Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen

Prof. Dr. Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Vorlesungsbegleitendes Skript
Wintersemester 2019/20

Stand: 22. November 2019

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein Nachschlagewerk zur Vorlesung *Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen*. Es sollte kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch sein. Eventuell ausgelassene Beweise findet man in den gängigen Lehrbüchern zu diesem Thema.

Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:
`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Herrn Patrick Capraro für seine hervorragende Arbeit beim Schreiben des Manuskriptes sowie Pascal Gussmann, Mario Parente, Tadeus Ras, Albrecht Seelmann, Stephan Schmitz und Simon Holbach für ihre Korrekturvorschläge.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Unter einer *partiellen Differentialgleichung* versteht man eine Gleichung, welche die gesuchte Funktion u *mehrerer* Variablen $(x_1, \dots, x_n)$ $(n > 1)$ mit einigen ihrer partiellen Ableitungen verknüpft. Die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen heißt *Ordnung der Differentialgleichung*.

NOTATION 1. *Sei $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, schreibe $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Wir notieren die α-te partielle Ableitung von u als*

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Der Vektor α heißt Multiindex. *Darüber hinaus schreiben wir*

$$D^k u := \{D^\alpha u \mid |\alpha| = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

DEFINITION 2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega = \mathbb{R}^n$ möglich), $n \geq 2$, offen. Sei*

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}, \quad k \geq 1,$$

eine gegebene Funktion. Einen Ausdruck der Form

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \tag{1}$$

nennt man partielle Differentialgleichung (der Ordnung k) *für die unbekannte Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*

DEFINITION 3. *Unter einer Lösung der Differentialgleichung* (1) *versteht man eine Funktion u, welche samt der in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen in Ω wohldefiniert ist und dort der Differentialgleichung* (1) *genügt.*

DEFINITION 4. *Die partielle Differentialgleichung* (1) *heißt* linear, *wenn sie als*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \tag{2}$$

dargestellt werden kann. Die Funktionen $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten *der Differentialgleichung und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt der* inhomogene Term. *Ist $f = 0$, so heißt* (2) homogen, *sonst* inhomogen.

Beispiel (α). $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, ist eine lineare, homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung. Ihre Lösungen sind genau die Funktionen u auf Ω, welche nur von x_2 abhängen.

Beispiel (β). $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, ist eine spezielle Form der Transportgleichung. Das ist eine lineare, homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung.

Sei $v \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig. Setze $u(x_1, x_2) := v(x_1 - x_2)$. Offenbar gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = v'(x_1 - x_2) - v'(x_1 - x_2) = 0.$$

Wir wissen aber noch nicht, ob wir alle Lösungen dieser Differentialgleichung gefunden haben.

Sucht man eine Lösung, die eine zusätzliche Bedingung erfüllen soll, etwa

$$u(0, x_2) = g(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

für ein gegebenes $g \in C^1(\mathbb{R})$, so wählt man $v(x) = g(-x)$. Es stellt sich die Frage, ob es wetere Lösungen gibt, die diese Bedingung erfüllen.

Beispiel (γ). Die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta u := \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie spielt eine fundamentale Rolle in der Analysis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 1, \\ u(x) &= x_1, \\ u(x) &= x_1^2 - x_2^2, \\ u(x) &= \mathrm{e}^{x_1} \cos x_2 \end{aligned}$$

spezielle Lösungen. Lösungen der Laplacegleichung heißen *harmonische Funktionen*.

Von Interesse sind *Randwertaufgaben* für die Laplacegleichung. Sei dazu Ω beschränkt und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Finde alle Lösungen u der Laplacegleichung in Ω, welche die *Randbedingung*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \partial\Omega$$

erfüllen.

Beispiel (δ). Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u$$

beschreibt die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem Körper durch Wärmeleitung oder die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch Diffusion.

Beispiel (ε). Die Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u$$

beschreibt die Wellenausbreitung in so unterschiedlichen Zusammenhängen wie Wasseroberflächen (allerdings nur bei leichten Wellen auf vergleichsweise tiefem Wasser), Schwingung von Violinsaiten und Trommelfellen oder Schallwellen in der Luft.

Ist die gesuchte Funktion in der Differentialgleichung vektorwertig, so spricht man auch von einem *System* von Differentialgleichungen.

