Die Radon-Transformation

Sandra Ecker

Seminar: Fourieranalysis WiSe 2019/2020

1 Einleitung

Die Radon-Transformation ist eine Integraltransformation, die im Jahr 1917 von Johann Radon entwickelt wurde. Sie hat zahlreiche Anwendungen in der Mathematik, aber auch in anderen Wissenschaften, besonders in der Medizin. Insbesondere bei medizinischen Bildgebungsverfahren spielt sie eine essentielle Rolle. Beispielsweise wird bei der Computertomographie eine Vielzahl an Röntgenaufnahmen aus verschiedenen Richtungen erstellt und mittels der Radon-Transformation aus diesen das "Bildëines inneren Organs erstellt.
Es folgt eine kurze Einführung und die Vorstellung des Grundproblems in $\mathbb{R}^2$, dann beschäftigen wir uns mit der Radon-Transformation in $\mathbb{R}^3$. Es existiert zwar eine explizite Lösung in $\mathbb{R}^2$, diese ist aber komplizierter als in drei Dimensionen. Hier sehen wir erneut ein Beispiel, bei dem die Ergebnisse im ungeraden Dimensionsfall leichter sind.

2 Einführung: Die Röntgen-Transformation in $\mathbb{R}^2$

Sei $\mathcal{O}$ ein zwei-dimensionales Objekt, das in der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegt. Man kann es sich beispielsweise als planaren Querschnitt eines menschlichen Organs vorstellen.
Sei $\mathcal{O}$ zunächst homogen. Nun wird ein sehr dünner Röntgenstrahl durch das Objekt geschickt. Er tritt mit Intensität $\mathcal{I}_0$ in das Objekt ein und mit Intensität $\mathcal{I}$ wieder aus.

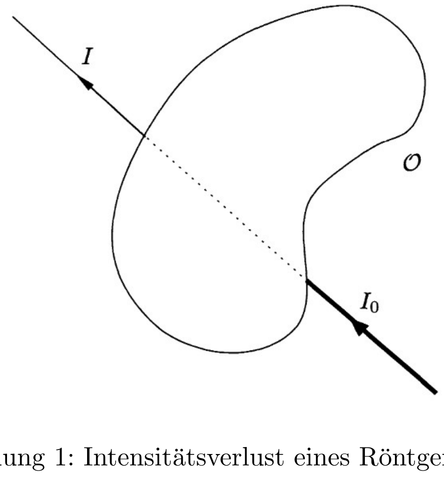

Abbildung 1: Intensitätsverlust eines Röntgenstrahls

Es lässt sich feststellen, dass sich die Intensität exponentiell vermindert und es gilt folgende Relation:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cdot e^{-d\rho}$$

Dabei bezeichnet d die im Objekt durchlaufene Strecke und ρ den sogenannten Absorbtions-Koeffizient, der von der Dichte und anderen physikalischen Eigenschaften von $\mathcal{O}$ abhängt.

Ist $\mathcal{O}$ nicht homogen, sondern besteht aus n Materialen, so gilt:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cdot e^{-\sum\limits_{i=0}^{n} d_i \rho_i}$$

Dabei bezeichnet d_i die in Material i durchlaufene Strecke und ρ_i den jeweiligen Absorbtions-Koeffizienten.

Für ein beliebiges Objekt, bei dem sich Dichte und physikalische Eigenschaften von Punkt zu Punkt unterscheiden, ist der Absorbtions-Koeffizient ρ eine Funktion in $\mathbb{R}^2$ und die obige Relation lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cdot e^{-\int\limits_L \rho}$$

L bezeichnet hier die Linie in $\mathbb{R}^2$, der der Röntgenstrahl folgt und mit $\int\limits_L \rho$ ist das Linienintegral der Funktion ρ über die Linie L gemeint.

Da bei diesem Beispiel die Intensitäten $\mathcal{I}_0$ und $\mathcal{I}$ beobachtet werden, ist $\int\limits_L \rho$ die gewonnene Größe. Da der Röntgenstrahl usprünglich in jede Richtung geschickt werden kann, kann der Wert des Integrals für jede Linie in $\mathbb{R}^2$ bestimmt werden.

Definition 1

Die Röntgen-Transformation (oder Radon-Transformation in $\mathbb{R}^2$) einer Funktion ρ ist definiert durch

$$\mathcal{X}(\rho)(L) = \int\limits_L \rho$$

Diese Transformation weißt also einer Funktion ρ in $\mathbb{R}^2$ eine andere Funktion $\mathcal{X}(\rho)$ zu, deren Definitionsbereich die Menge der Linien in $\mathbb{R}^2$ ist.

