12 Fast-periodische Funktionen

Sarah Lawall
Wintersemester 19/20

Definition 12.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Eine ε-Fastperiode von f ist ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit $\sup_x |f(x-\tau) - f(x)| < \varepsilon$.

Beispiel 12.2.

1. $\tau = 0$ ist eine triviale ε-Fastperiode für alle ε.
2. Für periodische Funktionen ist die Periode (und ganzzahlige Vielfache davon) für alle $\varepsilon > 0$ eine ε-Fastperiode.
3. Für gleichmäßig stetige Funktionen ist jedes hinreichend kleine τ eine ε-Fastperiode.

Definition 12.3. Eine Funktion f ist fast-periodisch auf $\mathbb{R}$ wenn sie stetig ist und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\Lambda = \Lambda(\varepsilon, f)$ existiert, so dass jedes Intervall der Länge Λ eine ε-Fastperiode von f enthält. Die Menge der fast-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $AP(\mathbb{R})$.

Beispiel 12.4.

1. Stetige periodische Funktionen sind fast-periodisch.
2. Nicht jede fast-periodische Funktion ist auch periodisch:
   Betrachte $f(x) = \cos x + \cos \pi x$. Dies ist fast-periodisch, da es die Summe von periodischen (also auch fast-periodischen) Funktionen ist, welche wieder fast-periodisch ist, wie wir später zeigen werden. f ist aber nicht periodisch, da $f(x) = 2$ nur wenn $x = 0$.

Lemma 12.5. *Für $f \in AP(\mathbb{R}), a \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{R}$ sind auch $|f|,\ \hat{f},\ af,\ f(\lambda x) \in AP(\mathbb{R})$.*

Satz 12.6. *Fast-periodische Funktionen sind beschränkt.*

Beweis. Sei $f \in AP(\mathbb{R})$. Wähle $\varepsilon = 1$ und setze $\Lambda = \Lambda(1, f)$. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und τ eine 1-Fastperiode im Intervall $I = [x - \Lambda, x]$. Dann gilt $x - \tau \in [0, \Lambda]$ und folglich mit der inversen Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&1 = \varepsilon > |f(x) - f(x-\tau)| \geq \big||f(x)| - |f(x-\tau)|\big| \geq |f(x)| - |f(x-\tau)| \\
\Leftrightarrow &1 + |f(x-\tau)| > |f(x)| \\
\Rightarrow &1 + \sup_{y \in [0,\Lambda]} |f(y)| \geq |f(x)|
\end{aligned}$$

und wir haben eine Schranke für f gefunden. $\square$

Korollar 12.7. *Ist $f \in AP(\mathbb{R})$, so auch f^2.*

Beweis. Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, τ eine ε-Fastperiode von f. Da f beschränkt ist können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ (sonst betrachte af). Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_x |f^2(x-\tau) - f^2(x)| &= \sup_x |(f(x-\tau) + f(x))(f(x-\tau) - f(x))| \\
&\leq \sup_x [(|f(x-\tau)| + |f(x)|)|f(x-\tau) - f(x)|] \\
&< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

also sind für alle $\varepsilon > 0$ ε-Fastperioden von f auch ε-Fastperioden von f^2 und f^2 ist fast-periodisch. □

Lemma 12.8. *Fast-periodische Funktionen sind gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ und $\Lambda = \Lambda(\frac{\varepsilon}{3}, f)$. Da stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig sind, ist f auf $[0, \Lambda]$ gleichmäßig stetig und es existiert ein $\eta_0 > 0$, so dass für alle $|\eta| < \eta_0$ gilt

$$\sup_{x \in [0,\Lambda]} |f(x+\eta) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12.1}$$

Sei $y \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Fastperiode τ im Intervall $[y-\Lambda, y]$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_x |f(y+\eta) - f(y)| \leq \sup_x [&|f(y+\eta) - f(y+\eta-\tau)| + |f(y+\eta-\tau) - f(y-\tau)| \\
&+ |f(y-\tau) - f(y)|] \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei die erste und die dritte Abschätzung durch $\frac{\varepsilon}{3}$ gilt weil τ eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Fastperiode ist und die zweite, weil $y - \tau \in [0, \Lambda]$ und $|\eta| < \eta_0$ also (12.1) gilt. □

Definition 12.9. Für $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $W_0(f)$ die Menge aller Verschiebungen von f, $W_0(f) = \{f_y\}_{y \in \mathbb{R}}$, wobei $f_y(x) = f(x-y)$.