Beispiel (ζ). Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Die Funktion $x_1 + \mathrm{i}x_2 \mapsto u(x_1, x_2) + \mathrm{i}v(x_1, x_2)$ ist holomorph in Ω genau dann, wenn $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial v}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{aligned}$$

genügen. Mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen kann man zeigen, dass u und v harmonische Funktionen sind, sofern $x_1 + \mathrm{i}x_2 \mapsto u(x_1, x_2) + \mathrm{i}v(x_1, x_2)$ holomorph ist.

Beispiel (η). Die (inkompressible) Navier-Stokes-Gleichung

$$u_t + \langle u, \nabla \rangle u + \nabla p = R\Delta u, \quad R > 0, \qquad \operatorname{div} u = 0,$$

beschreibt Bewegung zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dabei ist $u : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Strömungsgeschwindigkeit und $p : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ der Druck. Weiter ist Δu der komponentenweise wirkende Laplace-Operator

$$\Delta u := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\langle u, \nabla \rangle := u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + u_3 \partial_{x_3}.$$

Beispiel (θ). Die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu H_t + \operatorname{rot} E &= 0, \\ \operatorname{div}(\mu H) &= 0, \\ \varepsilon E_t - \operatorname{rot} H &= 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon E) &= 0 \end{aligned}$$

beschreiben die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem dielektischen Material mit elektrischer Permittivität ε und magnetischer Permeabilität μ. Hier bezeichnen E und H die elektrische bzw. magnetische Feldstärke.

Beispiel (ι). Die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = -\Delta \psi + V\psi$$

beschreibt die zeitliche Veränderung eines quantenmechanischen Zustands ψ in einem Potential V.

Beispiel (κ). Die Fisher-Kolmogorov-Gleichung (auch FKPP-Gleichung nach Fisher, Kolmogorov, Petrowki, Piscounov)

$$u_t = u_{xx} + u - u^3, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

ist ein (stark vereinfachtes) Beispiel für Reaktions-Diffusions-Gleichungen.

Beispiel (λ). Die Burgersgleichung

$$u_t + uu_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie besitzt nicht unbedingt eine eindeutige Lösung. Bei geeignet gewählten Anfangswerten können Stoßwellen beobachtet werden.

Beispiel (μ). Die Korteweg-de Vries-Gleichung

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

ist eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Sie modelliert die Ausbreitung von Wellen in Wasserkanälen. Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind Solitonen, d.h. einzelne Wellen, die sich in Geschwindigkeit, Größe und Erscheinungsbild nicht ändern.

Beispiel (ν). Die Platten- oder biharmonische Gleichung

$$\Delta^2 u = \Delta\Delta u = f, \quad u : \Omega \to \mathbb{R},$$

beschreibt die Auslenkung u einer eingespannten Platte Ω. Hier ist f die Kraftdichte, die auf die Platte ausgeübt wird.

KAPITEL 1

Die Lineare Transportgleichung

Im Folgenden ist (t,x) stets ein Tupel in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, wobei wir t als die Zeit und x als den Ort interpretieren. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_t(t,x) + \langle b(t,x), \nabla u(t,x) \rangle = f(t,x) \tag{1.1}$$

mit $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *lineare Transportgleichung*. Hier bezeichnet

$$\nabla u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

den (Orts-)Gradienten von u und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Das Anfangswertproblem für diese Gleichung lautet: Finde eine Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von (1.1) mit

$$u(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

zu einer vorgegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.1. Die lineare homogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Hier betrachten wir den einfachsten Fall $b(t,x) = b =$ konst, $f(t,x) = 0$. In diesem Fall hat die Differentialgleichung (1.1) die Gestalt

$$u_t(t,x) + \langle b, \nabla u(t,x) \rangle = 0, \quad b \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Offenbar ist $u(t,x) := v(x - bt)$ eine Lösung von (1.3) für jedes $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Die Umkehrung gilt auch:

Satz 1.1. *Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Lösung von (1.3), so existiert ein $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $u(t,x) = v(x - bt)$.*

Beweis. Zu festem $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ betrachte die Funktion

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z(s) := u(t+s, x+bs).$$

Es gilt

$$z'(s) = u_t(t+s, x+bs) + \langle b, \nabla u(t+s, x+bs) \rangle \overset{(1.3)}{=} 0.$$

Somit ist z konstant und es folgt

$$u(t,x) = z(0) = z(-t) = u(0, x-bt) = v(x-bt)$$

mit $v(x) := u(0,x)$. □

BEMERKUNG. Jede Lösung $u(t,x)$ von (1.3) ist konstant entlang von Geraden

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = bt + x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n\}.$$

Solche Geraden nennt man *Charakteristiken* der Differentialgleichung (1.3).

