

Black-Scholes-Merton-Gleichung

Wintersemester 2019/2020

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \quad (1)$$

mit S : aktueller Aktienkurs

K : Basiswert (bei Vertragsabschluss festgelegter Preis)

T : Gesamtlaufzeit mit $t \in [0, T]$

r : risikoloser Zins

σ : Volatilität (Schwankung des Aktienkurses)

$C(S, t)$: Wert der Kaufoption (Auszahlungsbetrag oder Einkünfte)

Die Black-Scholes-Merton-Gleichung ist eine finanzmathematische Gleichung zur Bewertung von Aktien (allgemein Optionen). Mit ihrer Hilfe können theoretische Gewinne durch Aktien berechnet werden bzw. es ist möglich verschiedene Aktien zu vergleichen.

Betrachte eine europäische Call-Option (Auszahlung findet erst am Vertragsende T statt) dessen Kaufwert durch eine stetige Funktion f den Auszahlungswert approximiert.

$$\text{Dazu verlangen wir : } \lim_{t \rightarrow T} C(S, t) = f(S)$$

Lösung:

Forme BSM-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung (Vortrag 3) um mit folgenden Substitutionen:

$$1) D(x, y) = e^{r(T-t)} C(S, t)$$

$$2) y = (T - t), S = Ke^z$$

$$3) x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$$

$$1) D(x, y) = e^{r(T-t)} C(S, t) :$$

$$\Rightarrow 1) \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} e^{-r(T-t)} + D r e^{-r(T-t)}$$

$$2) \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial D}{\partial S} e^{-r(T-t)}$$

$$3) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} e^{-r(T-t)}$$

Einsetzen in BMS-Gleichung (1):

$$\frac{\partial D}{\partial t} + rS \frac{\partial D}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = 0 \quad (2)$$

2) $y = T-t$ und $S = K e^z$

$$\Rightarrow 1) \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial D}{\partial y}$$

$$2) \frac{\partial D}{\partial S} = \frac{\partial D}{\partial z} \frac{1}{S}$$

$$3) \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \frac{1}{S^2} - \frac{\partial D}{\partial z} \frac{1}{S^2}$$

Einsetzen in (2):

$$-\frac{\partial D}{\partial y} + r \frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial D}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

3) $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$

$$\Rightarrow 1) \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial x}$$

$$2) \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

$$3) \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\partial D}{\partial y}$$

Einsetzen in (3):

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial D}{\partial y} \quad (4)$$

mit der Bedingung : $\lim_{y \rightarrow 0} D(x, y) = f(Ke^x)$

Nach vorherigen Vorträgen gilt :

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \hat{D}}{\partial y} = (i\xi)^2 \hat{D} \frac{\sigma^2}{2} = -\frac{\sigma^2}{2} \xi^2 \hat{D}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung : } \hat{D}(\xi, y) = \hat{D}(\xi, 0) e^{-\frac{\sigma^2}{2} \xi^2 y}$$

Da $D(x, 0) = f(Ke^x)$ ist $\hat{D}(\xi, 0) = \hat{f}(Ke^\xi)$

$$\Rightarrow \hat{D}(\xi, y) = \hat{f}(Ke^\xi) e^{-\frac{\sigma^2}{2} \xi^2 y}$$

Nutze Faltungseigenschaft : $\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{(f * g)}(\xi)$

sowie $\hat{D}(\xi, y) = \hat{f}(Ke^\xi) e^{-\frac{\sigma^2}{2}\xi^2 y} = \hat{D}_1(\xi) \hat{D}_2(\xi)$

$$\Rightarrow D(x, y) = (D_1 * D_2)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D_1(x - \xi, y) D_2(\xi, y) d\xi$$

wobei die Inverse Fouriertransformierte $F^{-1}(\hat{D}_1) = D_1 = D(x, 0) = f(Ke^x)$

und Beh. : $F^{-1}(\hat{D}_2) = D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}}$