Definition 12.10. Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Die konvexe Translationshülle von f, $W(f)$, ist die abgeschlossene konvexe Hülle von $\cup_{|a| \leq 1} W_0(af)$.

Lemma 12.11. *$W(f)$ ist der Abschluss von*

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_{y_i} \mid \sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1, n \in \mathbb{N}, y_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis. Die konvexe Hülle einer Menge X lässt sich darstellen als

$$conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \mid x_i \in X, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, b_i \geq 0 \right\}.$$

Für die konvexe Hülle von $\cup_{|a|\leq 1} W_0(af)$ gilt also:

$$\begin{aligned}
conv\left(\bigcup_{|a|\leq 1} W_0(af) \right) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \mid x_i \in \bigcup_{|a|\leq 1} W_0(af), n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, b_i \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i a f_{y_i} \mid y_i \in \mathbb{R}, |a| \leq 1, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, b_i \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f_{y_i} \mid y_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

□

Damit gilt

$$W(e^{i\xi x} f) = \left\{ e^{i\xi x} g \mid g \in W(f) \right\} \tag{12.2}$$

Lemma 12.12. *Sei f gleichmäßig stetig. Dann ist $W(f)$ der Abschluss der Menge $\{\varphi * f \mid \varphi \in L^1(\mathbb{R}), \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1\}$.*

Erinnerung 12.13. *Eine Menge ist relativ kompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist. In einem vollständigen normierten Raum ist dies genau dann der Fall, wenn sie totalbeschränkt ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ von einer endlichen Vereinigung von Bällen mit Radius ε überdeckt werden kann.*

Satz 12.14. *Für $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist fast-periodisch*
2. *$W_0(f)$ ist relativ kompakt (in der Normtopologie von $L^\infty(\mathbb{R})$)*
3. *$W(f)$ ist kompakt.*

Beweis. 1.⇒ 2.: Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ gegeben und $\Lambda = \Lambda(\frac{\varepsilon}{2}, f)$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existieren $\eta_1 \cdots \eta_M \in [0, \Lambda]$, so dass für $0 \leq y_0 \leq \Lambda$ gilt, dass $\inf_j \|f_{y_0} - f_{\eta_j}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}$ sei τ eine $\frac{\varepsilon}{2}$-Fastperiode von f in dem Intervall $[y - \Lambda, y]$. Wir schreiben $y_0 = y - \tau$ und erhalten $0 \leq y_0 \leq \Lambda$ und

$$\|f_y - f_{y_0}\|_\infty = \sup_x |f(x - y) - f(x - y_0)| = \sup_x |f(x - y) - f(x - (y - \tau))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und folglich

$$\inf_j \|f_y - f_{\eta_j}\|_\infty \le \inf_j \left(\|f_y - f_{y_0}\|_\infty + \|f_{y_0} - f_{\eta_j}\|_\infty\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und $W_0(f)$ wird von einer Vereinigung von Bällen mit Radius ε und Mittelpunkten f_{η_j} überdeckt.
2.$\Rightarrow$ 1.: Sei $W_0(f)$ relativ kompakt, $\varepsilon > 0$ und $O_1, \cdots, O_M$ Bälle mit dem Radius $\frac{\varepsilon}{2}$, die eine Überdeckung von $W_0(f)$ bilden. oBdA gilt $O_j \cap W_0(f) \neq \emptyset$, daher können wir für jedes $j \in \{1, \cdots M\}$ ein $f_{y_j} \in O_j$ finden. Die Bälle mit Radius ε und Mittelpunkt f_{y_j} sind dann ebenfalls eine endliche Überdeckung von $W_0(f)$.
Wir wollen zeigen, dass jedes Intervall J der Länge $\Lambda = 2\max_{1\le j\le M} |y_j|$ eine ε-Fastperiode enthält: Sei dazu y der Mittelpunkt eines solchen Intervalls. Dann gibt es ein j_0, so dass $\|f_y - f_{y_{j_0}}\|_\infty < \varepsilon$ und für $\tau := y - y_{j_0}$ ist $\tau \in J$ und es gilt