Die unbekannte Größe in unserer Betrachtung ist die Funktion ρ, die die Beschaffenheit des Objektes $\mathcal{O}$ beschreibt. Genau hierin liegt aber unser ursprüngliches Interesse. Wir wollen also nun ρ aus den gesammelten Daten rekonstruieren. Unser Ziel ist somit die Lösung des folgenden:

Rekonstruktionsproblem

Finde eine Formel, die ρ durch $\mathcal{X}(\rho)$ beschreibt.

Mathematisch gesehen wollen wir also die Inverse zu ρ finden.

Die Formulierung des Problems wirft natürlicherweise die Fragen nach der Existenz der Inversen und nach der Eindeutigkeit der Röntgen-Transformation auf, also gilt $\mathcal{X}(\rho) = \mathcal{X}(\rho')$ folgt dann auch $\rho = \rho'$?

Bezüglich der Eindeutigkeitsfrage gibt es eine vernünftige a-priori Erwartung, dass $\mathcal{X}(\rho)$ tatsächlich ρ bestimmt, da beide Funktionen die gleiche Dimensionalität bzw. die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden besitzen.
Die Funktion ρ in $\mathbb{R}^2$ hängt von zwei Parametern ab, beispielsweise der x_1- und der x_2-Koordinate und auch eine Linie in $\mathbb{R}^2$ wird durch zwei Parameter bestimmt, zum Beispiel dem y-Achsenabschnitt und der Steigung.
In diesem Sinne übertragen ρ und $\mathcal{X}(\rho)$ die gleiche Menge an Informationen und somit ist es zumindest nicht unvernünftig anzunehmen, dass sich die Funktionen eindeutig bestimmen.

In der Tat existiert in $\mathbb{R}^2$ eine zufriedenstellende Lösung des Rekonstruktionsproblems und auch die Eindeutigkeitsfrage lässt sich positiv beantworten.
Wie aber bereits einleitend erwähnt wollen wir uns hier nicht mit diesem Fall beschäftigen, sondern betrachten die analoge, aber einfachere Situation in $\mathbb{R}^3$.

Da wir uns einleitend ein praktisches Beispiel angesehen haben, hier noch eine kleine Bemerkung zur Anwendung in der Praxis. Es ist natürlich unmöglich das Integral von ρ tatsächlich für jede Linie in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen und daher stützt sich die Anwendung nicht nur auf die rein theoretische Lösung, sondern greift auf numerische Approximation, Computeralgorithmen, Probeverfahren, etc. zurück.

3 Die Radon-Transformation in $\mathbb{R}^3$

Zunächst betrachten wir das selbe Beispiel wie im zwei-dimensionalen Fall.
$\mathcal{O}$ sei ein drei-dimensionales Objekt im Raum und ρ die Funktion in $\mathbb{R}^3$, die die Dichte und die physikalischen Eigenschaften von $\mathcal{O}$ bestimmt. Das Senden eines Röntgenstrahls durch das Objekt liefert wieder die Größe

$$\int\limits_L \rho$$

für jede Linie L in $\mathbb{R}^3$.

Wenden wir nochmals das heuristische Argument der Dimensionalität der Funktionen an. Beim Vergleichen der Freiheitsgrade fällt auf, dass eine Funktion ρ in $\mathbb{R}^3$ durch drei Parameter bestimmt ist, beispielsweise wieder die jeweiligen Koordinaten; eine Linie in $\mathbb{R}^3$ wird aber durch vier Parameter bestimmt, zum Beispiel zwei für die Achsenabschnitte in der x_1-/x_2-Ebene und zwei weitere für die Richtung der Geraden. In diesem Sinne ist das Problem also überbestimmt.
Das selbe Vorgehen wie in $\mathbb{R}^2$, also ρ durch das Wissen über seine Linienintegrale zu bestimmen, scheint nicht der richtige Ansatz zu sein. Stattdessen wenden wir uns der natürlichen mathematischen Verallgemeinerung des Problems zu.
Haben wir uns in $\mathbb{R}^2$ Linienintegrale betrachtet, wollen wir nun eine Funktion in $\mathbb{R}^3$ bestimmen indem wir ihr Integral über alle Ebenen in $\mathbb{R}^3$ kennen.
In diesem Fall stimmen die Anzahl der Freiheitsgrade wieder überein, da auch eine dreidimensionale Ebene durch drei Parameter bestimmt wird (betrachte beispielsweise die Hessesche Normalenform).