KOROLLAR 1.2. *Für $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ besitzt die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \langle b, \nabla u(t,x) \rangle = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.4}$$

genau eine Lösung. Sie lautet $u(t,x) = g(x - bt)$.

BEWEIS. Die *Existenz* ist offensichtlich, denn $u(t,x) = g(x-bt)$ ist tatsächlich eine Lösung. Zum Beweis der *Eindeutigkeit* nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen u_1 und u_2. Dann ist $w := u_1 - u_2$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \langle b, \nabla w(t,x) \rangle = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ w(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Nach Satz 1.1 existiert nun eine Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $w(t,x) = v(x - tb)$. Dann ist $v(x) = w(0,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Somit ist $w = 0$ und folglich gilt $u_1 = u_2$. □

1.2. Schwache Lösungen

Hier betrachten wir die Anfangswertaufgabe (1.4) mit $g \notin C^1(\mathbb{R}^n)$, z.B.

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

oder

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Mit $|\cdot|$ notieren wir die Euklidnorm, d.h. $|x| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 1.3. *Ist $g \notin C^1(\mathbb{R}^n)$, so besitzt die Anfangswertaufgabe (1.4) keine C^1-Lösung.*

BEWEIS. Wir zeigen die Kontraposition. Besitzt die Anfangswertaufgabe (1.4) eine C^1-Lösung u, so existiert nach Satz 1.1 eine Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $u(t,x) = v(x - tb)$. Für $t = 0$ folgt $g(x) = u(0,x) = v(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ und somit $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. □

Die Formel $u(t,x) = g(x - bt)$ aus Korollar 1.2 liefert jedoch auch in dieser Situation einen vernünftigen Kandidaten für die Lösung der Anfangswertaufgabe (1.4). Um diesen zu „legitimieren", müssen wir unseren Lösungsbegriff abschwächen. Das, was wir bisher als Lösung einer partiellen Differentialgleichung bezeichnet haben, nennt man eine *klassische Lösung*.

DEFINITION 1.4. *Eine $C^1(\mathbb{R}^{n+1})$-Lösung der Anfangswertaufgabe (1.4) heißt* klassisch.

Sei u die klassische Lösung von (1.4). Mit $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Multiplizieren wir die Gleichung $u_t + \langle b, \nabla u \rangle = 0$ mit einer Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und integrieren über $x \in \mathbb{R}^n$ sowie $t \in [0, \infty)$, so erhalten wir über Fubini und partielle Integration

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi(t,x) u_t(t,x) + \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi(t,x) \langle b, \nabla u(t,x) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^\infty dt \varphi(t,x) u_t(t,x) + \int_0^\infty dt \left\langle b, \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi(t,x) \nabla u(t,x) \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx \left([\varphi(t,x) u(t,x)]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty dt \varphi_t(t,x) u(t,x) \right) \\
&\quad - \int_0^\infty dt \left\langle b, \int_{\mathbb{R}^n} dx \nabla \varphi(t,x) u(t,x) \right\rangle \\
&= - \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \left(\varphi_t(t,x) + \langle b, \nabla \varphi(t,x) \rangle \right) u(t,x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi(0,x) \underbrace{u(0,x)}_{=g(x)} .
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Der letzte Ausdruck ergibt im Gegensatz zu (1.4) auch einen Sinn für Funktionen u, welche nicht stetig differenzierbar sondern lediglich lokal integrierbar sind (d.h. integrierbar über jedes Kompaktum, im Zeichen $u \in L^1_{loc}$). Dies motiviert die folgende Begriffsbildung:

DEFINITION 1.5. *Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ heißt* schwache Lösung *von* (1.4), *wenn*

$$
\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \left(\varphi_t(t,x) + \langle b, \nabla \varphi(t,x) \rangle \right) u(t,x) = - \int_{\mathbb{R}^n} dx \, \varphi(0,x) g(x) \tag{1.6}
$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gilt.

Die obige Rechnung zeigt, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist.

