $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \Rightarrow \|\widehat{\cdot}\| \leq 1$. Aus $\widehat{1}(0) = 1$ folgt $\|\widehat{\cdot}\| = 1$.
(f)

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f_m}(n) - \widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f_m(t) - f(t))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f_m(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \|f_m - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \to 0.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 1.3 (Differenzformel). *Für alle* $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *gilt*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \pi/n))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(t+\pi/n)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \pi/n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Folglich gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2}(\widehat{f}(n) + \widehat{f}(n)) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \pi/n))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

□

Lemma 1.4 (Stetigkeit der Translation). *Sei* $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$, *beliebig. Die Abbildung*

$$\phi : \mathbb{T} \to L^p(\mathbb{T}), \qquad \tau \mapsto f_\tau := f(\cdot - \tau)$$

ist stetig.

Bemerkung. $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ *für alle* $p \in [1, \infty]$, *denn*

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \cdot 1\mathrm{d}t \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\mathrm{d}t \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{T}} 1\mathrm{d}t \right)^{1/q}.$$

Beweis von Lemma 1.4. Für den Beweis brauchen wir das folgende Hilfsmittel:

Behauptung. $C(\mathbb{T})$ *ist dicht in* $L^p(\mathbb{T})$, *d.h. zu jedem* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $g \in C(\mathbb{T})$, *so dass* $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} < \varepsilon$ *ist. Sei* $\tau_0 \in \mathbb{T}$ *beliebig.*

Zu $\varepsilon > 0$ wähle ein $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} < \varepsilon$. Betrachte

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f_\tau - g_\tau\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} +$$
$$+\|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} = 2\underbrace{\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})}}_{<\varepsilon} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

$$\begin{aligned}\|g_\tau - g_{\tau_0}\|^p_{L^p(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(t-\tau) - g(t-\tau_0)|^p \mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t-\tau) - g(t-\tau_0)|^p\end{aligned}$$

Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. Daher ist g gleichmäßig stetig. Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(t-\tau) - g(t-\tau_0)| < \varepsilon'$ für alle τ mit

$$d(\tau, \tau_0) = d(t-\tau, d-\tau_0) < \delta.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau\to\tau_0} \sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t-\tau) - g(t-\tau_0)|^p = 0 \\ &\Rightarrow \limsup_{\tau\to\tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon \\ &\overset{\varepsilon \text{ bel.}}{\Rightarrow} \lim_{\tau\to\tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0\end{aligned}$$

□

KOROLLAR 1.5 (Lemma von Riemann-Lebesgue). *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt*

$$\widehat{f}(n) \to 0 \qquad \text{für} \qquad |n| \to \infty.$$

BEWEIS. Nach Lemma 1.3 gilt $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\|f - f_{\pi/n}\|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Lemma } 1.4} 0$ □

Das Lemma von Riemann-Lebesgue kann nicht verbessert werden: Die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(n)$ können beliebig langsam fallen (später!). Ist f glatt, so kann die Abfallrate abgeschätzt werden.

DEFINITION 1.6. $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}), 0 < \alpha \leq 1$ *bezeichne die Menge aller α-Hölderstetigen Funktionen, d.h.*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq Cd(t_1, t_2)^\alpha$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

SATZ 1.7. *Für $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$, ist*

$$\widehat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha}), \text{ d.h. } \limsup_{|n|\to\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{|n|^{-\alpha}} < \infty.$$

BEWEIS. Nach Lemma 1.3 (Differenzformel) gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t-\pi/n))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Also ist

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi} C \left|\frac{\pi}{n}\right|^{\alpha} 2\pi = \frac{\text{const}}{|n|^{\alpha}}.$$

$\square$

Bemerkung. *Ist $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ mit $1/2 < \alpha \leq 1$, so gilt $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (Satz von Bernstein, später!). Aus dem Satz von Bernstein folgt nicht, dass Satz 1.7 für $\alpha > 1/2$ verbessert werden kann. Dazu betrachte die Folge*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ falls } n = 2^k \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent wegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$. Es gilt jedoch $|a_n| = O\left(|n|^{-1}\right)$, d.h.

$$\limsup_{|n|\to\infty} \frac{|a_n|}{|n|^{-1}} = 1$$

Satz 1.8. *Ist f k-mal stetig differenzierbar, $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ und $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|^k}$.*

Beweis. Für $k = 1$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} = f(-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} + \int_{-\pi}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns} f(s))\mathrm{d}s$$

$$\overset{t=\pi}{\Rightarrow} f(\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} = f(-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} + \int_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns} f(s))\mathrm{d}s.$$

Somit ist

$$\mathrm{i}n \int_{\mathbb{T}} f(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{T}} f'(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s,$$

d.h.

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \int_{\mathbb{T}} f'(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s = \frac{1}{\mathrm{i}n}\widehat{f'}(n). \tag{1.1}$$

Nach Lemma von Riemann-Lebesgue ist

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right) \qquad \text{und} \qquad |\widehat{f}(n)| \leq \frac{\|f'\|_{L^1(\mathbb{T})}}{n}.$$

Für $k > 1$ durch rekursive Anwendung von (1.1) erhält man die Identität

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi(\mathrm{i}n)^k} \int_{\mathbb{T}} f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{(\mathrm{i}n)^k}\widehat{f^{(k)}}(n),$$

die wieder mit Lemma von Riemann-Lebesgue die Aussage des Satzes liefert. $\square$

Aufgabe 1.9. *Sei* $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ *mit* $\sup_{t\in\mathbb{T}} |f^{(k)}(t)| \leq Ck^{\alpha k}$ *für ein* $C > 0$, *ein* $0 < \alpha < 1$ *und alle* $k \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$|\widehat{f}(m)| \leq K \exp\left(-\frac{\alpha}{e}|m|^{1/\alpha}\right)$$

für eine Konstante K.

Hinweis. *Die Stirlingsche Formel*

$$k! \sim \left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \sqrt{2\pi k}.$$

Aufgabe 1.10. *Sei* $C^{k,\alpha}(\mathbb{T}) := \{f \in C^k(\mathbb{T}) | f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})\}, k \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1$. *Untersuchen Sie das Verhalten der Fourierkoeffizienten* $\widehat{f}(m)$ *für* $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}), |m| \to \infty$.

Definition 1.11.

$$\mathrm{Var}(f) := \sup_{-\pi<t_0<\cdots<t_n=\pi} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

heißt die Variation *der Funktion* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. *Ist* $\mathrm{Var}(f) < \infty$ *so heißt* f *von beschränkter Variation*, $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{T})$.

Bemerkungen. (1) *Funktionen beschränkter Variation brauchen nicht stetig zu sein. Zum Beispiel*

$$f(t) = \begin{cases} -1, t \in (-\pi, 0] \\ 1, t \in (0, \pi] \end{cases}$$

ist nicht stetig, aber $\mathrm{Var}(f) = 2$.

(2) *Ist* $f \in C^1(\mathbb{T})$, *so gilt*

$$\mathrm{Var}(f) = \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

Beweis von Bemerkung (2). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f) &= \sup_{-\pi<t_0<\cdots<t_n=\pi} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sup_{-\pi<t_0<\cdots<t_n=\pi} \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

für $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Offenbar gilt die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^n \inf_{\tau\in[t_{i-1},t_i]} |f'(\tau)|(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

Also ist

$$\begin{aligned} (R) \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| \mathrm{d}t &= \sup_{-\pi<t_0<\cdots<t_n=\pi} \sum_{i=1}^n \inf_{\tau\in[t_{i-1},t_i]} |f'(\tau)|(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sup_{-\pi<t_0<\cdots<t_n=\pi} \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) \\ &= \mathrm{Var}(f). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\mathrm{d}t \right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_n} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Folglich gilt

$$\mathrm{Var}(f) \leq \sup_{-\pi < t_0 < \cdots < t_n = \pi} \int_{t_0}^{t_n} |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

□

SATZ 1.12. *Ist $f \in BV(\mathbb{T})$, so gilt*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\mathrm{Var}(f)}{|n|} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

BEWEIS. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beliebig. Sei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ die stückweise konstante Funktion so, dass

$$g(t) := f\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right)$$

für

$$t \in \left(-\pi + \frac{2\pi k}{|n|}, -\pi + \frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right] \qquad \text{und} \qquad k = 0, 1, \ldots |n| - 1.$$

Wir betrachten zunächst

$$\int_{-\pi+\frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}} e^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=-\pi+\frac{2\pi k}{|n|}}^{t=-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}}$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{i}n}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}n(k+1)}{|n|}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}kn}{|n|}}\right)$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}kn}{|n|}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}n}{|n|}} - 1\right) \overset{\frac{n}{|n|}=\pm 1}{=} 0.$$

Somit gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = 0.$$

Nun betrachten wir

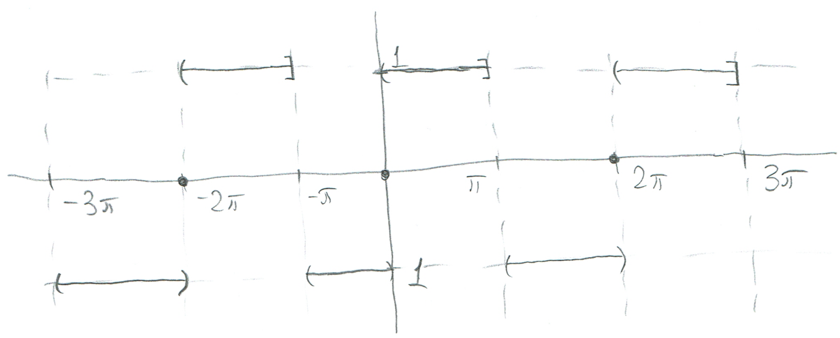
$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{|n|-1}\int_{-\pi+\frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}} (f(t)-g(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{|n|-1}\int_{-\pi+\frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}} \left(f(t)-f\left(-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{|n|-1}\int_{-\pi+\frac{2\pi k}{|n|}}^{-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}} \left|f(t)-f\left(-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right)\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{|n|-1}\sup_{t\in\left(-\pi+\frac{2\pi k}{|n|},-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right]}\left|f(t)-f\left(-\pi+\frac{2\pi(k+1)}{|n|}\right)\right|\frac{2\pi}{|n|} \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(f)}{|n|}.
\end{aligned}$$

□

1.2. Beispiele

(1) Wir betrachten die periodische Stufenfunktion

$$f(t) := \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases} \qquad t \in (-\pi,\pi].$$



Zunächst berechnen wir die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(n)$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \Big|_{t=-\pi}^{t=0} - \\
&- \frac{1}{2\pi i n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi i n} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n}\right) \\
&- \frac{1}{2\pi i n} \left(\mathrm{e}^{-i\pi n} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i n} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{2\pi i n} (1 - (-1)^n) \\
&= \frac{1}{\pi i n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi i n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei $n = 0$:

$$\widehat{f}(0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Also ist

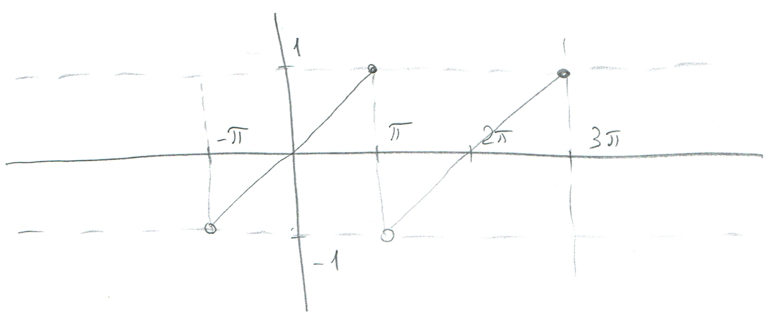
$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z} \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi i n}, & n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bemerkungen. *(1)* $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{T})$ *mit* $\mathrm{Var}(f) = 2$. *Nach Satz 1.12 gilt* $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{2}{|n|}$.