Definition 2 (vorläufig)

Ist P eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, so ist die Radon-Transformation $\mathcal{R}(f)$ einer Funktion f definiert durch

$$\mathcal{R}(f)(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_P f$$

Im Folgenden beschränken wir uns um unserer bisherigen Vorgehensweise zu folgen und der Einfachheit halber auf Funktionen f $\in S(\mathbb{R}^3)$. Viele der folgenden Resultate können aber auch für größere Klassen von Funktionen gezeigt werden.
Nun müssen wir uns erst einmal klar machen was wir unter dem Integral von f über einer Ebene verstehen.
Dazu wollen wir erst einmal klären wie wir eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ verstehen.

Ebene in $\mathbb{R}^3$ (Definition)

Sei $\gamma \in \mathcal{S}^2$ ein Einheitsvektor und t$\in \mathbb{R}$.
Die Ebene $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ ist definiert durch

$$\mathcal{P}_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : < x, \gamma > = \ t \ \}$$

Wir parametrisieren die Ebene also durch einen zu ihr orthogonalen Einheitsvektor γ und durch ihren Äbstandt zum Ursprung.
Beachte: Es ist $\mathcal{P}_{t,\gamma} = \mathcal{P}_{-t,-\gamma}$ und damit sind negative Werte für t zugelassen.

Um nun endgültig eine Definition für das Ebenenintegral aufstellen zu können gehen wir folgendermaßen vor:
Wähle Einheitsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, so dass γ, v_1 und v_2 eine Orthonomalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Dann kann jedes x $\in \mathcal{P}_{t,\gamma}$ eindeutig geschrieben werden als:

$$x = t\gamma \ + \ u \qquad u = u_1 v_1 \ + \ u_2 v_2, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$$

Da γ, v_1, v_2 eine Basis ist kann jedes x natürlich als Linearkombination dieser Basisvektoren dargestellt werden und aus der Bedingung $< x, \gamma > = \ t$ folgt, dass der Koeffizient vor γ t sein muss.

Definition 3

Ist f $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann ist ihr Integral über die Ebene $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ definiert als

$$\int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma \ + \ u_1 v_1 \ + \ u_2 v_2) \, du_1 \, du_2$$

oder einfacher

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma \ + \ u) \, du$$

Da wir an die Einheitsvektoren v_1, v_2 keine weiteren Voraussetzungen gestellt haben, ist deren Wahl natürlich nicht eindeutig und wir müssen überprüfen, ob diese Definition unabhängig von der Wahl der Vektoren ist. Dies ist Inhalt der folgenden Proposition:

Proposition 4

Ist f $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann ist für jedes γ die Definition von $\int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f$ unabhängig von der Wahl von v_1, v_2.

Darüber hinaus gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) \, dx$$

Beweis

Seien v_1', v_2' andere Einheitsvektoren, so dass γ, v_1', v_2' eine Orthonormalbasis bilden.
Betrachte die Rotation $\mathcal{R}$ in $\mathbb{R}^2$, die v_1 auf v_1' und v_2 auf v_2' abbildet. Dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma \ + \ u_1 v_1 \ + \ u_2 v_2) \, du_1 \, du_2 =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\mathcal{R}(t\gamma \ + \ u_1 v_1 \ + \ u_2 v_2)) \, du_1 \, du_2 =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\mathcal{R}(\gamma) \ + \ u_1 \mathcal{R}(v_1) \ + \ u_2 \mathcal{R}(v_2)) \, du_1 \, du_2 =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma \ + \ u_1 v_1' \ + \ u_2 v_2') \, du_1 \, du_2$$

Dabei wurde benutzt, dass das Integral über $\mathbb{R}^d$ Rotationsinvariant ist und die Rotation linear ist (siehe Vortrag 8).

Um die Identität zu zeigen betrachten wir nun die Rotation $\mathcal{R}'$, die die Standardbasis von Einheitsvektoren (e_1, e_2, e_3) in $\mathbb{R}^3$ auf γ, v_1, v_2 abbildet.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = \\
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(\mathcal{R}'(x_1 e_1 \;+\; x_2 e_2 \;+\; x_3 e_3))\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \\
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x_1 \gamma \;+\; x_2 v_1 \;+\; x_3 v_2)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1 \gamma \;+\; x_2 v_1 \;+\; x_3 v_2)\,dx_2\,dx_3 \right) dx_1 = \\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f \right) dt
\end{aligned}
$$

Die Integrationsreihenfolge darf hier vertauscht werden, da f eine Schwartzfunktion ist und im letzten Schritt wurde nur x_1 durch t ersetzt. $\square$

Definition 5

Die Radon-Transformation einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist definiert durch

$$\mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f$$

Bemerkung

Die Radon-Transformation ist also eine Funktion auf der Menge der Ebenen in $\mathbb{R}^3$. Durch die Parametrisierung der Ebene können wir äquivalent von $\mathcal{R}(f)$ als einer Funktion auf dem Produkt $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$ sprechen.