$$\|f_\tau - f\|_\infty = \|f_{\tau + y_{j_0}} - f_{y_{j_0}}\|_\infty = \|f_y - f_{y_{j_0}}\|_\infty < \varepsilon.$$

Wir müssen noch die Stetigkeit von f zeigen. Dafür zeigen wir, dass $\lim_{\eta\to 0} \|f_\eta - f\|_\infty = 0$, also die gleichmäßige Stetigkeit von f. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ seien wie oben $O_1, \cdots, O_M$ Bälle mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$, die eine Überdeckung von $W_0(f)$ bilden. Wir schreiben $E_j := \{\tau \mid f_\tau \in O_j\}$. Da $\cup_{j=1,\cdots,M} E_j = \mathbb{R}$ hat mindestens eines der E_j, also ohne Einschränkung E_{j_0}, positives Maß. Dann ist $E_{j_0} - E_{j_0}$ eine Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$ und für $\eta \in E_{j_0} - E_{j_0}$ gilt $\|f_\eta - f\|_\infty \le \varepsilon$.
2.$\Rightarrow$ 3.: Eine Menge M ist kompakt, wenn sie relativ kompakt und abgeschlossen ist. Da $W(f)$ abgeschlossen ist, ist noch zu zeigen, dass $W(f)$ relativ kompakt ist. Sei $W_0(f)$ relativ kompakt. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Verschiebungen $\{f_{y_j}\}_{j=1,\cdots,M}$, so dass es für jede Verschiebung f_x ein f_{y_j} gibt, mit $\|f_x - f_{y_j}\|_\infty < \varepsilon$. Also liegt jede Funktion der Form $\sum_{k=1}^M a_k f_{x_k}$ mit $\sum_{k=1}^M |a_k| \le 1$ (also jede Funktion aus dem Inneren von $W(f)$) innerhalb einer ε-Umgebung einer Funkion der Form $\sum_{j=1}^M b_j f_{y_j}$ mit $\sum_{j=1}^M |b_j| \le 1$. Da die Einheitskreisscheibe $|b| \le 1$ kompakt und daher totalbeschränkt ist können wir eine endliche Anzahl von Punkten $\{c_k\}_{k=1,\cdots,N}$ auswählen, so dass jedes b aus der Einheitskreisscheibe maximal den Abstand $\varepsilon M^{-1} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{-1}$ von einem der c_k hat. Dann gilt, dass jede Kombination von $\sum_{j=1}^M b_j f_{y_j}$ mit $\sum_{j=1}^M |b_j| \le 1$ innerhalb einer ε-Umgebung von einem $\sum_{j=1}^M b_j' f_{y_j}$, $b_j' \in \{c_k\}_{k=1,\cdots,N}$ liegt, da

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^M b_j f_{y_j} - \sum_{j=1}^M b_j' f_{y_j}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \left\|\sum_{j=1}^M (b_j - b_j') f_{y_j}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\le \sum_{j=1}^M |b_j - b_j'| \|f_{y_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&< \sum_{j=1}^M \varepsilon M^{-1} \|f_{y_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{-1} \|f_{y_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $W(f)$ von MN Bällen mit Radius 3ε und Mittelpunkten der Form $\sum_{j=1}^{M} b'_j f_{y_j}$ überdeckt wird, also relativ kompakt ist.
3.$\Rightarrow$ 2.: Sei $W(f)$ kompakt. Da $W(f) \supset W_0(f)$ ist $W_0(f)$ totalbeschränkt, also relativ kompakt. □