(2) Da $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-1})$ *ist, können wir a priori keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe erzielen.*

(2) Nun betrachten wir die Sägezahnfunktion

$$f(t) = \frac{t}{\pi}, \qquad t \in (-\pi, \pi].$$



Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2} \frac{t^2}{2} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ haben wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2\pi^2\mathrm{i}n} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2\mathrm{i}n}\left(\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} + \pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) = -\frac{(-1)^n}{\pi\mathrm{i}n}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\mathrm{i}n}, & n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$$

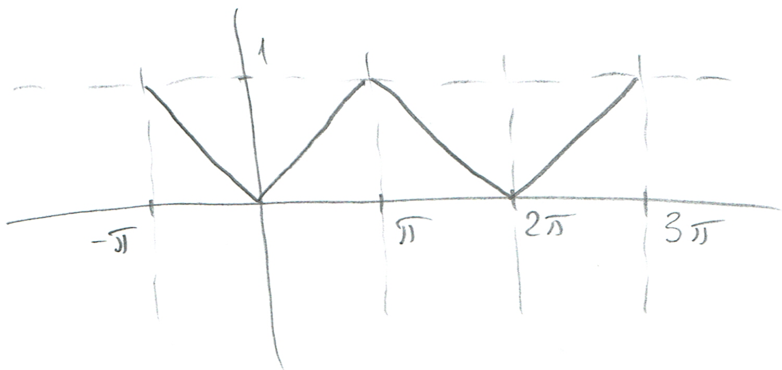
Bemerkungen. *(1) $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{T})$ mit $\mathrm{Var}(f) = 2$. Nach Satz 1.12 gilt $|\widehat{f}(n)| \le \frac{2}{|n|}$.*

(2) $f \notin \mathrm{C}(\mathbb{T})$, denn $\lim_{t\to-\pi+} f(t) = -1$ und $f(\pi) = +1$.

(3) Da $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-1})$ ist, können wir a priori keine Aussage über die Konvergenz der Fourierreihe erzielen.

(3) Die Dreiecksfunktion

$$f(t) := \frac{|t|}{\pi}, \qquad t \in (-\pi, \pi].$$



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi^2}\int_0^{\pi} t\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2}\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\
&- \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi^2\mathrm{i}n} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
&+ \frac{1}{2\pi^2\mathrm{i}n} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Big|_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2}, & n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$$

BEMERKUNGEN. *(1) $f \in C^{0,1}(\mathbb{T})$. Nach Satz 1.7 gilt $\widehat{f}(n) = O\left((|n|^{-1})\right)$. Andererseits ist $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{T})$ mit $\mathrm{Var}(f) = 2$. Nach Satz 1.12 gilt $|\widehat{f}(n)| \le \frac{2}{|n|}$. Die beiden Abschätzungen sind sehr grob.*

(2) Wegen $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-2})$ ist die Fourierreihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Über den Grenzwert dieser Reihe können wir noch nichts sagen.

1.3. Faltung

DEFINITION 1.13. *Für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ heißt*

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\mathrm{d}s \\
&\overset{\tau=t-s}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{T}
\end{aligned}$$

die Faltung von f und g.

A priori ist es nicht klar, ob das Integral auf der rechten Seite existiert. Der folgende Satz liefert die positive Antwort auf diese Frage.

SATZ 1.14 (Youngsche Ungleichung). *Seien $1 \le p, q, r \le \infty$ so, dass*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$, so gilt $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ mit

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$$

und

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Ferner ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $g \in L^1(\mathbb{T})$, so gilt $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Bemerkung.

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}\, \textit{messbar} | \operatorname*{ess-sup}_{t\in\mathbb{T}} |f(t)| < \infty\}$$

mit

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \operatorname*{ess-sup}_{t\in\mathbb{T}} |f(t)| := \inf_{\substack{N\subset\mathbb{T}\\ |N|=0}} \sup_{t\in\mathbb{T}\setminus N} |f(t)|$$

ist ein Banachraum.

Beweis. (1) Ist $q = \infty$, so gilt $p = 1$ und $r = \infty$

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{2\pi} \operatorname*{ess-sup}_{t\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t-\tau)|\, |g(\tau)| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{2\pi} \operatorname*{ess-sup}_{t\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t-\tau)| \mathrm{d}\tau \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\tau)| \mathrm{d}\tau = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

(2) Ist $p = \infty$, so gilt $q = 1$ und $r = \infty$

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

analog.

(3) Sei nun $p, q < \infty$. Setze

$$p' := \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

und

$$q' := \frac{q}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} \\
&= 2 + \frac{1}{r} - \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{1+\frac{1}{r}} = 1
\end{aligned}$$

und

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = \frac{p}{r} + p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{p}{r} + p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Analog zeigt man

$$\frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1.$$

Betrachte

$$
\begin{aligned}
&|(f*g)(t)| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|\cdot|g(t-\tau)|\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|^{\frac{p}{q'}}\left(|f(\tau)|^{\frac{p}{r}}|g(t-\tau)|^{\frac{q}{r}}\right)|g(t-\tau)|^{\frac{q}{p'}}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{T}} (|f(\tau)|^p)^{1/q'}\,(|f(\tau)|^p|g(t-\tau)|^q)^{1/r}\,(|g(t-\tau)|^q)^{1/p'}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Wir erinnern uns an die Hölder-Ungleichung: Für alle $u \in L^{s_1}(\mathbb{T})$ und $v \in L^{s_2}(\mathbb{T})$ mit $\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}=1$, $1<s_1,s_2<\infty$ gilt

$$
\left|\int_{\mathbb{T}} u(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq \left(\int_{\mathbb{T}}|u(\tau)|^{s_1}\mathrm{d}\tau\right)^{1/s_1}\left(\int_{\mathbb{T}}|v(\tau)|^{s_2}\mathrm{d}\tau\right)^{1/s_2}.
$$

Aufgabe. *Leiten Sie aus der Hölder-Ungleichung die folgende Ungleichung (iterierte Hölder-Ungleichung) her:*

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{T}} u(\tau)v(\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}}|u(\tau)|^{s_1}\mathrm{d}\tau\right)^{1/s_1}\left(\int_{\mathbb{T}}|v(\tau)|^{s_2}\mathrm{d}\tau\right)^{1/s_2}\left(\int_{\mathbb{T}}|w(\tau)|^{s_3}\mathrm{d}\tau\right)^{1/s_3}
\end{aligned}
$$

für $u \in L^{s_1}(\mathbb{T})$, $v \in L^{s_2}(\mathbb{T})$, $w \in L^{s_3}(\mathbb{T})$ *mit* $\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}+\dfrac{1}{s_3}=1$, $1<s_1,s_2,s_3<\infty$.

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
u &:= (|f|^p)^{1/q^1} \overset{f\in L^p}{\Longrightarrow} u \in L^{q'}(\mathbb{T}), \\
w &:= (|g(t-\cdot)|^q)^{1/p'} \overset{g\in L^q}{\Longrightarrow} w \in L^{p'}(\mathbb{T}), \\
v_t &:= (|f|^p|g(t-\cdot)^q|)^{1/r}.
\end{aligned}
$$

Wir können aber nicht behaupten, dass $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für alle $t\in\mathbb{T}$. Jedoch lässt sich beweisen, dass $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für *fast* alle $t \in \mathbb{T}$.

Behauptung. $v_t \in L^r(\mathbb{T})$ für fast alle $t\in\mathbb{T}$.

Beweis. Wir betrachten das Integral

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \|v_t\|^r_{L^r(\mathbb{T})}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} &= \int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|v_t(\tau)|^r\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \\
&= \int_{\mathbb{T}^2}|f(\tau)|^p|g(t-\tau)|^q\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \\
&= \int_{\mathbb{T}^2}|f(\tau)|^p|g(s)|^q\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} \\
&= \|f\|^p_{L^p(\mathbb{T})}\|g\|^q_{L^q(\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{B}}$

Mit Hilfe der iterierten Hölder-Ungleichung erhält man aus (1.2) für fast alle $t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}|(f*g)(t)| &\leq \|u\|_{L^{q'}(\mathbb{T})}\|w\|_{L^{p'}(\mathbb{T})}\|v_t\|_{L^r(\mathbb{T})}\\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(\tau)|^p|g(t-\tau)|^q\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}\right)^{1/r}\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{T}}|(f*g)(t)|^r\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right)^{1/r} &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'}\\ &\quad\cdot\left(\int_{\mathbb{T}^2}|f(\tau)|^p|g(t-\tau)|^q\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right)^{1/r}\\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/q'}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p/r}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/r}\\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\|g\|_{L^q(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

(4) Die Fourierkoeffizienten der Faltung:

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(t-\tau)\mathrm{d}\tau}\right)g(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\mathrm{d}\tau = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).\end{aligned}$$

(5) Seien $f \in C(\mathbb{T})$ und $g \in L^1(\mathbb{T})$ beliebeig. Betrachte

$$\begin{aligned}|(f*g)(t+\delta)-(f*g)(t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau+\delta)-f(t-\tau)|\cdot|g(\tau)|\mathrm{d}\tau\\ &\leq \sup_{\tau\in\mathbb{T}}|f(t-\tau+\delta)-f(t-\tau)|\cdot\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

□

BEMERKUNGEN. *(1) Ist f ein trigonometrisches Polynom, $g \in L^1(\mathbb{T})$, so ist $f*g$ ebenfalls ein trigonometrisches Polynom.*

BEWEIS. *Ist f ein trigonometrisches Polynom, so gilt $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|n| \geq N$. Also gilt*

$$\widehat{f*g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|n| \geq N$, d.h. $f*h$ ist ein trigonometrisches Polynom.

(2) Seien $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$. Nach Satz 1.14 ist $f*g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Es lässt sich jedoch mehr zeigen: $f*g \in C(\mathbb{T})$.

1.4. Cesàro-Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Man definiert die Mittelwerte

$$\sigma_n := \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

Die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Folge der Cesàro-Mittelwerte.

Beispiele. *(1) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^{n+1}$ konvergiert nicht. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte $\sigma_{2k} = 0$, $\sigma_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, ist konvergent mit Grenzwert Null.*

(2) Die Folge $(1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots)$ konvergiert nicht. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte

$$\sigma_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}, \qquad \sigma_{3k+2} = \frac{1}{3k+2}, \qquad \sigma_{3k+3} = 0, k \in \mathbb{N}_0,$$

ist konvergent mit Grenzwert Null.

Satz 1.15. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann konvergiert die Folge der Cesàro-Mittelwerte $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a) = 0$$

gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \geq M$. Sei nun $n > \max\{N, M\}$ beliebig. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (a_j - a) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} (a_j - a) + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^{n} (a_j - a) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} (a_j - a) \right| + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^{n} |a_j - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ferner wird uns die Reihenkonvergenz interessieren. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ Partialsummen. Man definiert die Mittelwerte der Partialsummen:

$$\sigma_n := \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}.$$

Beispiele. *(1) Seien $a_n = (-1)^{n+1}$. Die Folge der entsprechenden Partialsummen*

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}$$

ist nicht konvergent. Die Folge der Cesàro-Mittelwerte

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}(1+(-1)^{j+1})\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ Cesàro-summierbar *ist und schreibt*

$$C-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}.$$

(2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,0,-1,1,0,-1,\ldots)$. *Die Folge der entsprechenden Partialsummen*

$$s_{3k+1} = 1, \qquad s_{3k+2} = 1, \qquad s_{3k+3} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

ist nicht konvergent. Für Cesàro-Mittelwerte gilt

$$\begin{aligned}\sigma_{3k+1} &= \frac{1}{3k+1}\sum_{j=1}^{3k+1} s_j = \frac{2k+1}{3k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3},\\ \sigma_{3k+2} &= \frac{1}{3k+2}\sum_{j=1}^{3k+2} s_j = \frac{2k+2}{3k+2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3},\\ \sigma_{3k+3} &= \frac{1}{3k+3}\sum_{j=1}^{3k+3} s_j = \frac{2k}{3k+3} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$C-\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

AUFGABE 1.16. *Untersuchen Sie die Reihe* $1-2+3-4+\ldots$ *auf Cesàro-Konvergenz.*

Nach Satz 1.15 gilt für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$C-\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Für Reihen mit nichtnegativen Reihengliedern sind die Konvergenz und die Cesàro-summierbarkeit äquivalent.

