Vortrag 10: Mehrdimensionale Wellengleichung

Inhaltsverzeichnis

Ziel ist die Lösung des folgenden Cauchy-Problems (CP)

$$(CP) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x), \quad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{aligned} \right\}$$

in den Dimensionen $d = 2, d = 3$ mithilfe der Fourier-Analysis und sogenannten sphärischen Mittelwerten. Wir beginnen mit einer Erinnerung an die wichtigsten Formeln aus Vortrag 9 über die eindimensionale Wellengleichung.

1 Erinnerung an Vortrag 9

Erinnerung 1.1 (Lösung von (CP)). *Die Lösung von (CP) ist gegeben durch:*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\widehat{f}(\xi) \cos(|\xi| t) + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(|\xi| t)}{|\xi|} \right] e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Erinnerung 1.2 (d'Alembert'sche Formel). *In $d = 1$ wird (CP) glöst von der d'Alembert'schen Formel:*

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

Diese Lösung besteht aus zwei Mittelwerten; beim zweiten wäre bloß noch durch t zu dividieren. Diese Struktur wollen wir jetzt auf die Dimensionen $d = 2$ und $d = 3$ verallgemeinern.

2 Lösung der Wellengleichung für $d = 3$

Der Fall $d = 3$ ist leichter, weil er gewisse Parallelen zum Fall $d = 1$ aufweist, weshalb wir diesen zuerst behandeln.

Definition 2.1 (Sphärischer Mittelwert in $d = 3$)**.** *Der sphärische Mittelwert von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ über die Sphäre vom Radius t und Zentrum x ist definiert als:*

$$M_t(f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - t\gamma) d\sigma(\gamma)$$

Mithilfe der Substitution $x - t\gamma = y$ geht das Integral über in

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} f(y) d\sigma(y),$$

in welcher Formel die t-Abhängigkeit dann in der Integrationsgrenze und dem Koeffizienten zu finden ist. Wir beweisen nun den ersten Satz über den sphärischen Mittelwert.

Theorem 2.1. *Wir haben:*
a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, t fest $\Rightarrow M_t(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$
b) $M_t(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ in t, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} M_t(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $F(x) = M_t(f)(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Um zu zeigen, dass F schnell fallend ist, betrachte die Ungleichung $|f(x)| \leq \frac{A_N}{1+|x|^N}$, welche für alle $N > 0$ richtig ist. A_N ist eine Konstante[1]. Aus dieser Ungleichung folgt schnell, wenn t festgehalten wird, dass gilt

$$|f(x - t\gamma)| \leq \frac{A'_N}{1 + |x|^N} \quad \forall\, \gamma \in S^2.$$

Die Richtigkeit der Gleichung wird eingesehen, wenn man die Fälle $|x| \leq 2|t|$ und $|x| > 2|t|$ getrennt betrachtet. Integrieren der obigen Gleichungen gibt dann:

$$|F(x)| \leq \frac{A'_N}{1 + |x|^N}.$$

Damit ist gezeigt, dass F schnell fallend ist, da die Gleichung für alle N gilt.

[1] Die Ungleichung ist aus dem Vortrag über Schwartz-Funktionen bekannt. Siehe Vortrag 1.

Nun bemerkt man, dass F unendlich oft differenzierbar ist und man hat

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha F(x) = M_t(f^{(\alpha)})(x), \quad \text{wobei} \quad f^{(\alpha)}(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f. \quad (*)$$

Um dies einzusehen, genügt es, das für $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}$ zu zeigen und per Induktion zum allgemeinen Fall überzugehen. Weiterhin genügt es, den Fall $k = 1$ zu zeigen. Es gilt:

$$\frac{F(x_1 + h, x_2, x_3) - F(x_1, x_2, x_3)}{h} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} g_h(\gamma) d\sigma(\gamma)$$

mit

$$g_h(\gamma) := \frac{f(x + e_1 h - \gamma t) - f(x - \gamma t)}{h} \quad \text{und} \quad e_1 = (1, 0, 0)^\mathsf{T}.$$

Nun bemerke noch, dass $g_h \to \frac{\partial}{\partial x_k} f(x - \gamma t)$ für $h \to 0$ gleichmäßig in γ. Also gilt $(*)$ und aus dem ersten Teil folgt, dass $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha F(x)$ auch schnell fallend ist, also $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dasselbe Argument kann auch auf jede Ableitung nach t von $M_t(f)$ angewendet werden. □