Beweis :

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 y}{2} \xi^2} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \frac{\sigma^2 y}{2} \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

Sei $ix\xi - \frac{\sigma^2 y}{2} \xi^2 = A(\xi - B)^2 + C = A\xi^2 + 2AB\xi + C + AB^2$:

$\Rightarrow A = -\frac{\sigma^2 y}{2}$, sowie $2AB = ix$ und $AB^2 + C = 0$

$$\Rightarrow 2AB = ix \Leftrightarrow -\sigma^2 y B = ix \Leftrightarrow B = -\frac{ix}{\sigma^2 y}$$

$$\Rightarrow 0 = AB^2 + C \Leftrightarrow \left(-\frac{\sigma^2 y}{2}\right) \left(-\frac{ix}{\sigma^2 y}\right)^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{x^2}{2\sigma^2 y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right) \left(\xi - \frac{ix}{\sigma^2 y}\right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2 y}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right) \left(\xi - \frac{ix}{\sigma^2 y}\right)^2} d\xi \end{aligned}$$

mit $a = \sqrt{\frac{\sigma^2 y}{2}} \left(\xi - \frac{ix}{\sigma^2 y}\right)$ folgt :

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\sigma^2 y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da}_{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2 y}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sigma\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \end{aligned}$$

□

$$\Rightarrow D(x, y) = (D_1 * D_2)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(Ke^{x-\xi}) \frac{1}{\sigma\sqrt{y}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2 y}} d\xi$$

mit $v = x - \xi$:

$$D(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(Ke^v) e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} dv \quad (5)$$

Funktion 1 : (Vanilla Pay off)

$$f(S) = \max\{S - K, 0\}$$

$$f(Ke^x) = \max\{K(e^x - 1), 0\}$$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} K(e^v - 1) e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} dv \\ &= \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \left(\int_0^{\infty} e^v e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} dv - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} dv \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } z = \frac{v-x}{\sigma\sqrt{y}} \text{ und } e^v e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} = e^{z\sigma\sqrt{y}+x} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{\sigma^2 y}{2}} e^{-\frac{\sigma^2 y}{2}} = e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} e^{-\frac{(z^2 - 2z\sigma\sqrt{y} + \sigma^2 y)}{2}} :$$

$$= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} e^{-\frac{(z^2 - 2z\sigma\sqrt{y} + \sigma^2 y)}{2}} dz - \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

mit $t = z - \sigma\sqrt{y}$ folgt :

$$= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} \int_{\frac{-x+\sigma^2 y}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

weil das Gauß-Integral symmetrisch ist :

$$= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{x+\sigma^2 y}{\sigma\sqrt{y}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{y}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Rightarrow D(x, y) = K e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} N(d_1) - K N(d_2)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{x+\sigma^2 y}{\sigma\sqrt{y}}, d_2 = \frac{x}{\sigma\sqrt{y}} \text{ und } N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Somit erhalten wir für die Lösung $C(S, t)$ schlussendlich :

$$\begin{aligned} C(S, t) &= K e^{x+\frac{\sigma^2 y}{2}} e^{-r(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ &= S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

Funktion 2 : (Log Pay off)

$$f(S) = \max\left\{\ln\left(\frac{S}{K}\right), 0\right\}$$

$$f(Ke^x) = \max\{x, 0\}$$

$$D(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2 y}} dv$$

$$\text{mit } z = \frac{v-x}{\sigma\sqrt{y}} \text{ folgt :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} (z\sigma\sqrt{y} + x) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma\sqrt{\frac{y}{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma\sqrt{\frac{y}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(x, y) = xN(d) + \sigma\sqrt{\frac{y}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}} \text{ mit } d = \frac{x}{\sigma\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow C(S, t) = e^{-r(T-t)} x N(d) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

$$\text{wobei } c = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}}{\sigma\sqrt{y}}$$