SATZ 1.17. *Seien* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist genau dann Cesàro-summierbar, wenn sie konvergent ist.*

BEWEIS. „$\Leftarrow$“ ist klar.

„$\Rightarrow$“ Sei die Folge der Cesàro-Mittelwerte $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j$ konvergent. Angenommen, die Folge der Partialsummen $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ wäre nicht konvergent, d.h. $s_j \to \infty$ für $j \to \infty$. Sei $\alpha > 0$ beliebig groß. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $s_j \geq \alpha$ für alle $j > N$. Für jedes $n > N$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} s_j + \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} s_j \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} s_j + \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} \alpha \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} s_j + \alpha\frac{n-N}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha.\end{aligned}$$

Also gilt $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Widerspruch! □

Wir betrachten wieder allgemeine Reihen, deren Reihenglieder beliebiges Vorzeichen haben können.

Satz 1.18. *Sei $t_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$.*

(a) *$\sum a_n$ ist Cesàro-summierbar genau dann, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)}$$

konvergiert.

(b) *Sei $\sum a_n$ Cesàro-summierbar. Dann ist $\sum a_n$ konvergent genau dann, wenn $t_n = o(n)$ ist.*

Bemerkung. *Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)}$ folgt nicht, dass $\frac{t_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow t_n = o(n)$, z.B. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ oder $\sum b_n$ mit*

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = k^2, \\ \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2. \end{cases}$$

Umgekehrt, aus $t_n = o(n)$ folgt nicht, dass $\sum \frac{t_n}{n(n+1)}$ konvergent ist, z.B. $t_n = \frac{n}{\log(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{t_n}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ divergent.

Beweis von Satz 1.18. (a) Behauptung 1. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}\sigma_N$$

Beweis mit der vollständigen Induktion:

$$\frac{t_1}{2} = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}a_1.$$

Ferner lässt sich t_{N+1} schreiben als

$$\begin{aligned}t_{N+1} &= a_1 + 2a_2 + \ldots + (N+1)a_{N+1} \\ &= (N+1)s_{N+1} - s_N - \ldots - s_2 - s_1.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1} \frac{t_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n(n+1)} + \frac{t_{N+1}}{(N+1)(N+2)} \\
&= \frac{N}{N+1}\sigma_N + \frac{(N+1)s_{N+1} - s_N - \ldots - s_2 - s_1}{(N+1)(N+2)} \\
&= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N}{N+1} + \frac{(N+1)s_{N+1} - s_N - \ldots - s_2 - s_1}{(N+1)(N+2)} \\
&= \frac{s_{N+1}}{N+2} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) s_j \\
&= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N + s_{N+1}}{N+2} = \frac{N+1}{N+2}\sigma_{N+1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B1}}$

Aus Behauptung 1 folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sigma_N$$

und somit (a) bewiesen.

(b) Behauptung 2. $t_n = (n+1)s_n + n\sigma_n$.

Beweis mit der vollständigen Induktion: $t_1 = a_1 = 2a_1 - a_1$. Ferner betrachte

$$\begin{aligned}
t_{n+1} = t_n + (n+1)a_{n+1} &= (n+1)s_n - n\sigma_n + (n+1)a_{n+1} \\
&= (n+1)s_{n+1} - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \\
&= (n+2)s_{n+1} - s_{n+1}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \\
&= (n+2)s_{n+1} - (n+1)\sigma_{n+1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B2}}$

„$\Rightarrow$“ Sei $\sum a_n$ konvergent, d.h. die Folge (s_n) mit Grenzwert s. Dann ist nach Satz 1.15 die Folge (σ_n) ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert s. Aus Behauptung 2 folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}s_n - \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0,$$

d.h. $t_n = o(n)$.

„$\Leftarrow$“ Sei $t_n = o(n)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = 0$. Nach Behauptung 2 gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}s_n - \sigma_n \right) = 0,$$

d.h. die Folge (s_n) ist konvergent. □

Bemerkung. *Es gibt auch andere Summationsformeln divergenter Reihen, wie z.B.:*

$$1 + 2 + 3 \ldots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$*:*

$$\begin{aligned}
\zeta(-1) &= -\frac{1}{12} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}, \\
\zeta(0) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 1 + 1 + \ldots = -1/2, \\
\zeta(-2) &= 0 \Rightarrow 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 0.
\end{aligned}$$

1.5. Summierbarkeit von Fourierreihen

(a) Betrachte die n-te Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$S_n(f,t) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Sei $D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=-n}^{n} q^k$ mit $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Sei zunächst $t \neq 0 \Leftrightarrow q \neq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} q^k &= q^{-n} \sum_{k=0}^{2n} q^k = q^{-n} \frac{1 - q^{2n+1}}{1-q} \\
&= \frac{q^{-n} - q^{n+1}}{1-q} = \frac{e^{-\mathrm{i}nt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt - \mathrm{i}t/2} - e^{\mathrm{i}nt + \mathrm{i}t/2})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t/2})} \\
&= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt $D_n(t) = 2n+1$. Also ist $D_n(t)$ stetig, denn $\lim_{t \to 0} D_n(t) = 2n+1$.

Die Funktion $D_n(t)$ heißt *Dirichlet-Kern*. Nach Satz 1.14 ist die Faltung $(D_n * f)(t)$ ein trigonometrisches Polynom mit Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{D_n}(k)\widehat{f}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & |k| \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$(D_n * t)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = S_n(f,t).$$

(b) Betrachte den Cesàro-Mittelwert

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,t) :&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f,t) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \widehat{f}(l) \mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}
\end{aligned}$$

Behauptung.

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{l=-n}^{n} \left(1 - \frac{|l|}{n+1}\right) \widehat{f}(l) e^{ilt}.$$

Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist $\sigma_n(f,t) = \widehat{f}(0)$. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}(f,t) &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{l=-k}^{k} \widehat{f}(l) e^{ilt} \\
&= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \widehat{f}(l) e^{ilt} + \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \widehat{f}(l) e^{ilt} \right) \\
&= \frac{1}{n+2} \left((n+1)\sigma_n(f,t) + \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \widehat{f}(l) e^{ilt} \right) \\
&= \frac{1}{n+2} \Big((n+1) \sum_{l=-n}^{n} \left(1 - \frac{|l|}{n+1}\right) \widehat{f}(l) e^{ilt} \\
&\qquad + (n+1) \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \frac{1}{n+1} \widehat{f}(l) e^{ilt} \Big) \\
&= \frac{n+1}{n+2} \left(\sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \left(1 - \frac{|l|}{n+1}\right) \widehat{f}(l) e^{ilt} + \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \frac{1}{n+1} \widehat{f}(l) e^{ilt} \right) \\
&= \frac{n+1}{n+2} \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \left(1 - \frac{|l|}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \widehat{f}(l) e^{ilt} \\
&= \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\displaystyle\| \atop \displaystyle 1 - \frac{1}{n+2}} - \frac{|l|}{n+2} + \frac{1}{n+2} \right) \widehat{f}(l) e^{ilt} \\
&= \sum_{l=-(n+1)}^{n+1} \left(1 - \frac{|l|}{n+2}\right) \widehat{f}(l) e^{ilt}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Ferner sei

$$\begin{aligned}
F_n(t) &:= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} e^{ilt} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{cases} \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}, & t \neq 0 \\ (2k+1), & t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $t \neq 0 \Leftrightarrow q := \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin(k+1/2)t &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{n} \left(q^{k+1/2} - q^{-k-1/2} \right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} q^{1/2} \sum_{k=0}^{n} \left(q^{k} - q^{-k-1} \right) \\
&= \frac{q^{1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{q^{-1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-1}} \\
&= \frac{q^{1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{q^{1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{1-q^{-n-1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{1-q^{n+1}+1-q^{-n-1}}{1-q} \\
&- \frac{q^{1/2}}{2\mathrm{i}} \frac{\left(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}} \right)^2}{q^{1/2} \left(q^{-1/2} - q^{1/2} \right)} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\left(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{(n+1)}{2}} \right)^2}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{(-4) \left(\frac{q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}}}{2\mathrm{i}} \right)^2}{2\mathrm{i} \frac{q^{1/2} - q^{-1/2}}{2\mathrm{i}}} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} t \right)}{\sin t/2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} t \right)}{\sin^2 t/2}$$

für $t \neq 0$. Für $t = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

und somit $F_n(0) = n+1$. Also ist $F_n(t)$ stetig, denn $\lim_{t \to 0} F_n(t) = F_n(0)$. Die Funktion $F_n(t)$ heißt *Fejer-Kern*, die Faltung $(F_n * f)(t)$ ist ein trigonometrisches Polynom mit Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{F}_n(k) \widehat{f}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right), & |k| \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$(F_n * f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right) \widehat{f}(k) = \sigma_n(f, t).$$

(c)

DEFINITION 1.19. *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt summierbar im Sinne von Abel, falls für alle* $r \in [0,1)$ *die Reihe*

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

konvergiert und $\lim_{r \to 1-} A(r)$ *existiert.*

BEISPIEL. *Sei* $a_n = (-1)^n$. *Dann ist*

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \frac{1}{1+r}$$

für alle $0 \le r < 1$. *Der Grenzwert* $\lim_{r \to 1-} A(r) = 1/2$.

Der Abel-Mittelwert

$$A_r(f,t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

konvergiert für alle $0 \le r < 1$, denn $\widehat{f} \in \ell^\infty$. Die Funktion

$$\begin{aligned}
P_r(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \\
&= 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \\
&= 1 + \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} + \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \\
&= 1 + \frac{2r\cos t - 2r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \\
&= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}
\end{aligned}$$

heißt *Poisson-Kern*. Es gilt

$$A_r(f,t) = (P_r * f)(t).$$

Anschließend betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{r \to 1-} A_r(f,t) = \lim_{r \to 1-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

(d) Der Gauß-Mittelwert

$$G_s(f,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-n^2 s} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad s > 0.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-n^2 s} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-(t + 2\pi n)^2/4s}
\end{aligned}$$

heißt *Gauß-Kern*. Es gilt $G_s(f,t) = (\Gamma * f)(t)$.

DEFINITION 1.20. *Eine* Dirac-Folge *auf* $\mathbb{T}$ *ist eine Folge* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $L^1(\mathbb{T})$ *mit den Eigenschaften*

(a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\mathrm{d}t = 1$,
(b) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|\mathrm{d}t < \infty$,
(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} k_n(t)\mathrm{d}t = 0$ *für alle* $\delta\in(0,\pi)$.

Gilt $k_n(t)\geq 0$ *für alle* $t\in\mathbb{T}$ *und* $n\in\mathbb{N}$, *so heißt die Dirac-Folge* positiv.

Bildet die Folge der Dirichlet-Kerne $D_n(t)$ eine Dirac-Folge? Es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = 1.$$

Die Eigenschaft (b) gilt jedoch nicht!