Lemma 2.2. *Es gilt:*

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} e^{-i\langle \xi, \gamma \rangle} d\sigma(\gamma) = \frac{\sin |\xi|}{|\xi|}.$$

Beweis. Siehe Vortrag 8 über die mehrdimensionale Fouriertransformation. □

Lemma 2.3. *Es gilt:*

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi| t}, \; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Beweis. Im Beweis benutzen wir den Satz von Fubini und das vorhergehende Lemma, um den Satz zu beweisen. Man rechnet leicht nach:

$$
\begin{aligned}
\widehat{M_t(f)}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} f(x-\gamma t) d\sigma(\gamma) \right) dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x-\gamma t) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx \right) d\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} \widehat{f}(\xi) e^{-i\langle \gamma t,\xi\rangle} d\sigma(\gamma) \\
&= \widehat{f}(\xi) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|t}
\end{aligned}
$$

$\square$

Jetzt können wir die Lösung der Wellengleichung mithilfe von Mittelwerten herleiten.

Theorem 2.4 (Lösung von (CP) in $\mathbb{R}^3$ über Mittelwerte)**.** *(CP) in $d = 3$ wird gelöst von*

$$
u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t M_t(f)(x) \right) + t M_t(g)(x).
$$

Beweis. Wir lösen zwei spezielle Cauchy-Probleme und setzen diese zu einer allgemeinen Lösung zusammen. Zunächst betrachten wir

$$
(CP_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ u_1(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t} u_1(x,0) = g(x), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{array} \right\}
$$

Erinnerung 1.1 gibt uns

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{g}(\xi) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|t} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \\
&= t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{M_t(g)}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \\
&= t M_t(g)(x)
\end{aligned}
$$

Analog findet man für das Cauchy-Problem:

$$(CP_2) \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta u_2 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ u_2(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} u_2(x,0) = 0, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{array}\right\}$$

mithilfe von Erinnerung 1.1

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi) \cos|\xi| t e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|t} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{M_t(f)}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t M_t(f)(x) \right). \end{aligned}$$

Bemerke nun, dass $u_1 + u_2 =: u$ das ursprüngliche Problem (CP) löst[2]. □

Wir wollen nun noch eine weitere Darstellung der gefundenen Lösung herleiten. Wir haben gefunden:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t M_t(f)(x) \right) + t M_t(g)(x) \quad (*)$$

Betrachte nun

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} f(y) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial B(0,1)} f(x+tz) d\sigma(z),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} f(y) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial B(0,1)} \langle \nabla f(x+tz), z \rangle \, d\sigma(z) = \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} \left\langle \nabla f(y), \frac{y-x}{t} \right\rangle d\sigma(y).$$

[2] Bemerke, dass wir im letzten Schritt die inverse Fouriertransformation genommen haben, aber den Faktor $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ ignoriert haben. Dies tut der Richtigkeit der gefundenen Formel aber keinen Abbruch, da die Wellengleichung eine homogene und lineare partielle Differentialgleichung ist.

Man setze das in (*) ein:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} [tg(y) + f(y) + \langle \nabla f(y), y - x \rangle] \, d\sigma(y).$$

Das ist die Kirchhoff'sche Formel, die in der linearen Optik häufige Anwendung findet.

3 Lösung der Wellengleichung für $d = 2$

Man geht analog zum Fall $d = 3$ vor, indem man einen sphärischen Mittelwert definiert. Wir werden dann die Lösung für den Fall $d = 2$ aus der für den Fall $d = 3$ herleiten. Dieses Verfahren ist als Abstiegsmethode bekannt.

Definition 3.1 (Sphärischer Mittelwert in $d = 2$)**.** *Man definiert den sphärischen Mittelwert in $d = 2$ Dimensionen als*

$$M_t(f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|\leq 1} f(x-ty)\left(1-|y|^2\right)^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Alle Sätze über Mittelwert für den Fall $d = 3$ gelten analog auch für den Fall $d = 2$.

