

9 Eindimensionale Wellengleichung

Hauptseminar Fourieranalysis
Wintersemester 2019/20

Anja-Melanie Schmitz

1 Die Wellengleichung

Wir suchen eine Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, welche die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

erfüllt sowie das Cauchy-Problem

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. f bezeichnet also das Standbild der Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ und g die Anfangsgeschwindigkeit. Das Aussehen einer solchen Funktion u veranschaulichen wir uns an folgendem Beispiel:

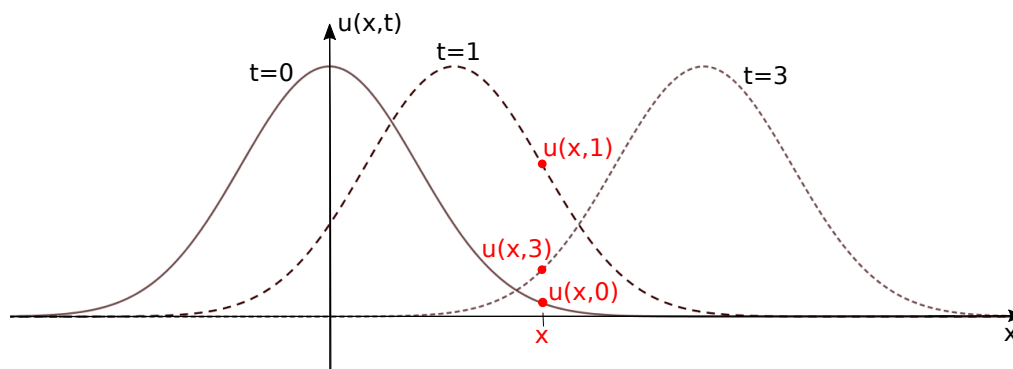


Abbildung 1: $u(x, t) = e^{-(x-t)^2}$

Bemerkung 1. Wir können $t \in \mathbb{R}$ wählen, da die Wellengleichung und das Cauchy-Problem auch für $t < 0$ Sinn ergeben. Wählen wir für $t \geq 0$ nämlich

$v(x, t) := u(x, -t)$, dann erfüllt v die Wellengleichung und die Anfangsbedingungen

$$v(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = -g(x).$$

Außerdem rechnet man leicht nach, dass die Lösungsformeln aus dem späteren Theorem 2 und Gleichung (4) für $v(x, t)$ und $u(x, -t)$ übereinstimmen. Aus diesem Grund genügt es auch beim Eindeutigkeitsbeweis, nur den Fall $t \geq 0$ zu betrachten.

2 Existenz einer Lösung

Mit Hilfe der Fourier-Transformation wollen wir eine Lösung des Cauchy-Problems der Wellengleichung konstruieren:

Angenommen, es gilt $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gleichmäßig in t . Dann können wir die Fourier-Transformation bezüglich x auf die Wellengleichung anwenden und da wir in Vortrag 1 gesehen haben, dass $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, t)$ die Fourier-Transformierte $(i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t)$ hat, erhalten wir

$$(i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi, t).$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t und somit bekommen wir als Lösung

$$\hat{u}(\xi, t) = C_1(\xi)e^{i\xi t} + C_2(\xi)e^{-i\xi t} = A(\xi)\cos(\xi t) + B(\xi)\sin(\xi t). \quad (1)$$

$A(\xi)$ und $B(\xi)$ können wir aus den Fourier-Transformationen der Anfangsbedingungen bezüglich x bestimmen und mit Gleichung (1) erhalten wir

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = A(\xi)\cos(0) + B(\xi)\sin(0) = A(\xi)$$

sowie

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = -\xi A(\xi)\sin(0) + \xi B(\xi)\cos(0) = \xi B(\xi).$$

Damit können wir $\hat{u}$ schreiben als

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\cos(\xi t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(\xi t)}{\xi},$$

wobei wir $\frac{\sin(\xi t)}{\xi}$ im Punkt $\xi = 0$ auf 1 setzen, sodass es stetig und unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

Schließlich erhalten wir u durch inverse Fourier-Transformation:

Theorem 2. Eine Lösung des Cauchy-Problems der Wellengleichung ist

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}) e^{ix\xi} d\xi.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und somit nach Vortrag 1, Satz 1 auch $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Außerdem gelten

$$|\cos(\xi t)| \leq 1, \quad \left| \frac{\sin(\xi t)}{\xi} \right| \leq 1 \quad \text{und} \quad |e^{ix\xi}| \leq 1$$

sowie

$$\cos(\xi t), \quad \frac{\sin(\xi t)}{\xi}, \quad e^{ix\xi} \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{in } \xi.$$

Daher ist $(\hat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}) e^{ix\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in ξ und wir können die Ableitungen nach x und t mit dem Integral vertauschen. Somit erhalten wir für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}) (i\xi)^2 e^{ix\xi} d\xi$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-\xi^2 \hat{f}(\xi) \cos(\xi t) - \xi^2 \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}) e^{ix\xi} d\xi.$$

Wegen $(i\xi)^2 = -\xi^2$ ist die Wellengleichung erfüllt.