PROPOSITION 1.21. *Für gewisse Konstanten* $c, d > 0$ *gilt*

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq c\log n + d.$$

Insbesondere ist (D_n) *keine Dirac-Folge.*

BEMERKUNG. *Es lässt sich zeigen, dass*

$$\int_{\mathbb{T}} |D_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1), \qquad n\to\infty.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left((n+1/2)t\right)}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t\\ &\overset{\tau=t/2}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin n\tau}{\sin\tau}\right|\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

mit $m = 2n+1$. Wir zerlegen das Intervall $[0,\pi]$ in Teilintervalle

$$\begin{aligned}&\left[0,\frac{\pi}{2m}\right], \left[\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{\pi}{m},\frac{3\pi}{2m}\right], \ldots\\ &\qquad\ldots\left[\frac{(m-1)\pi}{m},\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right], \left[\frac{(2m-1)\pi}{2m},\pi\right].\end{aligned}$$

Di Funktion $\tau\mapsto|\sin m\tau|$ ist monoton wachsend auf Intervallen

$$\left[0,\frac{\pi}{2m}\right], \left[\frac{\pi}{m},\frac{3\pi}{2m}\right], \ldots\left[\frac{(m-1)\pi}{m},\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right]$$

und monoton fallend auf Intervallen

$$\left[\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{3\pi}{2m},\frac{2\pi}{m}\right], \ldots\left[\frac{(2m-1)\pi}{2m},\pi\right].$$

Wir entfernen alle Intervalle, wo $\tau \mapsto |\sin m\tau|$ monoton fallend ist und erhalten somit eine untere Schranke

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(2k+1)}{\pi}2m}\left|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\right|\mathrm{d}\tau \\
&\overset{s=\tau-k\pi/m}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\left|\frac{\sin(ms+k\pi)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)}\right|\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\left|\frac{\sin(ms)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)}\right|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Wir notieren die folgenden Eigenschaften:

(1) $\sin(ms) \geq 0$ für alle $s \in \left[0, \dfrac{\pi}{2m}\right]$,

(2) Ist $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2\pi}$, so gilt

$$s + \frac{k\pi}{m} \in \left[\frac{k\pi}{m}, \frac{(k+1)\pi}{m}\right] \subset [0,\pi].$$

Somit gilt $\sin\left(s+\dfrac{k\pi}{m}\right) \geq 0$.

(3) $\sin\left(s+\dfrac{k\pi}{m}\right) \leq s + \dfrac{k\pi}{m}$,

(4) $\sin x \geq \dfrac{2x}{\pi}$ für alle $x \in [0,\pi/2]$.

Mit diesen Eigenschaften erhalten wir die folgende untere Schranke:

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\frac{\sin(ms)}{\sin\left(s+\frac{k\pi}{m}\right)}\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\frac{\frac{2ms}{\pi}}{s+\frac{k\pi}{m}}\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\frac{\frac{2ms}{\pi}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{k\pi}{m}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2m}\frac{ms}{\frac{\pi^2}{4m}(2k+1)}\mathrm{d}s \\
&= \frac{4m^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)^{-1}\int_0^{\pi/2m}s\mathrm{d}s \\
&= \frac{4m^2}{\pi^3}\frac{\pi^2}{8m^2}\sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)^{-1} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)^{-1} \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{m-1}\frac{dx}{2x+1} \geq \frac{1}{4\pi}\log(2m-1) = \frac{1}{4\pi}\log(4n+1) \\
&\geq \frac{1}{4\pi}\log(4n) = \frac{1}{4\pi}\log n + \frac{1}{4\pi}\log 4.
\end{aligned}$$

$\square$

LEMMA 1.22. *(F_n) ist eine positive Dirac-Folge.*

BEWEIS. (a)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = 1.$$

(b) klar wegen $F_n \geq 0$.
(c)

$$\begin{aligned}\sup_{\delta<|t|<\pi} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sup_{\delta<|t|<\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

AUFGABE 1.23. *Sei (r_n) eine Folge mit $0 < r_n < 1$, $r_n \to 1$. Dann ist (P_{r_n}) mit*

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$$

eine positive Dirac-Folge.

BEMERKUNG. *Der Gauß-Kern (Γ_{s_n}) für $s_n \to 0$, $s_n > 0$, bildet ebenfalls eine positive Dirac-Folge.*

SATZ 1.24. *Sei (k_n) eine Dirac-Folge. Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so gilt*

$$k_n * f \to f \text{ in } C(\mathbb{T}).$$

BEWEIS. Setze $f_\tau := f(\cdot - \tau)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\max_{|\tau|\leq\delta} \|f_\tau - f\|_\infty \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}(k_n * f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2\pi}f(t)\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)(f(t-\tau)-f(t))\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}|(k_n * f)(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)||(f(t-\tau)-f(t))|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \sup_{s\in\mathbb{T}} |f(s-\tau)-f(s)|\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)|\|f_\tau - f\|_\infty \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Wir zerlegen das Integral auf der rechten Seite in zwei Teile:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)|\|f_\tau - f\|_\infty \mathrm{d}\tau \\ &\leq \max_{|\tau|\leq\delta} \|f_\tau - f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau < \varepsilon\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |k_n(\tau)|\|f_\tau - f\|_\infty \mathrm{d}\tau \\ &\leq \max_{|\tau|\leq\pi} \|f_\tau - f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \|k_n * f - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \|k_n * f - f\|_\infty = 0.$$

□

KOROLLAR 1.25. *Für $f \in C(\mathbb{T})$ gilt:*

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,\cdot) &\xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } C(\mathbb{T}), \\ A_r(f,\cdot) &\xrightarrow[r\to 1]{} f \text{ in } C(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Später beweisen wir auch punktweise Konvergenz für $\sigma_n(f,\cdot)$ und $A_r(f,\cdot)$ für nicht stetige Funktionen.

KOROLLAR 1.26 (Trigonometrischer Approximationssatz). *Trigonometrische Polynome sind dicht in $C(\mathbb{T})$.*

BEWEIS. $\sigma_n(f,\cdot)$ ist ein trigonometrisches Polynom. □

Weiterhin untersuchen wir die Konvergenz von $\sigma_n(f,\cdot)$ und $A_r(f,\cdot)$ in $L^p(\mathbb{T})$ für $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Wir werden dabei einige Ergebnisse aus der Funktionalanalysis benutzen.

SATZ 1.27. *Sei (k_n) eine Dirac-Folge. Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, so gilt*

$$k_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p.$$

BEMERKUNG. *Aus $k_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in L^p folgt, dass es eine Teilfolge (n_l) gibt, so dass $k_n * f \longrightarrow f$ fast überall. Der Beweis findet sich im Vorlesungsskript zur Funktionalanalysis.*

Für den Beweis des Satzes brauchen wir ein nützliches Lemma.

LEMMA 1.28. *Sei $1 \leq p < \infty$. Sei $\int_{\mathbb{T}} |f(\cdot,s)|\mathrm{d}s \in L^p(\mathbb{T})$. Dann gilt*

$$\| \int_{\mathbb{T}} f(\cdot,s)\mathrm{d}s\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}s.$$

BEMERKUNG. *Das Lemma verallgemeinert die Dreiecksungleichung:*

$$\left\|\sum_j f(\cdot,s_j)\right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sum_j \|f(\cdot,s_j)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Beweis. Sei $1 < q \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Sei $g \in L^q(\mathbb{T})$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t,s)\mathrm{d}s \right) g(t)\mathrm{d}t \right| &\leq \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t,s)\mathrm{d}s \right| \cdot |g(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)|\mathrm{d}s \cdot |g(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aus der Vorausetzung $\int_{\mathbb{T}} |f(\cdot,s)|\mathrm{d}s \in L^p(\mathbb{T})$ mit Hilfe der Hölder-Ungleichung folgt, dass die Funktion $t \mapsto |g(t)| \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)|\mathrm{d}s$ integrierbar ist. Mit dem Satz von Fubini können somit die Integrale vertauscht und anschließend mit der Hölder-Ungleichung abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)|\mathrm{d}s \cdot |g(t)|\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(t,s)| \cdot |g(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}\mathrm{d}s \\ &= \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \cdot \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Wir zitieren zwei Fakten aus der Funktionalanalysis:

(a) (Darstellungssatz von Riesz) Jedes lineare stetige Funktional auf $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ ist gegeben durch

$$\ell(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \ \forall \varphi \in L^p(\mathbb{T})$$

für ein $g \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für die (Operator-) Norm des Funktionals

$$\|\ell\| = \sup_{\substack{\varphi \in L^p(\mathbb{T}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|l(\varphi)|}{\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}}$$

gilt $\|\ell\| = \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$.

(b) (Eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{l \text{ lineare} \\ \text{stetige Funktionale auf } L^p}} \frac{|l(\varphi)|}{\|l\|}.$$

Mit (a) können wir die obige Abschätzung folgendermaßen interpretieren: Für alle linearen stetigen Funktionale ℓ auf $L^p(\mathbb{T})$ gilt:

$$\left| \ell \left(\int_{\mathbb{T}} f(\cdot,s)\mathrm{d}s \right) \right| \leq \|\ell\| \cdot \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}s.$$

Mit (b) folgt daraus die Ungleichung

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(\cdot,s)\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}s.$$

□

Beweis von Satz 1.27. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass

$$\lim_{\tau\to 0} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0,$$

wobei $f_\tau := f(\cdot - \tau)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\sup_{|\tau|\le\delta} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned}(k_n * f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f(t-\tau)\mathrm{d}\tau - f(t)\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.28 folgt daraus

$$\begin{aligned}\|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|k_n(\tau)(f(\cdot-\tau) - f)\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)| \cdot \|f(\cdot-\tau) - f\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Wir zerlegen das Integral auf der rechten Seite in zwei Teile:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)|\|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}\tau \\ &\le \sup_{|\tau|\le\delta} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau < \varepsilon\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |k_n(\tau)|\|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})}\mathrm{d}\tau \\ &\le \sup_{|\tau|\le\pi} \|f_\tau - f\|_{L^p(\mathbb{T})}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} \|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \|k_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

□

Korollar 1.29. *Sei $1 \le p < \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{T})$ gilt*

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,\cdot) &\xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p(\mathbb{T}), \\ A_r(f,\cdot) &\xrightarrow[r\to 1]{} f \text{ in } L^p(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

Korollar 1.30 (Trigonometrischer Approximationssatz). *Trigonometrische Polynome sind dicht in $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.*

Korollar 1.31 (Eindeutigkeitssatz). *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Gilt $\widehat{f}(n) = \hat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist $f = g$ f.ü.*

BEWEIS. Aus $\widehat{f} = \widehat{g}$ folgt $\sigma_n(f,\cdot) = \sigma_n(g,\cdot)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$, d.h. $f = g$ fast überall. $\square$

KOROLLAR 1.32. *Sei $X = C(\mathbb{T})$ oder $X = L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Die Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ v = g & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit $g \in X$ besitzt genau eine Lösung. Sie ist durch $v(r,t) = (P_r * g)(t)$ gegeben. Genauer: Zu jedem $g \in X$ existiert genau eine harmonische Funktion $v(r,t)$ mit $\|v(r,\cdot) - g\|_X \xrightarrow[r\to 1]{} 0$.

BEWEIS. (1) Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Wir wollen die Reihe

$$(P_r * g)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}, \qquad r < 1$$

differenzieren. Dafür brauchen wir das folgende Kriterium: Wenn die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} u_j'(x)$ gleichmäßig in (a,b) konvergiert, dann ist

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j'(x).$$

Berechne

$$\begin{aligned} \Delta r^{|n|} e^{int} &= |n|(|n|-1) r^{|n|-2} e^{int} + \\ &+ |n| r^{|n|-2} e^{int} - n^2 r^{|n|-2} e^{int} = 0 \text{ für } |n| \geq 2. \end{aligned}$$

Für $|n| = 1$ gilt

$$\Delta r^{|n|} e^{int} = \Delta r e^{\pm it} = \frac{1}{r} e^{\pm it} - \frac{1}{r} e^{\pm it} = 0.$$

Für $n = 0$ ist Δ const $= 0$. Also ist $P_r * g$ harmonisch in $B_1(0)$.

(2) Die Grenzwerteigenschaft ist bereits bewiesen (s. Korollare 1.25 und 1.29).

(3) Eindeutigkeit.

(a) $X = C(\mathbb{T})$. Definiere

$$\overline{v}(r,t) := \begin{cases} v(r,t), & r < 1, \\ \lim\limits_{r\to 1} v(r,t) = g(t), & r = 1. \end{cases}$$

BEHAUPTUNG 1. Die Funktion $\overline{v}$ ist stetig auf $\overline{B_1(0)}$.

BEWEIS. Sei $(r_n, t_n) \in B_1(0)$ eine Folge mit $r_n \to 1$, $t_n \to t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\overline{v}(r_n,t_n) - \overline{v}(1,t)| &\leq |\overline{v}(r_n,t_n) - \overline{v}(1,t_n)| + |\overline{v}(1,t_n) - \overline{v}(1,t)| \\ &= |\overline{v}(r_n,t_n) - \overline{v}(1,t_n)| + |g(t_n) - g(t)|. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite konvergiert gegen Null für $n \to \infty$ nach der Definition von $\overline{v}$. Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert gegen Null, denn g ist stetig. $\boxed{\text{B1}}$

Nun wollen die Eindeutigkeit der Lösung zeigen.