SATZ 1.6. *Sei $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$
u(t,x) := g(x - bt) \tag{1.7}
$$

die eindeutige schwache Lösung von (1.4).

BEMERKUNG. Ist g stetig, so ist g lokal integrierbar: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist g nach dem Satz von Weierstraß beschränkt auf K, weswegen $\int_K g(x) dx$ in $\mathbb{R}$ existiert.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, dass (1.7) eine schwache Lösung von (1.4) ist. Dies erhalten wir mit Hilfe der Variablensubstitution $(t, y) :=$

$(t, x - bt)$ aus

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \, (\varphi_t(t,x) + \langle b, \nabla\varphi(t,x)\rangle) \, g(x - bt) \\
&= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dy \, \underbrace{(\varphi_t(t, y + bt) + \langle b, \nabla\varphi(t, y + bt)\rangle)}_{=\frac{d}{dt}\varphi(t,y+bt)} g(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_0^\infty dt \frac{d}{dt}\varphi(t, y + bt) g(y) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} dy \varphi(0, y) g(y).
\end{aligned}$$

Die *Eindeutigkeit* wird im nächsten Abschnitt bewiesen. □

1.3. Die inhomogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Nun betrachten wir die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \langle b, \nabla u(t,x)\rangle = f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Satz 1.7. *Es seien* $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *und* $f(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. *Dann besitzt die inhomogene Anfangswertaufgabe* (1.8) *genau eine klassische Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(t,x) = g(x - bt) + \int_0^t f(s, x + (s - t)b) ds, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Beweis. *Existenz*: Die in (1.9) definierte Funktion u erfüllt

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) &= -\langle b, \nabla g(x - bt)\rangle + f(t,x) - \int_0^t \langle b, \nabla f(s, x + (s-t)b)\rangle ds, \\
\nabla u(t,x) &= \nabla g(x - bt) + \int_0^t \nabla f(s, x + (s-t)b) ds,
\end{aligned}$$

woraus wir

$$\langle b, \nabla u(t,x)\rangle = \langle b, \nabla g(x - bt)\rangle + \int_0^t \langle b, \nabla f(s, x + (s-t)b)\rangle ds$$

und schließlich

$$u_t + \langle b, \nabla u\rangle = f$$

folgern.

Eindeutigkeit: Sind u_1 und u_2 Lösungen, so löst $w := u_1 - u_2$ die homogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \langle b, \nabla w(t,x)\rangle = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ w(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

und Korollar 1.2 impliziert $w = 0$, also $u_1 = u_2$. □

Beispiel. Sei $n = 1$. Betrachte $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+t}$ mit $g \equiv 0$. Nach Satz 1.7 ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(t,x) = 0 + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{x+\frac{3}{2}(s-t)}\mathrm{e}^s ds = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{5}{2}s} ds$$
$$= \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{5}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right).$$

Mit Satz 1.7 können wir auch den Beweis von Satz 1.6 vervollständigen.

Beweis der Eindeutigkeit in Satz 1.6. Wir nehmen an, es gäbe zwei schwache Lösungen u_1 und u_2 der Anfangswertaufgabe (1.4) und setzen $w := u_1 - u_2$. Können wir zeigen, dass jedes $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ geschrieben werden kann als

$$\varphi_t + \langle b, \nabla\varphi\rangle = \psi \tag{1.10}$$

für ein geeignetes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx\, \psi(t,x)w(t,x) = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx\, (\varphi_t(t,x) + \langle b, \nabla\varphi(t,x)\rangle)\, w(t,x) = 0$$

und mit Lemma A.6 folgt $w(t,x) = 0$ fast überall und somit $u_1 = u_2$ fast überall. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir eine $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$-Lösung φ der inhomogenen Transportgleichung (1.10) finden.

Zu beliebigem $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ wählen wir $t_0 > 0$ und $R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp}\psi \subset (-t_0, t_0) \times B_R(0)$ ist. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := -\int_0^{t_0} \psi(s, x + sb) ds$$

gegeben. Wie man leicht sieht, gilt $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Betrachte nun die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \varphi_t(t,x) + \langle b, \nabla\varphi(t,x)\rangle = \psi, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \varphi(0,x) = h(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Diese wird nach Satz 1.7 gelöst durch

$$\varphi(t,x) = h(x - bt) + \int_0^t \psi(s, x + (s-t)b) ds$$
$$= -\int_0^{t_0} \psi(s, x + (s-t)b) ds + \int_0^t \psi(s, x + (s-t)b) ds.$$