Für die Anfangsbedingungen finden wir mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(\xi) \cdot 1 + \hat{g}(\xi) \cdot 0) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-\xi \hat{f}(\xi) \cdot 0 + \hat{g}(\xi) \frac{\xi \cdot 1}{\xi}) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = g(x). \end{aligned}$$

Daher löst u auch das Cauchy-Problem. □

Die Lösungsformel aus diesem Theorem ist umständlich, da wir für u die Fourier-Transformierten von f und g berechnen müssen und danach die inverse Fourier-Transformierte von $\hat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}$. Daher möchten wir eine schönere Formel finden, indem wir Sinus und Kosinus zunächst durch e -Funktionen darstellen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(\xi t)}{\xi}) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2} e^{ix\xi} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{2i\xi} e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (2)$$

Für den ersten Summanden finden wir durch inverse Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2} e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cdot (e^{i\xi(x+t)} + e^{i\xi(x-t)}) d\xi \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Der zweite Summand in (2) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{2i\xi} e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \frac{e^{i\xi(x+t)} - e^{i\xi(x-t)}}{i\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \cdot \int_{x-t}^{x+t} e^{i\xi y} dy d\xi, \end{aligned}$$

und da $\hat{g}(\xi)e^{i\xi y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in ξ ist, können wir als nächstes den Satz von Fubini und dann wieder die inverse Fourier-Transformation anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \cdot \int_{x-t}^{x+t} e^{i\xi y} dy d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-t}^{x+t} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{i\xi y} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (2) und (3) erhalten wir nun insgesamt

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \quad (4)$$

Diese Lösungsformel wird auch "Formel von d'Alembert" genannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Jean-Baptiste le Rond d'Alembert.

Bemerkung 3. (Huygens-Prinzip)

Das Huygens-Prinzip ist die empirische Feststellung, dass unsere Lösungsfunktion u im Punkt (x, t) nur von den Werten von f und g auf dem Intervall $\overline{B_t(x)} = [x - t, x + t]$ abhängt, da Wellen (zum Beispiel Schall oder Licht) nur endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben.

In der Formel von d'Alembert erkennen wir das Huygens-Prinzip, weil $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ der Durchschnitt von f über den Randpunkten von $[x - t, x + t]$ ist und der Term $\frac{1}{2} \cdot \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy$ bis auf den Faktor $\frac{1}{t}$ den Mittelwert von g über dem Intervall $[x - t, x + t]$ darstellt. Diese Beobachtung legt außerdem eine Verallgemeinerung unserer Lösungsformeln in höhere Dimensionen nahe.

Bildlich können wir uns das Huygens-Prinzip folgendermaßen veranschaulichen:

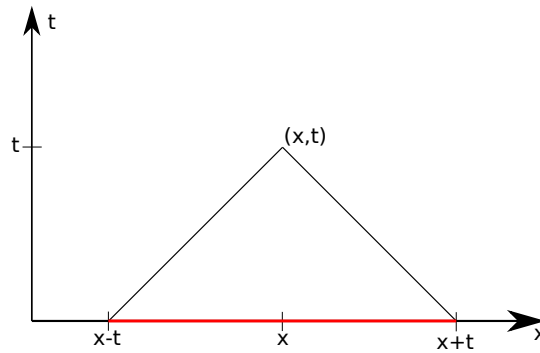


Abbildung 2: Huygens-Prinzip

Das so entstandene Dreieck wird rückwärtsgerichteter Lichtkegel genannt und diesen brauchen wir für den Beweis der Eindeutigkeit unserer Lösung.

3 Eindeutigkeit der Lösung

Definition 4. Der rückwärtsgerichtete Lichtkegel ist definiert als

$$\mathcal{L}_{B_{t_0}(x_0)} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |x - x_0| \leq t_0 - t, 0 \leq t \leq t_0\}.$$

Theorem 5. (Eindeutigkeit) Seien $u, v \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ Lösungen der Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und Lösungen des Cauchy-Problems auf $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ für $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, dann ist $u = v$ auf ganz $\mathcal{L}_{B_{t_0}(x_0)}$.