BEHAUPTUNG 2. Sei $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ harmonisch. Dann ist

$$u(r,t) = (P_r * \varphi)(t)$$

für ein $\varphi \in C(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Setze $\varphi(t) := u(1,t)$. Betrachte

$$w(r,t) := u(r,t) - (P_r * \varphi)(t).$$

Die Funktion w ist harmonisch und es gilt $w(1,t) = 0$. Mit dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen (s. Vorlesungsskript zu partiellen Diffrenzialgleichungen) ist $w(r,t) = 0$ für alle $0 \le r < 1$. $\boxed{\text{B2}}$

(b) Für $X = L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, können wir die Aussage noch nicht beweisen. Mit solchen Fragestellungen beschäftigt sich Harmonische Analysis. $\square$

AUFGABE 1.33. *Lösen Sie die Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit $g(t) = \sin 2t$.

1.6. Lokale Summierbarkeit von Fourierreihen

SATZ 1.34. *Sei (k_n) eine Dirac-Folge, $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Es gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\delta<|t|<\pi} |k_n(t)| = 0 \qquad \forall \delta \in (0,\pi) \tag{1}$$

oder

$$f \in L^\infty(\mathbb{T}). \tag{2}$$

Dann gilt:

(a) *Ist f stetig im Punkt t_0, so ist $(k_n * f)(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0)$;*

(b) *Ist die Dirac-Folge (k_n) symmetrisch, d.h. $k_n(-t) = k_n(t)$, und $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)+f(t_0-h)}{2} =: L$ existiert, so gilt $(k_n * f)(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.*

BEWEIS. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \max_{|\tau|\le\delta} |f(t_0-\tau) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}|(k_n * f)(t_0) - f(t_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)\,(f(t_0-\tau) - f(t_0))\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|\leq\delta} |k_n(\tau)|\,|f(t_0-\tau) - f(t_0)|\,\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\tau|<\pi} |k_n(\tau)|\,|f(t_0-\tau) - f(t_0)|\,\mathrm{d}\tau \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Für I_1 gilt

$$I_1 \leq \frac{1}{2\pi}\max_{|\tau|\leq\delta}|f(t_0-\tau) - f(\tau_0)|\int_{\mathbb{T}}|k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau < \varepsilon.$$

Unter Voraussetzung (1) gilt

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \sup_{\delta<|t|<\pi}|k_n(t)|\frac{1}{2\pi}|f(t_0-\tau) - f(t_0)|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \sup_{\delta<|t|<\pi}|k_n(t)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t_0-\tau)|\mathrm{d}\tau + |f(t_0)|\right) \\ &= \sup_{\delta<|t|<\pi}|k_n(t)|\left(\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + |f(t_0)|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

und unter Voraussetzung (2)

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\tau|<\pi}|k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau\left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + |f(t_0)|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Wegen der Symmetrie des Integralkernes $k_n(t)$ ist

$$(k_n * f)(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} k_n(t)\,(f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass

$$\frac{1}{2}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})}\sup_{0<\tau\leq\delta}|f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L| < \varepsilon.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}|(k_n * f)(t_0) - L| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|k_n(t)||f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}|k_n(t)||f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L|\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|k_n(t)||f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L|\mathrm{d}\tau \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Für I_1 gilt

$$\begin{aligned}I_1 &\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{0<\tau\leq\delta}|f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L|\int_0^{\pi}|k_n(\tau)|\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\|k_n\|_{L^1(\mathbb{T})}\sup_{0<\tau\leq\delta}|f(t_0-\tau) + f(t_0+\tau) - 2L| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Unter Voraussetzung (1) ist

$$I_2 \leq \sup_{\delta<\tau<\pi} |k_n(t)| \left(2\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + L\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und unter Voraussetzung (2)

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi |k_n(\tau)| \mathrm{d}\tau \left(2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2L\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

BEMERKUNG. *Später beweisen wir, dass $k_n * f \to f$ fast überall für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

Was ist mit der Konvergenz der Fourierreihe selbst? Also für $k_n(t) = D_n(t)$?

SATZ 1.35 (Dini-Kriterium). *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Gilt*

$$\int_0^\pi |f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)| \frac{\mathrm{d}s}{s} < \infty$$

für ein $t \in \mathbb{T}$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int}$ gegen $f(t)$.

BEWEIS. Betrachte die Differenz

$$\begin{aligned}
S_n(f,t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,\mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,\mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(s)\,(f(t+s) - f(t))\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(s)\,(f(t+s) + f(t-s) - 2f(t))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) s \frac{s}{\sin(s/2)} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{s} \mathrm{d}s.$$

Hier ist die Funktion $\dfrac{s}{\sin(s/2)}$ beschränkt und $\dfrac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{s}$ integrierbar. Nach Lemma von Riemenn-Lebesgue strebt das Integral gegen Null für $n \to \infty$. □

SATZ 1.36 (Jordan-Kriterium). *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig. Ist $f \in \mathrm{BV}(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$, so konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int_0}$ gegen $\frac{1}{2}(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0))$.*

BEMERKUNG. *Die Existenz der einseitigen Grenzwerte $f(t_0 \pm 0)$ folgt aus der Voraussetzung $f \in \mathrm{BV}(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$. Wir diskutieren diese Aussage ausführlich.*

BEHAUPTUNG. *Eine Funktion ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie sich als Differenz zweier monoton steigender beschränkter Funktionen darstellen lässt.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. Setze $u(x) := \mathrm{Var}_{[a,x]}(f)$. Offenbar ist u monoton wachsend. Setze $v(x) := u(x) - f(x)$. Seien $x, x' \in [a,b]$, $x < x'$, beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(x') - v(x) &= \mathrm{Var}_{[a,x']}(f) - \mathrm{Var}_{[a,x]}(f) \\ &- (f(x') - f(x)) = \mathrm{Var}_{[x,x']}(f) - (f(x') - f(x)) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\mathrm{Var}_{[x,x']}(f) \geq |f(x') - f(x)|$ und somit $v(x') - v(x) \geq 0$. Umgekehrt, sei $f(x) = u(x) - v(x)$ mit u, v monoton wachsend und beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |u(x_i) - v(x_i) - u(x_{i-1}) + v(x_{i-1})| \\ &\leq |u(x_i) - u(x_{i-1})| + |v(x_i) - v(x_{i-1})|. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f) &= \sup_{a=x_0<x_1<\ldots<x_i=b} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq |u(b) - u(a)| + |v(b) - v(a)|. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

BEHAUPTUNG. *Jede monoton wachsende beschränkte Funktion besitzt einseitige Grenzwerte.*

BEWEIS. Seien $x \in (a,b]$ und $\delta > 0$ beliebig. Die Menge $f((x-\delta, x))$ ist nach oben beschränkt, d.h. $A := \sup_{y \in (x-\delta,x)} f(y) < \infty$. Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in (x - \delta, x)$ mit $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq A$. Aufgrund der Monotonie folgt $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq A$ für alle $x \in (x_\varepsilon, x)$, d.h. der einseitige Grenzwert $\lim_{y \to x-} f(x)$ existiert und gleich A ist. $\boxed{\text{B}}$

BEWEIS VON SATZ 1.36. O.B.d.A. sei $t_0 = 0$. O.B.d.A. sei f monoton wachsend auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Es genügt zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} \right) D_n(t) f(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)(f(t) + f(-t)) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(t) f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} f(0+)$$

O.B.d.A. sei f monoton wachsend mit $f(0+) = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $0 \leq f(t) < \varepsilon$ für alle $0 < t < \delta$. Wir zerlegen das Integral in zwei Teile:

$$\int_0^\pi D_n(t) f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\delta D_n(t) f(t) \mathrm{d}t + \int_\delta^\pi D_n(t) f(t) \mathrm{d}t.$$

Behauptung 1. (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funktionen, f monoton und g stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t = f(a) \int_a^\xi g(t) \mathrm{d}t + f(b) \int_\xi^b g(t) \mathrm{d}t.$$

Beweis. O.B.d.A. sei f monoton wachsend. Setze

$$G(s) := \int_a^s g(t) \mathrm{d}t.$$

(1) Für $f \in C^1([a,b])$ ist der Beweis sehr einfach. Mit der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t &= f(t) G(t)\big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t) G(t) \mathrm{d}t \\ &= f(b) G(b) - \int_a^b f'(t) G(t) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

wobei $f'(t) \geq 0$. Mit dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt die Existenz eines $\xi \in [a,b]$ so, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t &= f(b) G(b) - G(\xi) \int_a^b f'(t) \mathrm{d}t \\ &= f(b) G(b) - G(\xi) f(b) + G(\xi) f(a) \\ &= f(a) \int_a^\xi g(t) \mathrm{d}t + f(b) \int_\xi^b g(t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(2) Im allgemeinen Fall genügt es zu zeigen, dass es ein $\xi \in [a,b]$ gibt mit

$$f(b) G(b) - f(a) G(a) - \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t = (f(b) - f(a))\, G(\xi).$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gilt dies dann, wenn

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a)) \min G &\leq f(b) G(b) - f(a) G(a) - \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t \\ &\leq (f(b) - f(a)) \max G. \end{aligned}$$

Sei $[a,b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}]$ mit $t_k < t_{k+1}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} f(b)G(b) - f(a)G(a) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(t_{k+1})G(t_{k+1}) - f(t_k)G(t_k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(t_{k+1}) - f(t_k) \right) G(t_{k+1}) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \left(G(t_{k+1}) - G(t_k) \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a)) \min G &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(t_{k+1}) - f(t_k) \right) G(t_{k+1}) \\ &\leq (f(b) - f(a)) \max G \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \left(G(t_{k+1}) - G(t_k) \right) - \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(f(t_k) - f(t) \right) g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

beliebig klein gemacht werden kann.

Ist f stetig, so gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ für alle $s,t \in [a,b]$ mit $|t-s| < \delta$. Für jede Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit $|t_{k+1} - t_k| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(f(t_k) - f(t) \right) g(t) dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)| \, |g(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq \varepsilon \int_a^b |g(t)| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Sei nun f nicht stetig. Dann besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Daher ist die Menge

$$X := \{ t \in [a,b] \mid f(t+0) - f(t-0) > \mu \}$$

für jedes $\mu > 0$ endlich. Wähle ein

$$\mu < \frac{\varepsilon}{4 \int_a^b |g(x)| dx}.$$

Setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2|X|(f(b) - f(a)) \max\limits_{s \in [a,b]} |g(s)|}.$$

Wähle eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit $t_{k+1} - t_k < \delta$ für alle $k = 0, \ldots, N-1$. Dann ist

$$\sum_{\substack{k=0\\ [t_k,t_{k+1}]\cap X\neq\emptyset}}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)|\,|g(t)|\mathrm{d}t \le |X|\delta(f(b)-f(a)) \max_{s\in[a,b]} |g(s)| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Menge

$$S := [a,b] \setminus \bigcup_{[t_k,t_{k+1}]\cap X\neq\emptyset} (t_k, t_{k+1}) = \bigcup_{[t_k,t_{k+1}]\cap X=\emptyset} [t_k, t_{k+1}]$$

ist kompakt. Zu jedem $t \in S$ gibt es eine Zahl $r(t) > 0$, sodass

$$f(t + 2r(t)) - f(t - 2r(t)) \le 2\mu,$$

denn $\lim\limits_{h\to 0}(f(t+h) - f(t-h)) \le \mu$. Folglich gibt es eine endliche Überdeckung von S mit offenen Intervallen

$$(t_l - 2r(t_l), t_l + 2r(t_l)), \qquad l = 1, \ldots, M.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass jedes Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ in einer der Überdeckungsmengen $(t_l - 2r(t_l), t_l + 2r(t_l))$ liegt, sonst kann die Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ verfeinert werden. Also ist

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) \le 2\mu.$$

Folglich ist

$$\sum_{\substack{k=0\\ [t_k,t_{k+1}]\cap X=\emptyset}}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)|\,|g(t)|\mathrm{d}t \le 2\mu \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{\text{B1}}$

Wenn wir die Funktion f umdefinieren und setzen $f(a) = f(a+), f(b) = f(b-)$, bleibt die Funktion f monoton wachsend. Mit dem zweiten Mittelwertsatz können wir schreiben

$$\int_0^\delta D_n(t)f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{f(0+)}_{=0} \int_0^\xi D_n(t)\mathrm{d}t + f(\delta-) \int_\xi^\delta D_n(t)\mathrm{d}t.$$

Also ist

$$\int_0^\pi D_n(t)f(t)\mathrm{d}t = f(\delta-) \int_\xi^\delta D_n(t)\mathrm{d}t + \int_\delta^\pi D_n(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Das zweite Integral strebt gegen Null für $n \to \infty$ nach Lemma von Riemann-Lebesgue. Ferner ist $f(\delta-) < \varepsilon$. Somit genügt es zu beweisen, dass $\int_\xi^\delta D_n(t)\mathrm{d}t$ gleichmäßig bezüglich ξ, δ und n beschränkt ist.