Wie oben sieht man $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, zu zeigen bleibt die Kompaktheit des Trägers. Für alle t mit $|t| \geq t_0$ gilt offenbar $\varphi(t,x) = 0$. Für $|t| < t_0$ erhalten wir mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|x + (s-t)b| \geq |x| - \underbrace{|s-t|}_{\leq 2t_0}|b| \geq |x| - 2t_0|b|$$
$$\geq R \quad \text{für} \quad |x| \geq R' := R + 2t_0|b| > 0.$$

Folglich ist $\operatorname{supp}\varphi \subset (-t_0, t_0) \times B_{R'}(0)$, also schließlich $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Damit ist φ die gewünschte Lösung von (1.10). □

Analog zu Abschnitt 1.2 kann man auch schwache Lösungen der inhomogenen Anfangswertaufgabe (1.8) betrachten, was hier jedoch nicht geschehen soll.

1.4. Allgemeine lineare Transportgleichung, Charakteristiken

Hier betrachten wir die Anfangswertaufgabe für die allgemeine lineare Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \langle b(t,x), \nabla u(t,x) \rangle = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.11}$$

wobei $b \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $b(t,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte die folgende Anfangswertaufgabe für eine *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ($b(t,\cdot) \in C^1$!) existiert eine eindeutige lokale Lösung. Jede Lösung besitzt ihr *maximales Existenzintervall* $(T_-, T_+) \ni 0$ (wobei auch $T_- = -\infty$ und $T_+ = \infty$ möglich sind). Im Allgemeinen hängen $T_\pm$ von x_0 ab, d.h. $T_\pm = T_\pm(x_0)$.

Angenommen, $u(t,x)$ ist eine Lösung von (1.11). Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, x(t)) &= u_t(t,x(t)) + \langle \dot{x}(t), \nabla u(t,x(t)) \rangle \\ &= u_t(t,x(t)) + \langle b(t,x(t)), \nabla u(t,x(t)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also ist u entlang jeder Lösungskurve $\{(t,x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in (T_-(x_0), T_+(x_0))\}$ konstant. Solche Kurven heißen *Charakteristiken* der partiellen Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 1.1).

Für $t = 0$ gilt $u(0, x(0)) = u(0, x_0) = g(x_0)$. Somit ist

$$u(t, x(t)) = g(x_0) \quad \forall t \in (T_-(x_0), T_+(x_0)).$$

Wir wollen nun $u(\bar{t}, \bar{x})$ für alle $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ bestimmen. Sei $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Angenommen, durch $(\bar{t}, \bar{x})$ geht eine Charakteristik.

Behauptung: Eine solche Charakteristik ist eindeutig, d.h. Charakteristiken schneiden sich nicht.

Beweis. Angenommen, $x(\bar{t}) = \tilde{x}(\bar{t}) = \bar{x}$, wobei x bzw. $\tilde{x}$ eindeutige Lösungen von $\dot{x} = b(t,x)$ zu den Anfangswerten x_0 bzw. $\tilde{x}_0$ sind. Dann sind x sowie $\tilde{x}$ auch Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t,x), \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, \end{cases}$$

deren Lösung jedoch eindeutig ist. Somit gilt $x(t) = \tilde{x}(t)$ für alle Zeiten t aus dem Existenzintervall. Insbesondere ist $x_0 = \tilde{x}_0$. $\square$

Wir kommen zu dem Schluss, dass

$$u(\bar{t},\bar{x}) = g(x_0) \tag{1.12}$$

ist, wobei x_0 der Punkt ist, in welchem die Charakteristik, die durch $(\bar{t},\bar{x})$ geht, die Hyperebene $H = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ schneidet.