Unser Ziel ist es nun folgende Probleme zu lösen

Eindeutigkeitsproblem : $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g) \Rightarrow f = g$
Rekonstruktionsproblem : Beschreibe f durch $\mathcal{R}(f)$

Für die Lösung dieser Probleme verwenden wir die Fourier-Transformation. Wie das nächste Lemma zeigt besteht nämlich eine sehr elegante Beziehung zwischen diesen beiden Integraltransformationen.

Lemma 6

Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann ist $\mathcal{R}(f)(t, \gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für jedes feste γ. Weiter ist

$$\hat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) = \hat{f}(s\gamma)$$

Beachte: $\hat{f}$ ist die drei-dimensionale Fourier-Transformation von f.
$\hat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma)$ ist die eindimensionale Fourier-Transformation von $\mathcal{R}(f)(t, \gamma)$ als Funktion von t mit festem γ.

Beweis
Da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ existiert für jedes N $\in \mathbb{N}$ eine Konstante $A_N < \infty$, so dass

$$\frac{1}{2\pi}\ (1+|t|)^N(1+|u|)^N|f(t\gamma\ +\ u)| \leq\ A_N$$

wobei wie vorher $x = t\gamma + u$ mit γ orthogonal zu u.

Dies folgt folgendermaßen:
Da f eine Schwartzfunktion ist gilt

$$(0)\ \ (1+|x|)^N\ |f(x)| = (1+|t\gamma+u|)^N\ |f(t\gamma+u)| \leq\ A'_N$$

Weiter ist $|t\gamma + u|^2 = < t\gamma + u, t\gamma + u > =\ t^2 + |u|^2$
Damit ist

$$(1)\ \ (1+|t\gamma+u|^2)^2 = (1+t^2+|u|^2)^2 \geq\ (1+t^2)(1+|u|^2)$$

Außerdem gilt

$$(2a)\ \ (1+|t|)^N \leq\ 2^{\frac{N}{2}}\ (1+|t|^2)^{\frac{N}{2}}$$

$$(2b)\ \ (1+|u|)^N \leq\ 2^{\frac{N}{2}}\ (1+|u|^2)^{\frac{N}{2}}$$

denn

$$(2a)\ \Leftrightarrow (1+|t|)^2 \leq\ 2\ (1+|t|^2) \Leftrightarrow 1+2|t|+|t|^2 \leq\ 2+2|t|^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq\ 1+|t|^2-2|t|\ \ \Leftrightarrow\ \ 0\ \leq\ (1-|t|)^2$$

Analog für $(1+|u|)^N$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$(1+|t|)^N(1+|u|)^N\ |f(t\gamma+u)| \overset{(2)}{\leq}\ c_N\ (1+|t|^2)^{\frac{N}{2}}(1+|u|^2)^{\frac{N}{2}}|f(t\gamma+u)|$$

$$\overset{(1)}{\leq}\ c_N\ (1+|t|^2+|u|^2)^N\ |f(t\gamma+u)| = c_N\ (1+|t\gamma+u|^2)^N\ |f(t\gamma+u)|$$

$$\leq\ c_N\ (1+|t\gamma+u|)^{2N}\ |f(t\gamma+u)| \overset{(0)}{\leq}\ A''_{2N}$$

mit Konstante c_N
Damit folgt die Behauptung.

Es gilt somit für $N \geq\ 3$

$$(1+|t|)^N\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)\,du}_{\mathcal{R}(f)(t,\gamma)} \leq\ A_N \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{du}{(1+|u|)^N} < \infty$$

Bmerkung: Für $N \geq\ 3$ ist das zweite Integral endlich.

Ein gleiches Argument für die Ableitungen zeigt, dass $\mathcal{R}(f)(t,\gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für jedes feste γ.