Behauptung 2. $\int\limits_0^\delta D_n(t)\mathrm{d}t$ ist gleichmäßig beschränkt bezüglich $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$.

Beweis. Betrachte zunächst

$$\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t \overset{s=(n+1/2)t}{=} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta} \frac{\sin s}{s}\mathrm{d}s = \mathrm{Si}\left((n+\frac{1}{2})\delta\right),$$

wobei die Funktion

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s$$

wird als *Integralsinus* bezeichnet. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Si}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{Si}(x)\Big|_{x=k\pi} = \frac{\cos x}{x}\Big|_{x=k\pi} - \frac{\sin x}{x^2}\Big|_{x=k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}$$

besitzt der Integralsinus lokale Minima an den Stellen $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ und lokale Maxima an den Stellen $x = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\mathrm{Si}(\pi) > 0$. Betrachte

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(2\pi) &= \mathrm{Si}(\pi) + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s - \int_0^\pi \frac{\sin s}{s+\pi} \mathrm{d}s > 0.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(3\pi) &= \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s - \int_0^\pi \frac{\sin s}{s+\pi} \mathrm{d}s + \int_0^\pi \frac{\sin s}{s+2\pi} \mathrm{d}s \\ &< \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Si}(3\pi) > \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s - \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \mathrm{d}s = 0.$$

Durch rekursives Anwenden dieser Analyse erhält man die zweiseitige Abschätzung

$$0 < \mathrm{Si}(x) \le \mathrm{Si}(\pi) = 1{,}851937\ldots.$$

Nun betrachte das Integral

$$(*) \qquad \begin{aligned}\int_0^\delta \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin t/2} \mathrm{d}t &= 2\int_0^\delta \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t} \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^\delta \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right) = 0$$

und somit ist die Funktion $\left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right)$ integrierbar auf dem Intervall $(0,\pi)$. Nach Lemma von Riemann-Lebesgue konvergiert das zweite Integral in $(*)$ gegen Null für $n \to \infty$. Folglich ist dieses Integral ebenfalls gleichmäßig beschränkt. $\boxed{\text{B2}}$

Nach Behauptung 2 ist das Integral $\displaystyle\int_\xi^\delta D_n(t)\mathrm{d}t$ gleichmäßig beschränkt bezüglich ξ, δ und n. Daher existiert ein $C > 0$ sodass

$$\left|f(\delta-)\int_\xi^\delta D_n(t)\mathrm{d}t\right| \le C\varepsilon,$$

d.h.

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_\xi^\delta D_n(t)f(t)\mathrm{d}t\right| \le C\varepsilon.$$

□

Die Konvergenzkriterien von Dini und von Jordan sind unabhängig voneinander. Um das zu sehen betrachten wir zwei Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|\log t/2\pi|}, & 0 < t \le \pi \\ 0, & -\pi < t \le 0 \end{cases}$$

und

$$g(t) = \begin{cases} t^\alpha \sin\frac{1}{t}, & 0 < t \le \pi \\ 0, & -\pi < t \le 0 \end{cases}$$

für ein $\alpha \in (0,1)$. Die Funktion f ist beschränkt und monoton wachsend, somit erfüllt das Jordan-Kriterium. Jedoch erfüllt sie das Dini-Kriterium nicht, denn

$$\int_0^\pi \frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{t\left|\log\frac{t}{2\pi}\right|} = \infty.$$

Die Funktion g ist nicht von lokal beschränkter Veriation in jeder Umgebung von $t = 0$, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^\alpha \sin\frac{1}{t} = \alpha t^{\alpha-1}\sin\frac{1}{t} - t^{\alpha-2}\cos\frac{1}{t}$$

ist nicht absolut integrierbar. Andererseits gilt

$$\int_0^\pi \frac{|g(t)+g(-t)-2g(0)|}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{|g(t)|}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi t^{\alpha-1}\left|\sin\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t$$
$$\overset{s=1/t}{=} \int_{1/\pi}^\infty s^{-\alpha-1}|\sin s|\mathrm{d}s < \infty.$$

Also erfüllt die Funktion g das Dini-Kriterium, aber nicht das Jordan-Kriterium.

Eine Verallgemeinerung von beiden Kriterien stellt das de la Vallée Poussin Kriterium dar.

SATZ 1.37 (de la Vallée Poussin Kriterium). *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig. Ist die Funktion*

$$\varphi(t) := \frac{1}{t}\int_0^t (f(t_0+s)+f(t_0-s)-2f(t_0))\mathrm{d}s$$

von beschränkter Variation im Intervall $(0,\varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$, so ist die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt_0}$ konvergent. Gilt $\varphi(0+) = 0$, so ist der Grenzwert $f(t_0)$.

Erfüllt eine Funktion die Voraussetzung des Jordan- oder des Dini-Kriteriums, so erfüllt sie auch die Voraussetzung des de la Vallée Poussin-Kriteriums. Für den Beweis diese Aussage brauchen wir folgendes Ergebnis.

BEHAUPTUNG. Sei g eine Funktion beschränkter Variation in einem Intervall $(0, \varepsilon_0)$. Dann ist auch $G(x) := \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ von beschränkter Variation in $(0, \varepsilon_0)$.

BEWEIS. O.B.d.A. sei g monoton steigend und beschränkt. Die Funktion G ist fast überall differenzierbar mit

$$G'(x) = \frac{g(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Wegen der Monotonie von g gilt

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x g(x)\mathrm{d}t = xg(x).$$

Also ist

$$G'(x) \geq \frac{g(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0,$$

d.h. G ist monoton wachsend. $\boxed{\text{B}}$

Sein nun g eine Funktion beschränkter Variation in einem Intervall $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \subset \mathbb{T}$. Dann ist $s \mapsto f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)$ von beschränkter Variation. Nach der Behauptung ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0))\mathrm{d}s$$

ebenfalls von beschränkter Variation. Also impliziert die Jordan-Bedingung die de la Vallée Poussin-Bedingung. Nun sei die Funktion

$$s \mapsto \frac{f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)}{s}$$

integrierbar. Dann ist

$$\psi(t) := \int_0^t \frac{f(t_0 + s) + f(t_0 - s) - 2f(t_0)}{s}\mathrm{d}s$$

von beschränkter Variation. Wegen der Identität

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t s\psi'(t)\mathrm{d}s = \psi(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \psi(t)\mathrm{d}t$$

folgt mit der Behauptung, dass φ auch von beschränkter Variation ist. Also impliziert auch die Jordan-Bedingung die de la Vallée Poussin-Bedingung.

KOROLLAR 1.38. *Sei $f \in C(\mathbb{T}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{T})$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f für alle $t \in \mathbb{T}$ gegen f.*

AUFGABE 1.39. *Sei $f \in C(\mathbb{T}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{T})$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gegen f gleichmäßig.*

SATZ 1.40. *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

(1) *Ist f stetig im Punkt $t_0 \in \mathbb{T}$ und $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int_0}$ gegen $f(t_0)$.*

(2) *Ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, so konvergiert die Fourierreihe $\sum \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int}$ gegen $f(t)$ gleichmäßig.*

BEWEIS.

(1) Nach Satz 1.34 ist $\sigma_n(f, t_0) \longrightarrow f(t_0)$.
(2) Nach Satz 1.24 ist $\sigma_n(f, t) \longrightarrow f(t)$ gleichmäßig.

Dass auch die Partialsummen der Fourierreihe dieselbe Konvergenzeigenschaften wie ihre Cesàro-Mittelwerte haben, folgt aus dem folgenden Ergebnis:

Aufgabe 1.41. *Ist die Reihe $\sum c_n$ Cesaro-summierbar mit Grenzwert s und $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, so konvergiert die Reihe $\sum c_n$ gegen s.*
Hinweis: Benutze das Kriterium (Satz 1.18) für die Cesàro-Summierbarkeit.

□

1.7. Konvergenz von Fourierreihen fast überall (Ausblick)

Satz 1.42 (Kolmogorov). *Es gibt ein $f \in L^1(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe* überall *divergent ist, d.h.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,t)| = \infty \qquad \text{für alle} \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Der Beweis ist sehr lang und nicht konstruktiv (siehe z.B. Grafakos „Classical Fourier Analysis“).

Satz 1.43 (du Bois Reymond). *Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe im Punkt $t = 0$ divergent ist, d.h.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,0)| = \infty.$$

Bemerkung. (1) *Nach Satz 1.43 existiert ein $f \in C(\mathbb{T})$, dessen Fourierreihe in endlich vielen Punkten $t \in \mathbb{T}$ divergent ist.*
(2) *(Katznelson) Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$ und eine dichte Nullmenge $N \subset \mathbb{T}$, so dass*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,t)| = \infty \qquad \text{für alle} \qquad t \in N.$$

Es gibt zwei prinzipiell verschiedene Beweise von Satz 1.43
(1) Analytisch und konstruktiv (Fejer),
(2) Funktionalanalytisch und nicht konstruktiv.

Wir diskutieren den funktionalanalytischen Beweis.

Beweis von Satz 1.43. Sei $T_n : C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto S_n(f, 0)$. Die Operatoren T_n sind linear und beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
|T_n f| &= |S_n(f,0)| = |(D_n * f)(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) f(0-\tau)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \Rightarrow \|T_n\| \le \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Behauptung 1. $\|T_n\| = \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $I_n \subset \mathbb{T}$ die Vereinigung offener Intervalle mit Mittelpunkten

$$\{t \in \mathbb{T} | D_n(t) = 0\} = \{t \in \mathbb{T}\backslash\{0\} | \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t = 0\}$$

und Gesamtlänge kleiner als $\frac{\varepsilon}{2n+1}$. Sei $g_n \in C(\mathbb{T})$ beliebig mit

(1) $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1$,
(2) $g_n(t) = g_n(-t)$,
(3) $g_n(t) = \begin{cases} 1, & D_n(t) > 0, t \notin I_n \\ -1, & D_n(t) < 0, t \notin I_n. \end{cases}$.

Dann gilt

$$|T_n(g_n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau \right|.$$

Zunächst betrachte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau &= \int_{\mathbb{T}\setminus I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau + \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{T}\setminus I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau + \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau \right| &\leq \int_{I_n} |D_n(\tau)| \cdot |g_n(\tau)| \mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_{I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

ist

$$\int_{I_n} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau \geq - \int_{I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau &\geq \int_{\mathbb{T}\setminus I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau - \int_{I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{T}} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau - 2 \int_{I_n} |D_n(\tau)| \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung $|D_n(\tau)| \leq 2n+1$ folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} D_n(\tau) g_n(\tau) \mathrm{d}\tau &\geq 2\pi \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - 2(2n+1)\frac{\varepsilon}{2n+1} \\ &= 2\pi \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - 2\varepsilon \\ &= 2\pi \left(\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$$

und somit

$$|T_n(g_n)| \geq \left(\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

d.h.

$$\|T_n\| \geq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$\|T_n\| \geq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

$\boxed{\text{B1}}$

Mit Proposition 1.21 folgt aus Behauptung 1 die Abschätzung $\|T_n\| \geq c \log n + d$ für gewisse Konstanten $c, d \geq 0$.