Beispiel (1). Betrachte den Fall $b(t,x) = b = \text{konst.}$

$$\left.\begin{array}{r} \dot{x}(t) = b \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = x_0 + bt \quad \forall t \in (-\infty,+\infty).$$

Für jedes $(\bar{t},\bar{x})$ gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\bar{x} = x_0 + b\bar{t}$, nämlich $x_0 = \bar{x} - b\bar{t}$. Mit (1.12) erhält man

$$u(\bar{t},\bar{x}) = g(\bar{x} - b\bar{t}), \quad (\bar{t},\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Beispiel (2). Nun sei $b(t,x) = x$.

$$\left.\begin{array}{r} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = e^t x_0 \quad \forall t \in (-\infty,+\infty).$$

Für jedes $(\bar{t},\bar{x})$ gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\bar{x} = e^{\bar{t}}x_0$, nämlich $x_0 = e^{-\bar{t}}\bar{x}$. Wieder mit (1.12) erhalten wir

$$u(\bar{t},\bar{x}) = g(e^{-\bar{t}}\bar{x}), \quad (\bar{t},\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Beispiel (3). Nun seien $n = 1$ und $b(t,x) = x^2$.

$$\left.\begin{array}{r} \dot{x}(t) = x(t)^2 \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad \begin{cases} t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}), & x_0 > 0, \\ t \in (-\infty,+\infty), & x_0 = 0, \\ t \in (\frac{1}{x_0}, +\infty), & x_0 < 0. \end{cases}$$

Für jedes $(\bar{t},\bar{x})$ mit $\begin{cases} \bar{x} > -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} > 0, \\ \bar{x}\,\text{beliebig}, & \bar{t} = 0, \\ \bar{x} < -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} < 0 \end{cases}$ gibt es genau ein $x_0 = \dfrac{\bar{x}}{1+\bar{t}\bar{x}}$ so, dass $\bar{x} = x(\bar{t})$, denn

$$\begin{aligned} \bar{t}x_0 = \frac{\bar{t}\bar{x}}{1+\bar{t}\bar{x}} &= 1 - \frac{1}{1+\bar{t}\bar{x}} < 1 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \bar{t} \in (-\infty, \frac{1}{x_0}), & x_0 > 0, \\ \bar{t} \in (-\infty,+\infty), & x_0 = 0, \\ \bar{t} \in (\frac{1}{x_0}, +\infty), & x_0 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $(\bar{t},\bar{x})$ mit $\begin{cases} \bar{x} < -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} > 0, \\ \bar{x} > -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} < 0, \end{cases}$ besitzt die Gleichung $\bar{x} = x(\bar{t})$ keine Lösung, denn

$$\begin{aligned} \bar{t}x_0 = \frac{\bar{t}\bar{x}}{1+\bar{t}\bar{x}} &= 1 - \frac{1}{1+\bar{t}\bar{x}} > 1 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \bar{t} \notin (-\infty, \frac{1}{x_0}), & x_0 > 0, \\ \bar{t} \notin (\frac{1}{x_0}, +\infty), & x_0 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ebenfalls für $\bar{t}\bar{x} = -1$ besitzt die Gleichung $\bar{x} = x(\bar{t})$ keine Lösung.

Aus (1.12) folgt

$$u(\bar{t},\bar{x}) = g\left(\frac{\bar{x}}{1+\bar{t}\bar{x}}\right) \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} \bar{x} > -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} > 0, \\ \bar{x}\,\text{beliebig}, & \bar{t} = 0, \\ \bar{x} < -\frac{1}{\bar{t}}, & \bar{t} < 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Die gefundene Lösung ist jedoch nicht für alle $(\bar{t},\bar{x}) \in \mathbb{R}^2$ definiert! Das hat weitreichende Konsequenzen.

Wir interessieren uns für Lösungen von (1.11) mit dem Anfangswert $g = 0$ für $t > 0$. Die Lösungsformel (1.13) liefert uns

$$u(t,x) = 0 \quad \text{für } x > -\frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Sei $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} h \subset [1,2]$, $\operatorname{supp} h \neq \varnothing$, beliebig. Setze

$$u(t,x) := \begin{cases} h\left(\frac{x}{1+tx}\right) & \text{für } x < -\frac{1}{t}, \quad t > 0, \\ 0 & \text{für } x \geq -\frac{1}{t}, \quad t > 0. \end{cases}$$

Wegen

$$x < -\frac{1}{t}, \quad t > 0 \Longrightarrow tx + 1 < 0 \Longrightarrow \frac{1}{tx+1} < 0 \overset{x<0}{\Longrightarrow} \frac{x}{1+tx} > 0$$

liegt der Träger von $(t,x) \mapsto h\left(\frac{x}{1+tx}\right)$ im Bereich $\{(t,x) \mid x < -\frac{1}{t}, t > 0\}$ und ist durch die Wahl von h nicht leer. Offenbar ist $u(t,x)$ eine klassische Lösung der linearen Transportgleichung mit $b(t,x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $u(0,x) = 0$. Damit besitzt die Anfangswertaufgabe unendlich viele Lösungen, da es unendlich viele $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} h \subset [1,2]$ gibt.

