Die Poissonsche Summenformel

Seminar: Fourieranalysis

Lorenz Gramespacher

November 2019

---

1 Grundlagen zu Fourierreihen

1.1. Definition: Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann definieren wir die *Fourierreihe* von f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ als:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}$$

,

wobei α_k die *Fourierkoeffizienten* sind. Diese sind gegeben durch:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

1.2. Lemma: Sei f eine auf $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion. Gilt nun: $\alpha_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, so ist $f = 0$, an allen Stetigkeitspunkten von f.

(ohne Beweis.)

1.3. Korollar: Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$, und

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ikx}$$

die jeweiligen Fourierreihen. Gilt nun $\alpha_k = \beta_k \forall k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f = g$.

Beweis: Folgt direkt aus *Lemma 1.2*: Setze für $f := f - g$ ein. $\square$

2 Die Poissonsche Summenformel

2.1 Satz (PSF): Sei $f \in S(\mathbb{R})$ und $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f. Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Setzt man insbesondere $x = 0$, so erhält man:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k)$$

Es können also die Periodisierung von f und die Auswertung von f an diskreten Stellen gleichgesetzt werden.

Beweis: Idee: Zeige, dass auf beiden Seiten die Fourierkoeffizienten gleich sind. Auf der rechten Seite ergeben sich diese nach Definition zu $\bar{\alpha}_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(l)$. Für die linke Seite rechnen wir die Fourierkoeffizienten explizit aus:

$$\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k)e^{-ilx}dx \overset{f\in S(\mathbb{R})}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi k)e^{-ilx}dx$$

$$\overset{y:=x+2\pi k}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(y)e^{-ily}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ily}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(l)$$

□

3 Anwendungen

1. Die Thetafunktion

Sei $s > 0$. Dann ist die Thetafunktion (in unserem Fall) definiert als:

$$\vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$$

Satz 3.1: Es gilt: $\vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta(\frac{1}{s})$.

Beweis: Dieser Beweis ist exemplarisch für beinahe alle Beweise, in denen bei uns die PSF benutzt wird. Man definiere sich ein passendes f und erhält ein entsprechendes $\hat{f}$. Auf dieses Paar wendet man dann die PSF an. Wir betrachten jetzt $f(x) = e^{-\frac{\pi x^2 s}{4\pi^2}}$, und es ergibt sich $\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi\xi^2}{s}}}{\sqrt{s}}$.

Nach der Poissonschen Summenformel ist nun

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}}{\sqrt{s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi k^2}{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \vartheta(\frac{1}{s})$$

□

2. Exercise 15 (Fourier Analysis: An Introduction; Elias M. Stein, Rami Shakarchi, Chapter 5)

Es gelten:

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{sin^2(\pi\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

Beweis: Wende die PSF auf das Paar

$$g(x) := \frac{sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

,

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(1 - |\xi)|, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

an.

□

3. Die Periodisierung des Wärmeleitungskerns

Im 3. Vortrag haben wir gesehen, dass sich die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ mithilfe des Wärmeleitungskerns

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

angegeben werden kann, wobei gilt:

$$\hat{\mathcal{H}}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}.$$

Diese Lösung kann mithilfe der Periodisierung von $\mathcal{H}_t(x)$ auch in eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Kreis überführt werden. Dazu definieren wir

$$H_t(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-tk^2} e^{ikx}$$

Nun gilt nämlich:

Satz 3.2: Sei $\mathcal{H}_t(x)$ der Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$H_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x + 2\pi k)$$

, wobei $H_t(x)$ definiert ist wie oben.

Beweis: Der Beweis ist eine direkte Anwendung der Poissonschen Summenformel auf das Paar $\mathcal{H}_t(x)$ und $\hat{\mathcal{H}}_t(x)$. $\square$