BEHAUPTUNG 2. Es gibt ein $f \in C(\mathbb{T})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f)| = \infty$$

BEWEIS. Angenommen, es gelte $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$, d.h. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f)| < C_f$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (s. Funktionalanalysis) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Widerspruch! $\boxed{\text{B2}}$ $\square$

Existiert eine stetige Funktion mit der Fourierreihe, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{T}$ mit positivem Lebesgue-Maß divergiert? Nein! Das folgt aus dem Satz von Carleson-Hunt:

SATZ 1.44 (Carleson-Hunt). *Sei $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$S_n(f,t) \longrightarrow f(t) \qquad \textit{fast überall.}$$

Dieser Satz galt lange Zeit als Lusinsche Vermutung (1913), wurde bewiesen von Carleson (1966) für $p = 2$ und Hunt (1967) für $1 < p < \infty$. Den Beweis findet man z.B. in Reyna „Pointwise Convergence of Fourier Series“.

1.8. Integration der Fourierreihen

Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ dessen Fourierreihe. Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f, so gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{i}n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - 1), n \neq 0 \\ t, n = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Für Fourierreihen gilt wesentlich mehr.

SATZ 1.45. *Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit der Fourierreihe $\sum c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ (keine Voraussetzung bezüglich der Konvergenz). Dann gilt*

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s \qquad \textit{für alle} t \in \mathbb{T}.$$

BEWEIS. Setze

$$F(t) = \int_0^t (f(s) - c_0)\mathrm{d}s.$$

Dann ist $F(0) = 0$ und $F(2\pi) = 2\pi c_0 - 2\pi c_0 = 0$. Also ist $F \in C(\mathbb{T})$.

BEHAUPTUNG. $F \in BV(\mathbb{T})$.

Beweis. Sei $g_+(s) := \max\{f(s) - c_0, 0\}$ und $g_-(s) := -\min\{f(s) - c_0, 0\}$. Dann sind $g_\pm$ nichtnegativ und

$$f(s) - c_0 = g_+(s) - g_-(s)$$

und folglich

$$F(t) = \int_0^t g_+(s)\mathrm{d}s - \int_0^t g_-(s)\mathrm{d}s.$$

Die beiden Integrale sind monoton wachsend. □

Nach Korollar 1.38 konvergiert die Fourierreihe von F gegen F für alle $t \in \mathbb{T}$. Nach Aufgabe 1.39 ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von F für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} d_n &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}F(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\Bigg|_{t=-\pi}^{t=+\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}n}c_n. \end{aligned}$$

Also ist

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + d_0.$$

Für $t = 0$ ist $F(0) = 0$ und somit

$$d_0 = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - 1\right), \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)\mathrm{d}s &= c_0 t + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{\mathrm{i}n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - 1\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_n \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

□

Aus dem Beweis folgt, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{n}$ konvergent ist. Mit dieser Beobachtung können wir trigonometrische Reihen konstruieren, die keine Fourierreihen sind. Zum Beispiel $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ ist keine Fourierreihe, denn $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ ist divergent.

Behauptung 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{T}$.

BEWEIS. Für $t=0$ ist die Konvergenz klar. Für $t \neq 0$ benutzen wir das Dirichlet-Kriterium:

(1) Die Partialsummen $\sum_{k \leq N} a_n$ seien gleichmäßig beschränkt,

(2) $b_n \to 0$ monoton fallend.

Dann ist die Reihe $\sum_n a_n b_n$ konvergent.

Wir betrachten die Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \sin(nt)$ statt $\sum_{n=2}^{N} \sin(nt)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sin(nt) &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \operatorname{Im} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)t})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-i(N+1)t})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin t - \sin(N+1)t + \sin Nt}{1-\cos t}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin(nt) \right| \leq \frac{3}{2} \frac{1}{1-\cos t}.$$

$\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2. Die Funktion

$$f(t) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$$

ist nicht integrierbar.

BEWEIS. Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ konvergiert gleichmäßig für alle $t \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$, denn

$$\frac{1}{1-\cos t} \leq C_\delta$$

für alle $t \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$. Dann gilt für jedes $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int_t^\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(ns)}{\log n} \mathrm{d}s &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_t^\pi \frac{\sin(ns)}{\log n} \mathrm{d}s \\
&= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(ns)}{n \log n} \bigg|_{s=t}^{s=\pi} \\
&- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n \log n}.
\end{aligned}$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass

$$\lim_{t \to 0+} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n \log n} = \infty.$$

$\boxed{\text{B2}}$

BEMERKUNG. *Es besteht eine Verbindung zwischen Fourier- und Taylorreihen. Es gilt*

$$\log\left(1+\frac{z}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2^n n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 2$. *Setze* $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$*:*

$$\log\left(1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}}{2^n n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n}{2^n n}, & n \geq 1 \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten c_n *sind die Fourierkoeffizienten der Funktion* $t \mapsto \log\left(1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{2}\right)$.

1.9. Konvergenz im quadratischen Mittel

SATZ 1.46. (a) *Sei* $f \in L^2(\mathbb{T})$. *Dann gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad \textit{(Parsevalsche Identität)}$$

und

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \textit{ bezüglich der } L^2-\textit{Norm}$$

(b) *Zu jeder Folge* $(c_N)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ *gibt es genau ein* $f \in L^2(\mathbb{T})$, *so dass* $c_n = \widehat{f}(n)$.

(c) *Seien* $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. *Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}(n)$$

BEMERKUNG. (1) $L^2(\mathbb{T})$ *und* $l^2(\mathbb{Z})$ *sind Hilberträume mit Skalarprodukten*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t,$$
$$\langle c, d\rangle_{l^2(\mathbb{Z})} := \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \overline{c_j}d_j.$$

Das Skalarprodukt erfüllt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

(2) *Nach Satz 1.46 ist die Abbildung* $\hat{} : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ *ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen, d.h.* $\hat{}$ *ist eine lineare isometrische Bijektion, die das Skalarprodukt erhält.*

FUNKTIONALANALYTISCHE BEWEIS. Sei $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\{e_j | j \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Orthonormalsystem, d.h. $\langle e_j, e_k\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \delta_{jk}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Es gelte $\langle e_j, f\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ für ein $f \in L^2(\mathbb{T})$. Dann sind alle Fourierkoeffizienten von f Null. Nach Korollar 1.31 gilt $f = 0$ fast überall. Also ist $\{e_j | j \in \mathbb{Z}\}$ ein maximales Orthonormalsystem, d.h. eine Orthonormalbasis. Die Aussagen (a), (b), (c) folgen nun aus dem Entwicklungssatz für Hilberträume. $\square$

Analytischer Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten von f. Setze

$$\varphi(t) := f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

und berechne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \overline{C_n} \int_{\mathbb{T}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t + \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} c_n + \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 .
\end{aligned}$$

Also gilt die Ungleichung

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t, \qquad \text{(Besselsche Ungleichung)}$$

die impliziert, dass die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ konvergent ist mit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

(2) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ beliebig. Setze $S_N(t) := \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. Sei $M < N$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |S_N(t) - S_\mu(t)|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{n=-N}^{-M-1} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \sum_{n=M+1}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \right|^2 \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-N}^{-M-1} |c_n|^2 + \sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2 \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Also ist $(S_N(t))_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{T})$. Wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{T})$ ist diese Folge konvergent, d.h. $\|f - S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0$ für ein $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Wir berechnen nun die Fourierkoeffizienten der Funktion f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} = \langle e_n, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Behauptung 1. $\langle e_n, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \lim\limits_{n\to\infty} \langle e_n, S_N \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$.

Beweis. Mit der Cauchy-Schwarzchen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}|\langle e_n, f\rangle - \langle e_n, S_N\rangle| &= |\langle e_n, f - S_N\rangle| \\ &\le \|e_n\|_{L^2(\mathbb{T})}\|f - S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B1}}$

Also gilt

$$\widehat{f}(n) = \lim_{N\to\infty}\langle e_n, S_N\rangle = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}} S_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty}\begin{cases} c_n, & |n| \le N, \\ 0, & |n| > N\end{cases}$$

und daher $\widehat{f}(n) = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit ist die Aussage (b) bewiesen.

(3) Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Wegen (1) ist die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ konvergent. Nach (2) existiert eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$g(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

bezüglich der L^2-Norm. Nach Korollar 1.31 gilt $f(t) = g(t)$ fast überall.

Setze $S_N(t) := \sum\limits_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

Behauptung 2. Es gilt $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_N\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$.

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned}\|S_N\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \langle S_N, S_N\rangle - \langle f, f\rangle \\ &= \langle S_N, S_N\rangle - \langle S_N, f\rangle + \langle S_N, f\rangle - \langle f, f\rangle \\ &= \langle S_N, S_N - f\rangle + \langle S_N - f, f\rangle.\end{aligned}$$

Nun erhalten wir mir der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\|S_N\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\right| &\le |\langle S_N, S_N - f\rangle| + |\langle S_N - f, f\rangle| \\ &\le \|S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}\|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\qquad + \|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})}\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\le 2\|S_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})}\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Hier wurde in dem letzten Schritt die Abschätzung

$$\|S_N\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=-N}^{N}|\widehat{f}(n)|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$$

benutzt. $\boxed{\text{B2}}$

Also ist $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2$. Die Aussage (a) ist somit bewiesen.

(4) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Analog zu Behauptung 2 lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{N\to\infty}\langle S_N(f,\cdot), S_N(g,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Wegen

$$\langle S_N(f,\cdot), S_N(g,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}$$

ist somit die Aussage (c) bewiesen. □

Mithilfe der Interpolationstheorie, genauer des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin, kann man zeigen, dass die Abbildung $\widehat{\cdot} : L^p(\mathbb{T}) \to \ell^q(\mathbb{Z})$ für alle $p \in (1,2)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wohldefiniert und stetig ist. Für alle $f \in L^p(\mathbb{T})$ gilt die Ungleichung von Hausdorff-Young:

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p < \infty$ eine Funktion $f \in L^q(\mathbb{T})$ mit $\widehat{f}(n) = c_n$ und

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p\right)^{1/p}.$$

Der Satz von Hausdorff-Young gilt nicht für $p > 2$!

1.10. Die Wiener-Algebra und der Satz von Bernstein

DEFINITION 1.47. *Sei*

$$A(\mathbb{T}) := \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty\}.$$

Offensichtlich ist $A(\mathbb{T})$ ein Vektorraum.

LEMMA 1.48. *Ist $f \in A(\mathbb{T})$, so ist f fast überall stetig. Genauer: Die Funktion f kann auf einer Nullmenge so abgeändert werden, dass sie stetig wird.*

BEWEIS. Ist $f \in A(\mathbb{T})$, so ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ konvergent. Daher ist

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \sum_{|n|>N} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \right| \leq \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ gleichmäßig und folglich ist die Funktion

$$t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

stetig.

Andererseits folgt aus $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$, denn $x^2 \leq x$ für $x \in [0,1]$. Nach Satz 1.46 ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ und mit Satz von Carleson-Hunt (Satz 1.44)

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \qquad \text{fast überall.}$$

□

LEMMA 1.49. *Die Abbildung $\widehat{\cdot} : A(\mathbb{T}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ ist eine lineare Bijektion.*

BEWEIS. Die Injektivität folgt aus dem Eindeutigkeitssatz (Korollar 1.31). Für den Beweis der Surjektivität sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige Folge in $\ell^1(\mathbb{Z})$. Betrachte

$$g(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Wie oben zeigt man, dass diese Reihe gleichmäßig konvergent ist und somit g stetig ist. Also ist $g \in L^1(\mathbb{T})$. □

LEMMA 1.50. *Das Funktional*

$$f \mapsto \|f\|_{A(\mathbb{T})} := \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$$

ist eine Norm auf $A(\mathbb{T})$.