1.4.1. Inhomogene lineare Transportgleichung. Mit der Charakteristikenmethode kann man auch die *inhomogene* lineare Transportgleichung lösen. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t(t,x(t)) + \langle b(t,x), \nabla u(t,x)\rangle = f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.14}$$

Sei $x(t)$ eine Charakteristik. Nun gilt

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t,x(t)) = f(t,x), \\ u(0,x_0) = g(x_0). \end{cases} \tag{1.15}$$

Die Lösungen von (1.14) sind nicht mehr konstant entlang der Charakteristiken, sie können aber durch (1.15) bestimmt werden. Wir beschränken uns auf ein Beispiel.

Beispiel. $b(t,x) = x$, $f(t,x) = t$. Die Charakteristiken haben die Gestalt $x(t) = x_0 e^t$. Wir erhalten

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dt} = t \\ u(0) = g(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow u(t,x) = g(e^{-t}x) + \frac{t^2}{2}.$$

1.5. Die Burgersgleichung

Wir betrachten Funktionen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u(t,x)$. Die *Burgersgleichung*

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

ist eine nichtlineare Transportgleichung, d.h. sie gehört zu einer Klasse der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der Gestalt

$$u_t(t,x) + \langle b(t,x,u), \nabla u(t,x) \rangle = 0.$$

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe für (1.16) mit

$$u(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$. Sei $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe (1.16), (1.17). Wir suchen Charakteristiken der Differentialgleichung (1.16), d.h. die Kurven $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u(t,x) = \text{const}\}$, in der parametrischen Form

$$t = t(s), \quad x = x(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Offenbar gilt

$$0 = \frac{d}{ds} u(t(s), x(s)) = u_t(t(s), x(s))t'(s) + u_x(t(s), x(s))x'(s).$$

Diese Gleichung wird mit $t'(s) = 1$, $x'(s) = u(t(s), x(s))$ erfüllt. Wird die Charakteristik gesucht, welche bei $s = 0$ durch den Punkt $(0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} t'(s) &= 1 \\ t(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad t(s) = s$$

und

$$\left.\begin{aligned} x'(s) &= u(t(s), x(s)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} x'(s) &= g(x_0) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right.$$
$$\Longrightarrow \quad x(s) = x_0 + g(x_0)s.$$

Also ist

$$C(x_0) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = x_0 + g(x_0)t, \; t \in \mathbb{R}\}$$

die gesuchte Charakteristik. Ist die Funktion g nicht konstant, so schneiden sich diese Charakteristiken (im Unterschied zur linearen Transportgleichung, vgl. Abschnitt 1.4)!

Die Lösung der Anfangswertaufgabe (1.16), (1.17) lautet $u(t,x) = g(x_0)$, wobei x_0 der Gleichung $x = x_0 + g(x_0)t$ genügt.

Beispiel (1). Sei $g(x) = ax$ mit $a < 0$. Hier gilt also

$$x_0 = \frac{x}{1+at} \quad \Longrightarrow \quad u(t,x) = \frac{ax}{1+at} \quad \forall t \in (-\infty, |a|^{-1}).$$

Alle Charakteristiken schneiden sich zum gleichen Zeitpunkt $t = |a|^{-1} > 0$. Somit existiert keine *klassische* Lösung für $t \geq |a|^{-1}$.

Beispiel (2). Seien $\varepsilon > 0$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ monoton mit

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\varepsilon, \\ -1, & x \geq \varepsilon, \end{cases}$$

und $-1 < g(x) < 1$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Die Charakteristiken $C(-\varepsilon)$ und $C(\varepsilon)$ schneiden sich zum Zeipunkt $t = \varepsilon$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass sich für $t \in (0, \varepsilon)$ keine Charakteristiken schneiden können. Folglich gilt

$$\lim_{t \to \varepsilon} u(t,x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

Somit existiert keine *klassische* Lösung für $t \geq \varepsilon$.

Wie für die lineare Transportgleichung kann man schwache Lösung der Burgersgleichung definieren: Eine lokal integrierbare Funktion $u(t,x)$ heißt schwache Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.18}$$

mit $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, falls

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x) \right) \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{R}} dx \varphi(0,x)g(x) \end{aligned} \tag{1.19}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gilt.