Satz 12.15. *$AP(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Subalgebra von $L^\infty(\mathbb{R})$.*

Beweis. z.z.:

1. $f, g \in AP(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in AP(\mathbb{R})$
2. $f, g \in AP(\mathbb{R}) \Rightarrow f \cdot g \in AP(\mathbb{R})$
3. $f \in \overline{AP(\mathbb{R})} \Rightarrow f \in AP(\mathbb{R})$

1. Seien $f, g \in AP(\mathbb{R})$. Dann sind nach dem vorigen Satz $W(f)$ und $W(g)$ kompakt und damit auch $W(f) + W(g)$. Offensichtlich gilt $W(f+g) \subset W(f) + W(g)$, also ist $W(f+g)$ totalbeschränkt und damit relativ kompakt. Da $W(f+g)$ abgeschlossen ist, ist es auch kompakt und nach dem vorigen Satz gilt $f + g \in AP(\mathbb{R})$.
2. Seien $f, g \in AP(\mathbb{R})$. Dann sind nach Korollar 12.7 $f^2, g^2, (f+g)^2 \in AP(\mathbb{R})$ und daher auch $\frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right) = f \cdot g$.
3. Sei $f \in \overline{AP(\mathbb{R})}$. Da sich f als Grenzwert von Funktionen aus $AP(\mathbb{R})$ darstellen lässt, welche stetig sind, ist f stetig.
   Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ können wir ein $g \in AP(\mathbb{R})$ finden mit $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ und für τ eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Fastperiode von g gilt

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f\|_\infty &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_\infty + \|g_\tau - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

   und τ ist eine ε-Fastperiode von f. Also enthält jedes Intervall der Länge $\Lambda(\frac{\varepsilon}{3}, g)$ eine ε-Fastperiode von f und f ist fast-periodisch.

□

Definition 12.16. Ein trigonometrisches Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x},$$

wobei $\xi_j \in \mathbb{R}$ und $a_j \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 12.17. *Trigonometrische Polynome und Grenzwerte dieser sind fast-periodisch, da $e^{i\xi x}$ periodisch und stetig ist, also fast-periodisch, und Summe und Grenzwert von fast-periodischen Funktionen nach Satz 12.15 wieder fast-periodisch sind. Umgekehrt lässt sich jede fast-periodische Funktion als Grenzwert von trigonometrischen Polynomen ausdrücken, wie wir im nächsten Vortrag sehen werden.*

Definition 12.18. Das Normspektrum einer Funktion $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\sigma(h) = \{\xi \mid \xi \in \mathbb{R}, ae^{i\xi x} \in W(h) \text{ für hinreichend kleine } a \neq 0\}.$$

Lemma 12.19. *Für $\xi \in \mathbb{R}$, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ gilt $\sigma(e^{i\xi x}h) = \xi + \sigma(h) = \{\xi + \eta \mid \eta \in \sigma(h)\}$.*

Beweis. Mit (12.2) gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(e^{i\xi x}h) &= \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, ae^{izx} \in W(e^{i\xi x}h) \text{ für hinreichend kleine } a \neq 0\} \\
&= \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, ae^{izx} \in \{e^{i\xi x}g \mid g \in W(h)\} \text{ für hinreichend kleine } a \neq 0\} \\
&= \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, ae^{i(z-\xi)x} \in \{g \mid g \in W(h)\} \text{ für hinreichend kleine } a \neq 0\} \\
&= \{\xi + \eta \mid \eta \in \mathbb{R}, ae^{i\eta x} \in W(h) \text{ für hinreichend kleine } a \neq 0\} \\
&= \{\xi + \eta \mid \eta \in \sigma(h)\}.
\end{aligned}$$

□

Definition 12.20. Der Träger $\operatorname{supp}(h)$ ist das Komplement der größten offenen Menge $O \subset \mathbb{R}$, auf der h verschwindet.