Nun ist noch die Identität zu zeigen.
Es ist

$$\hat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f\right) e^{-ist}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)\,du\ e^{-ist}\,dt$$

da $<\gamma, u>= 0$ und $|\gamma| = 1$ gilt $e^{-ist} = e^{-is<\gamma,t\gamma+u>}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)\ e^{-is<\gamma,t\gamma+u>}\, du\, dt$$

Sei $\mathcal{R}$ die Rotation von γ, v_1, v_2 auf die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\mathcal{R}(t\gamma + u))\ e^{-i<s\gamma,\mathcal{R}(t\gamma+u)>}\, du\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\ e^{-i<s\gamma,x>}\, dx \\
&= \hat{f}(s\gamma)
\end{aligned}$$

□

Erinnerung/Bemerkung

Mittels Polarkoordinaten lässt sich zeigen, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, dx = \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{0}^{\infty} f(r\gamma) r^2\, dr\, d\sigma(\gamma)$$

Dabei bezeichnet $d\sigma(\gamma)$ das Oberflächenelement der Einheitssphäre.

Als eine Folgerung der im Lemma gezeigten Identität lässt sich nun die Eindeutigkeitsfrage positiv beantworten.

Korollar 7

Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$, dann gilt $f = g$

Beweis

Mit dem Lemma gilt

$$\widehat{(f-g)}(s\gamma) = \hat{f}(s\gamma) - \hat{g}(s\gamma) = \hat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) - \hat{\mathcal{R}}(g)(s,\gamma) = 0$$

da

$$\mathcal{R}(f)(s,\gamma) = \mathcal{R}(g)(s,\gamma) \Rightarrow\ \hat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) = \hat{\mathcal{R}}(g)(s,\gamma)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) = (f-g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{(f-g)}(\xi)\ e^{i<x,\xi>}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{S^2} \int\limits_{0}^{\infty} \underbrace{\widehat{(f-g)}(s\gamma)}_{=0}\ e^{i<x,s\gamma>} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ f(x) = g(x)$ □

Nun bleibt nur noch das Rekonstruktionsproblem zu lösen.

Definition 8
Sei $\mathcal{F}$ eine Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$. Ihre duale Radon-Transformation ist definiert durch

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{F})(x) = \int\limits_{\mathcal{S}^2} \mathcal{F}(< x, \gamma >, \gamma)\, d\sigma(\gamma)$$

Theorem 9 (Rekonstruktionstheorem)
Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann gilt

$$\triangle(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)) = -8\pi^2 f$$

Dabei ist $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der Laplace-Operator

Beweis
Nach vorherigem Lemma gilt

$$\mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ e^{its}\, ds$$

Damit

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)(x) &= \int\limits_{\mathcal{S}^2} \mathcal{R}(f)(< x, \gamma >, \gamma)\, d\sigma(\gamma) \\ &= \int\limits_{\mathcal{S}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ e^{i<x,\gamma>s}\, ds\, d\sigma(\gamma)\end{aligned}$$

Somit

$$\triangle(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ (-s^2) e^{i<x,\gamma>s}\, ds\, d\sigma(\gamma)$$

hier differenzieren wir unter dem Integral und es gilt

$$\triangle e^{i<x,\gamma>s} = -s^2 e^{i<x,\gamma>s} |\gamma| = -s^2 e^{i<x,\gamma>s}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ e^{i<x,\gamma>s} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{-\infty}^{0} \hat{f}(s\gamma)\ e^{i<x,s\gamma>} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{0}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ e^{i<x,s\gamma>} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma)\end{aligned}$$

Durch Substitution von s zu -s im ersten Integral erhalten wir folgendes

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{0}^{\infty} \hat{f}(s(-\gamma))\ e^{i<x,s(-\gamma)>} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_{0}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\ e^{i<x,s\gamma>} s^2\, ds\, d\sigma(\gamma)$$

Da für $\gamma \in \mathcal{S}^2$ auch $-\gamma \in \mathcal{S}^2$ und wir über ganz $\mathcal{S}^2$ integrieren macht es für den Wert des gesamten Integrals keinen Unterschied ob γ oder $-\gamma$ im Integral steht. Also

$$
\begin{aligned}
&= -\,2\,\sqrt{2\pi}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{\mathcal{S}^2} \int\limits_0^\infty \hat{f}(s\gamma)\; e^{i<x,s\gamma>} s^2 \, ds \, d\sigma(\gamma) \\
&\overset{\text{siehe}}{\underset{\text{Erinnerung}}{=}} -\,2 \cdot 4\pi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)\; e^{i<x,\xi>} \, d\xi \\
&= -\,8\pi^2 f(x)
\end{aligned}
$$

$\square$