BEWEIS. Ist $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = 0$, so ist $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und somit $f = 0$ fast überall. Die anderen Normaxiome lassen sich einfach überprüfen. □

LEMMA 1.51. $C^1(\mathbb{T}) \subset A(\mathbb{T})$ *und für jedes* $f \in C^1(\mathbb{T})$ *gilt*

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

BEWEIS. Sei $f \in C^1(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - (-\mathrm{i}n)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \mathrm{i}n\widehat{f}(n).\end{aligned}$$

Da f' stetig ist, ist $f' \in L^2(\mathbb{T})$ und

$$\|f'\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|n|}|n\widehat{f}(n)| + |\widehat{f}(0)| \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n\widehat{f}(n)|^2\right)^{1/2} + |\widehat{f}(0)| \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f'(t)|^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

denn $\pi < 2\sqrt{3}$. □

LEMMA 1.52. *Der normierte Raum* $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})})$ *ist vollständig.*

BEWEIS. Der normierte Raum $\ell^1(\mathbb{Z})$. Da $\widehat{\cdot} : A(\mathbb{T}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ eine Bijektion ist, genügt es zu zeigen, dass $\widehat{\cdot}$ stetig ist. Das folgt aus der Definition der $A(\mathbb{T})$-Norm: $\|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \|f\|_{A(\mathbb{T})}$, d.h. $\|\widehat{\cdot}\| = 1$. □

Nun definieren wir die Faltung zweier Folgen $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ durch
$$(a * b)(n) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)b(n-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m).$$
Die Faltung liegt wieder in $\ell^1(\mathbb{Z})$:
$$\begin{aligned}\|a * b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)b(n-m)\right| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)||b(n-m)| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(m)||b(k)| = \|a\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$

AUFGABE. *Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung für Folgen: Seien* $1 \leq p, q, r \leq \infty$, *sodass* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Ist* $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $b \in \ell^q(\mathbb{Z})$, *so gilt* $a * b \in \ell^r(\mathbb{Z})$ *und*
$$\|a * b\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}\|b\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

DEFINITION 1.53. *Ein Banachraum X mit Multiplikation* $X \times X \to X$ *heißt* Banachalgebra, *falls gilt*

(1) $(X, +, \cdot)$ *ist eine assoziative* $\mathbb{C}$*-Algebra, d.h. die Multiplikation ist bilinear* $(\alpha x + \beta y)\cdot z = \alpha x \cdot z + \beta y \cdot z$, $z \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha z \cdot x + \beta z \cdot y$ *und assoziativ;*
(2) $\|x \cdot y\| \leq \|x\|\,\|y\|$.

SATZ 1.54. $A(\mathbb{T})$ *mit Punktweiser Multiplikation von Funktionen ist eine Banachalgebra. Sie heißt die Wiener-Algebra.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass $fg \in A(\mathbb{T})$ und $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})}\|g\|_{A(\mathbb{T})}$ für alle $f, g \in A(\mathbb{T})$. Seien $f, g \in A(\mathbb{T})$ beliebig. Dann ist das Produkt fg fast überall stetig und somit integrierbar. Wir berechnen seine Fourierkoeffizienten und benutzen dabei, dass $A(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$:
$$\begin{aligned}\widehat{fg}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\right) g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)\widehat{g}(n-m) = (\widehat{f} * \widehat{g})(n).\end{aligned}$$
Mit der Youngschen Ungleichung für Folgen erhalten wir
$$\|\widehat{fg}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \|\widehat{f} * \widehat{g}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\|\widehat{g}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})},$$
d.h. $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})}\|g\|_{A(\mathbb{T})}$. □

SATZ 1.55 (Bernstein). *Sei* $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ *mit* $1/2 < \alpha \leq 1$. *Dann ist* $f \in A(\mathbb{T})$ *mit*
$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq C_\alpha\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}.$$

Hier ist $C_\alpha > 0$ eine Konstante, die nur von α abhängt und

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ t\neq s}} \frac{|f(s)-f(t)|}{d(t,s)^\alpha}$$

die Norm im Hölder-Raum $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.

Beweis. Wir brauchen die elementare Ungleichung

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1| \geq \frac{2|t|}{\pi}, \qquad t\in[-\pi,\pi]. \tag{1.3}$$

Wegen

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1|^2 = 2-2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2}$$

kann diese aus $|\sin x| \geq \dfrac{2|x|}{\pi}$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ gefolgert werden kann.

Seien $m\in\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{Z}$ mit $2^m \leq |n| < 2^{m+1}$ beliebig. Setze $h = \dfrac{2\pi}{42^m}$. Dann ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4\cdot 2^m}2^m \leq |n|h < \frac{2\pi}{4\cdot 2^m}2^{m+1} = \pi.$$

Mit (1.3) folgt daraus, dass

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1| \geq \frac{2|n|h}{\pi} \geq 1.$$

Nun betrachten wir

$$\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh}-1|^2|\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh}\widehat{f}(n)-\widehat{f}(n)|^2.$$

Nach Satz 1.2(c) ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh}\widehat{f}(n)$ ist der n-te Fourierkoeffizient der Funktion $f_h(t) := f(t+h)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_h}(n)-\widehat{f}(n)|^2 = \|f_h-f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\\ &\leq \|f_h-f\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq h^{2\alpha}\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}\\ &= \left(\frac{2\pi}{4\cdot 2^m}\right)^{2\alpha}\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}\left(\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|\right)^2 &\leq \left(\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} 1\right)\left(\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2\right)\\ &\leq 2^m \sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq 2^m\left(\frac{2\pi}{4\cdot 2^m}\right)^{2\alpha}\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \sum_{2^m\le|n|<2^{m+1}} |\widehat{f}(n)| \\ &\le \sum_{m\in\mathbb{N}_0} 2^{m/2}\left(\frac{2\pi}{4\cdot 2^m}\right)^{\alpha} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \sum_{m\in\mathbb{N}_0} 2^{m(1/2-\alpha)} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \\ &= \frac{(\pi/2)^{\alpha}}{1-2^{1/2-\alpha}} \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Wegen

$$|\widehat{f}(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{d}t\right| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})}$$

erhalten wir dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \le C_\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T})} \qquad \text{mit} \qquad C_\alpha = \frac{(\pi/2)^{\alpha}}{1-2^{1/2-\alpha}} + 1.$$

□

BEMERKUNG. *(1) Die Voraussetzung $\alpha > 1/2$ kann nicht geschwächt werden. Dazu betrachte die Hardy-Littlewood-Funktion*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\log n}}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Die Reihe konvergiert bezüglich der L^2-Norm. Die Funktion f liegt nicht in $A(\mathbb{T})$, jedoch gilt $f \in C^{0,1/2}(\mathbb{T})$.

(2) Typische Pfade der Brownschen Bewegung liegen in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ mit $0 < \alpha < 1/2$.

Nun zeigen wir, dass Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion beliebig langsam abfallen können.

PROPOSITION 1.56. *Sei (α_k) eine beliebige monoton fallende Folge mit $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \to 0$. Dann existiert eine stetige Funktion $f \in A(\mathbb{T})$ mit $\widehat{f}(n) = O(\alpha_n)$, d.h. $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{\widehat{f}(n)}{\alpha_n} = 1$.*

BEWEIS. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ seien $n_k \in \mathbb{N}$ die kleinsten natürlichen Zahlen mit $1/\alpha_{n_k} \ge k^2$. Setze

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{n_k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_k t}.$$

Wegen

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n_k)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \le \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2} < \infty$$

liegt die Funktion f in $A(\mathbb{T})$. Offenbar gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\alpha_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{f}(n_k)}{\alpha_{n_k}} = 1.$$

□

Man kann auch zeigen, dass die Partialsummen der Fourierreihen einer stetigen Funktion f stets langsamer als der Logarithmus wachsen, d.h. $S_n(f,t) = o(\log n)$.

SATZ 1.57. *$f \in A(\mathbb{T})$ gilt genau dann, wenn $f = g * h$ fast überall für $g, h \in L^2(\mathbb{T})$.*

BEWEIS. „$\Leftarrow$“ Sind $g, h \in L^2(\mathbb{T})$, so sind $\widehat{g}, \widehat{h} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Somit gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{g * h}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{g}(n)||\widehat{h}| \leq \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{Z})}\|\widehat{h}\|_{L^2(\mathbb{Z})},$$

also ist $g * h \in A(\mathbb{T})$.

„$\Rightarrow$“ Sei $f \in A(\mathbb{T})$ beliebig. Dann ist $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Setze

$$c_n := |\widehat{f}(n)|^{1/2} \qquad \text{und} \qquad d_n := \operatorname{sign}\widehat{f}(n)|\widehat{f}(n)|^{1/2},$$

sodass $c_n d_n = \widehat{f}(n)$. Dann sind die Folgen (c_n) und (d_n) quadratisch summierbar. Definiere

$$g(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad h(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Offenbar sind die Funktionen g und h quadratisch integrierbar. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{g * h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(s)h(t-s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &\overset{\tau=t-s}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \widehat{g}(n)\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit gilt $g * h = f$ fast überall. $\square$

SATZ 1.58 (Wiener). *Ist $f \in A(\mathbb{T})$ und $f(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, dann ist $1/f \in A(\mathbb{T})$.*

BEWEIS. Für beliebiges $h \in A(\mathbb{T})$ gilt

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &= \sup_{t\in\mathbb{T}} \Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{h}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\Big| \leq \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(m)| = \|h\|_{A(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.50 gilt für beliebiges $g \in C^1(\mathbb{T})$

$$\|g\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|g'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

O.B.d.A. sei $|f(t)| \geq 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\|f - S_N(f,\cdot)\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{|m|\geq N} |\widehat{f}(m)| \leq \frac{1}{3}.$$

Dann ist

$$\|f - S_N(f,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{3}$$

und somit

$$|S_n(f,t)| \geq \underbrace{|f(t)|}_{\geq 1} - \underbrace{|S_N(f,t) - f(t)|}_{\leq 1/3} \geq \frac{2}{3}.$$

Wegen

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \frac{S_N(f,t) - f(t)}{S_N(f,t)} \right| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)} &= \frac{1}{f(t) - S_N(f,t) + S_N(f,t)} = \frac{1}{S_N(f,t)\left(1 - \frac{S_N(f,t)-f(t)}{S_N(f,t)}\right)} \\ &= \frac{1}{S_N(f,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_N(f,t) - f(t)}{S_N(f,t)} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_N(f,t) - f(t))^n}{S_N(f,t)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass diese Reihe auch bezüglich der $A(\mathbb{T})$-Norm konvergiert. Dazu betrachte

$$\left\| \frac{(S_n(f,\cdot) - f)^n}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \leq \left\| \frac{1}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \|(S_n(f,\cdot) - f)^n\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Für den zweiten Faktor auf der rechten Seite dieser Ungleichung gilt

$$\|(S_N(f,\cdot) - f)^n\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|S_N(f,\cdot) - f\|_{A(\mathbb{T})}^n \leq \frac{1}{3^n}.$$

Der erste Faktor kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \\ &\overset{S_N(f,\cdot)\in C^1}{\leq} \left\| \frac{1}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2 \left\| \frac{(n+1)S_N'(f,\cdot)}{S_N(f,\cdot)^{n+2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\overset{|S_N(f,t)|\geq \frac{2}{3}}{\leq} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2(n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} \|S_N'(f,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{(S_n(f,\cdot) - f)^n}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})} \\ &\leq \frac{1}{3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2(n+1)\frac{1}{3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} \|S_N'(f,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &= \frac{3}{2^{n+1}} + 18(n+1)\frac{1}{2^{n+2}} \|S_N'(f,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(S_N(f,\cdot) - f)^n}{S_N(f,\cdot)^{n+1}} \right\|_{A(\mathbb{T})}$$

konvergent. Da der normierter Raum vollständig ist, konvergiert somit auch die Reihe

$$\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_N(f,\cdot) - f)^n}{S_N(f,\cdot)^{n+1}}$$

bezüglich der $A(\mathbb{T})$-Norm. Also ist $1/f \in A(\mathbb{T})$. □