Bemerkung 12.21. *Für K der Fejer-Kern $K_\eta(x) = \eta K(\eta x), \eta > 0$ gilt $\widehat{K_\eta}(\xi) = \max(1 - \frac{|\xi|}{\eta}, 0)$.*

Satz 12.22. *Sei h beschränkt und gleichmäßig stetig, K der Fejer-Kern und $K_\eta * h$ konvergiere für $\eta \to 0$ gegen einen nicht verschwindenden Grenzwert. Dann ist $0 \in \sigma(h)$.*

Beweis. Schreibe $g_\eta := K_\eta * h$, dann gilt $\hat{g}_\eta = \hat{K}(\frac{\xi}{\eta})\hat{h}$. Also wegen Bemerkung 12.21 $\operatorname{supp}(\hat{g}_\eta) \subset [-\eta, \eta]$ und daher $\operatorname{supp}(\widehat{\lim_{\eta\to 0} g_\eta}) = \{0\}$. Nach 4.11 im Katznelson ist $\lim_{\eta\to 0} g_\eta$ eine Konstante und nach Lemma 12.12 gilt $g_\eta \in W(h)$ und wegen der Abgeschlossenheit von $W(h)$ auch $\lim_{\eta\to 0} g_\eta \in W(h)$. Da $\lim_{\eta\to 0} g_\eta$ eine nicht-verschwindende Konstante a ist erhalten wir $0 \in \sigma(h)$, da $ae^{i\cdot 0\cdot x} = a \in W(h)$. □

Bemerkung 12.23. *Statt des Fejer-Kerns kann jede Funktion $F \in L^1(\mathbb{R})$ betrachtet werden, und die Forderung nach der Existenz des Grenzwerts $\lim_{\eta\to 0} F_\eta * f$ kann durch die schwächere Bedingung der Existenz eines nicht verschwindenden Häufungspunkts ersetzt werden, d.h. des Grenzwerts einer Folge $F_{\eta_n} * h$ mit $\eta_n \to 0$.*

Satz 12.24. *Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, $0 \notin \sigma(f)$. Dann gilt für alle $F \in L^1(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\eta\to 0} \|F_\eta * f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Beweis. Sei $F \in L^1(\mathbb{R})$ und oBdA gelte $\|F\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1$. Dann folgt wegen Lemma 12.12 $F_\eta * f \in W(f)$. Angenommen $F_\eta * f$ konvergiert nicht gegen 0 für $\eta \to 0$. Dann hat $F_\eta * f$ wegen der Kompaktheit von $W(f)$ einen anderen Häufungspunkt in $W(f)$ und nach Bemerkung 12.23 und Satz 12.22 gilt dann $0 \in \sigma(f)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Dieser Satz hat die folgende Umkehrung:

Satz 12.25. *Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, $F \in L^1(\mathbb{R})$, $\int F(x)dx \neq 0$. Gibt es eine Folge mit $\eta_n \to 0$, $\lim_{n\to\infty} \|F_{\eta_n} * f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$, so ist $0 \notin \sigma(f)$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass für jede Verschiebung von f, und daher auch für jede Linearkombination von Verschiebungen und daher für jedes $g \in W(f)$, nach dem vorigen Satz gilt $\lim_{n\to\infty} \|F_{\eta_n} * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$. Ist $g(x) = c$ konstant, so ist

$$\begin{aligned}
(F_{\eta_n} * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \eta_n F(\eta_n (x-t))\, g(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \eta_n F(\eta_n(x-t))\, dt \cdot c \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(t)dt \cdot c \\
&= \hat{F}(0) \cdot c
\end{aligned}$$

und folglich gilt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|F_{\eta_n} * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{n\to\infty} \|\hat{F}(0) \cdot c\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = |\hat{F}(0)| \cdot |c|.$$

Da $\hat{F}(0) \neq 0$ ist $c = 0$ die einzige Konstante in $W(f)$, also $0 \notin \sigma(f)$. □