Beweis. Sei $w := u - v$, dann erfüllt w die Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ wegen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

und w hat auf $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) - g(x) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Weiter definieren wir $a(t) := x_0 - t_0 + t$ und $b(t) := x_0 + t_0 - t$ für $0 \leq t \leq t_0$ sowie das Energie-Integral abweichend zu Vortrag 3 als

$$E(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} |\nabla w|^2 dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \geq 0. \quad (6)$$

Mit den Gleichungen (5) und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_{x_0-t_0+0}^{x_0+t_0-0} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, 0) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) \right)^2 dx \\ &= \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx \\ &= \left[\left(w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right)(x, 0) \right]_{\partial B_{t_0}(x_0)} - \int_{B_{t_0}(x_0)} \left(w \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)(x, 0) dx \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Nun wollen wir $E(t)$ ableiten und da die Variable t auch in den Integralgrenzen vorkommt, verwenden wir folgende Regel:

Lemma 6. (*Leibniz-Regel*) Sei $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ und seien $a, b \in C^1([t_1, t_2])$, $h \in C(\mathbb{R}^2)$ und $h(x, \cdot) \in C^1([t_1, t_2])$, dann gilt auf $[t_1, t_2]$:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t) dx = h(b(t), t) \cdot b'(t) - h(a(t), t) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx.$$

Den Beweis dieses Lemmas betrachten wir nach Vollendung des Beweises von Theorem 5, mit welchem wir nun fortfahren:

In unserem Fall ist der Integrand $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2$ und $b'(t) = -1$. Mit der Leibniz-Regel bekommen wir also

$$\begin{aligned} E'(t) &= - \left(\frac{\partial w}{\partial x}(b(t), t) \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}(b(t), t) \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}(a(t), t) \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}(a(t), t) \right)^2 \\ &\quad + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Das Integral können wir berechnen, indem wir zunächst den Satz von Schwartz und die Wellengleichung benutzen und dann die Kettenregel rückwärts anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \\
&= 2 \cdot \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\
&= 2 \cdot \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\
&= 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right)(x, t) \right]_{x=a(t)}^{x=b(t)} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right)(b(t), t) - 2 \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right)(a(t), t).
\end{aligned}$$

Für $E'(t)$ erhalten wir mit Hilfe der binomischen Formel nun insgesamt:

$$E'(t) = - \left(\frac{\partial w}{\partial t}(b(t), t) - \frac{\partial w}{\partial x}(b(t), t) \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}(a(t), t) + \frac{\partial w}{\partial x}(a(t), t) \right)^2 \leq 0. \quad (8)$$

Aus den Eigenschaften (6) bis (8) von $E(t)$, das waren

$$E(t) \geq 0, E(0) = 0 \text{ und } E'(t) \leq 0,$$

folgt schließlich $E(t) = 0$ und daher ist $\nabla w = 0$, also w konstant auf $\mathcal{L}_{B_{t_0}(x_0)}$. Durch die Anfangsbedingung $w(x, 0) = 0$ aus (5) ist $w = 0$ und somit $u = v$ auf $\mathcal{L}_{B_{t_0}(x_0)}$. $\square$

Beweis. (Leibniz-Regel) Wir setzen die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t) dx = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \left(\int_{a(t+k)}^{b(t+k)} h(x, t+k) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t) dx \right). \quad (9)$$

Das erste Integral der rechten Seite können wir aufspalten und zum Teil mit dem zweiten Integral zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
&\int_{a(t+k)}^{b(t+k)} h(x, t+k) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t) dx \\
&= \left(\int_{a(t+k)}^{a(t)} + \int_{a(t)}^{b(t)} + \int_{b(t)}^{b(t+k)} \right) h(x, t+k) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t) dx \\
&= \left(\int_{b(t)}^{b(t+k)} - \int_{a(t)}^{a(t+k)} \right) h(x, t+k) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t+k) - h(x, t) dx. \quad (10)
\end{aligned}$$

Wir sehen direkt, dass für das letzte Integral in (10) gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_{a(t)}^{b(t)} h(x, t+k) - h(x, t) \, dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(x, t+k) - h(x, t)}{k} \, dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \, dx, \end{aligned} \quad (11)$$

weil h stetig auf dem beschränkten Intervall $[a(t), b(t)]$ ist.

Auf die ersten beiden Integrale in (10) wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\int_{b(t)}^{b(t+k)} - \int_{a(t)}^{a(t+k)} \right) h(x, t+k) \, dx &= h(\xi_b, t+k) \cdot (b(t+k) - b(t)) \\ &\quad - h(\xi_a, t+k) \cdot (a(t+k) - a(t)) \end{aligned}$$

für ein $\xi_b \in [b(t), b(t+k)]$ und ein $\xi_a \in [a(t), a(t+k)]$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \left(\int_{b(t)}^{b(t+k)} - \int_{a(t)}^{a(t+k)} \right) h(x, t+k) \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} h(\xi_b, t+k) \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{b(t+k) - b(t)}{k} \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow 0} h(\xi_a, t+k) \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{a(t+k) - a(t)}{k} \\ &= h(b(t), t) \cdot b'(t) - h(a(t), t) \cdot a'(t), \end{aligned} \quad (12)$$

da ξ_b und ξ_a für k gegen Null gegen $b(t)$ beziehungsweise $a(t)$ konvergieren.

Aus Gleichung (9) und den Grenzwerten (11) und (12) erhalten wir insgesamt die Behauptung des Lemmas. $\square$