Lemma 3.1. *Sei $H(x_1, x_2, x_3)$ eine solche Funktion, dass der sphärische Mittelwert existiert. Weiter gelte $H(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$, also H hänge nicht explizit von x_3 ab. Dann gilt:*

$$M_t(H)(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|\leq 1} h(x-ty)\left(1-|y|^2\right)^{-\frac{1}{2}} dy = M_t(h)(x_1, x_2).$$

Beweis. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}
M_t(H)(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} H(x - t\gamma) d\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} H(x_1 - t\cos\varphi\sin\theta, x_2 - t\sin\varphi\sin\theta, x_3 - t\cos\theta) d\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} h(x_1 - t\cos\varphi\sin\theta, x_2 - t\sin\varphi\sin\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} h(x_1 - t\cos\varphi\cdot r, x_2 - t\sin\varphi\cdot r)\frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|\leq 1} h(x_1 - ty_1, x_2 - ty_2)\frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} \\
&= M_t(h)(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.2 (Lösung der Wellengleichung über Mittelwerte)**.** *(CP) in $d = 2$ wird gelöst von*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_t(f)(x)\right) + tM_t(g)(x).$$

Beweis. Wir geben eine Skizze an. Wähle $T > 0$ beliebig und definiere $\eta(x_3) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, s.d. $\eta(x_3) = 1$, falls $|x_3| \leq 3T$.

Definiere weiter:

$$f^b(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2)\eta(x_3) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

$$g^b(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)\eta(x_3) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Mit Theorem 2.4. folgt nun, dass $u^b(x,t)$ nicht von x_3 abhängt, falls $|t| < T$, $|x_3| < T$. Somit können wir das letzte Lemma anwenden und sind fertig. $\square$

Als letztes bemerken wir noch, dass man analog zur Kirchhoff'schen Formel die sogenannte Poisson'sche Formel findet:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{B(x,t)} \frac{t \cdot f(y) + t^2 g(y) + t\left\langle \nabla g(y), y - x \right\rangle}{(t^2 - |y-x|)^{\frac{1}{2}}} dy.$$

4 Fragen zum Vortrag

Hier werden noch einmal die Fragen beantwortet, die während des Vortrages gestellt worden sind, aber im Vortrag nur mündlich beantwortet worden sind.

Wie geht man bei höheren Dimensionen vor?

Im Vortrag wurden bewusst nur die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ behandelt, weil sie exemplarisch sind. Man kann für allgemeines ungerades d ebenfalls einen sphärischen Mittelwert definieren:

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{A_d} \int\limits_{S^{d-1}} f(x - t\gamma) d\sigma(\gamma),$$

dabei ist S^{d-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$ und A_d deren Oberfläche. Dann findet man die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{d-3}{2}} \left(t^{d-2} M_t(f)(x) \right) + \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{d-3}{2}} \left(t^{d-2} M_t(g)(x) \right) \right]$$

Für gerades d findet man mit der Abstiegsmethode wieder eine analog Formel, wobei dann der Mittelwert aber dann wie folgt gegeben ist:

$$M_t(f)(x) := \frac{2}{A_{d-1}} \int\limits_{B^d} \frac{f(x + ty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy.$$

Was sind die Unterschiede zwischen geraden und ungeraden Dimensionen?

Anhand der Formeln erkannt man, dass für ungerades d die Anfangsbedingung nur Punkte auf dem Rand des Lichtkegels, der von x ausgeht, beeinflusst, wohingegen für gerades d die Anfangsbedingung auch Punkte innerhalb des Lichtkegels beeinflusst.

Weiterhin sind die Formeln für den geraden Fall komplizierter als für den ungeraden Fall, was ein immer wiederkehrendes Phänomen in der Fourier-Analysis ist.

Ist die Lösung des Cauchy-Problems eindeutig?

Ja, die Lösung von (CP) ist eindeutig. Der Beweis wird analog zum eindimensionalen Fall mithilfe des Energiefunktionals wie in Vortrag 9 geführt. Man benötigt jedoch das sogenannte Reynold'sche Transport-Theorem, welches die Leibniz-Regel für den Fall $d = 1$ auf allgemeine Dimensionen verallgemeinert und den Gauß'schen Integralsatz.

Woran erkennt man die endliche Ausbreitungsgeschwindingkeit von Wellen?

Aus den gefundenen Lösungsformeln erkennt man, dass zu einer gegebenen Zeit t ein Punkt x die Lösung nur innerhalb einer speziellen endlichen Region beeinflusst, was die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle impliziert.