Beispiel (1). Es sei

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Man kann nun zeigen, dass

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 0, & x < t/2, \\ 1, & x \geq t/2, \end{cases}$$

$$u_2(t,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/t, & 0 \leq x < t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases} \qquad \text{(Verdünnungswelle)}$$

und

$$u_3(t,x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha t/2, \\ \alpha, & \alpha t/2 \leq x < (1+\alpha)t/2, \\ 1, & x \geq (1+\alpha)t/2, \end{cases} \qquad \alpha \in (0,1],$$

schwache Lösungen der Anfangswertaufgabe (1.18) sind.

Beispiel (2). Es sei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 1, & x < t/2, \\ 0, & x \geq t/2, \end{cases} \qquad \text{(Stoß- oder Schockwelle)}$$

eine schwache Lösung der Anfangswertaufgabe (1.18) ist.

Wir diskurieren nun stückweise stetig differenzierbare schwache Lösungen der Burgersgleichung. Es wird nun ein allgemeines Resultat bewiesen, das uns ermöglicht sehr leicht zu überprüfen, dass die Funktionen aus Beispielen (1), (2) tatsächlich schwache Lösungen der Anfangswertaufgabe (1.18) sind. Wir beschränken uns auf den Fall, wenn es genau eine Kurve im (t,x)-Raum gibt, wo die Lösung nicht stetig differenzierbar ist. Duie Verallgemeinerung auf den Fall endlich vieler derartiger Kurven stellt keine Schwierigkeit dar.

Wir beginnen mit einem Lemma. Sei $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$.

LEMMA 1.8. *Sei*

$$\gamma := \{(t,x) \,|\, x = \psi(t), t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}, \quad \psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}),$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

(a) Ist $u(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, *eine schwache beschränkte Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung mit* $u \in C^1\left((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma\right)$ *und es existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$u_\mp(t) := \lim_{x \to \psi(t) \mp 0} u(t,x)$$

auf γ, *so gilt:*

(1) *In* $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma$ *erfüllt* $u(t,x)$ *die Burgersgleichung im klassischen Sinne, d.h.*

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0 \quad \textit{für alle} \quad (t,x) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma,$$

und

$$\lim_{t \to 0+} u(t,x) = g(x)$$

für alle $x \neq \psi(0)$.

(2) *Für alle* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *gilt*

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u_-(t)^2 - u_+(t))^2\right) \varphi(t,\psi(t))dt$$
$$= \int_0^\infty \left(u_-(t) - u_+(t)\right) \psi'(t)\varphi(t,\psi(t))dt.$$

(b) Umgekehrt, gelten (1) und (2) für eine beschränkte Funktion $u \in C^1\big((\mathbb{R}_+ \times\mathbb{R}) \setminus \gamma\big)$ *mit Grenzwerten* $u_\mp(t)$ *auf* γ, *so ist* $u(t,x)$ *eine schwache Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung* (1.18).

BEWEIS. (a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma$ beliebig. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(0,x)g(x)dx = 0$$

und

$$0 = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x)\right)$$
$$= -\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx \left(u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x)\right)\varphi(t,x).$$

Nach Lemma A.6 gilt $u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0$.

Nun sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \cap \gamma = \emptyset$ und $\operatorname{supp}\varphi \cap \{(t,x)|t = 0, \quad x \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} dx\varphi(0,x)g(x) &= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x)\right) \\
&= \underbrace{-\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx \left(u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x)\right)\varphi(t,x)}_{=0} \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}} dx\varphi(0,x)u(0+,x).
\end{aligned}$$

Mit Lemma A.6 folgt daraus, dass $u(0+,x) = g(x)$. Somit ist (1) bewiesen.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Mit der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} u(t,x)^2\varphi_x(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\psi(t)} u(t,x)^2\varphi_x(t,x)dx + \int_{\psi(t)}^\infty u(t,x)^2\varphi_x(t,x)dx \\
&= u_-(t)^2\varphi(t,\psi(t)) - u_+(t)^2\varphi(t,\psi(t)) \\
&- 2\int_{-\infty}^{\psi(t)} u(t,x)u_x(t,x)\varphi(t,x)dx - 2\int_{\psi(t)}^\infty u(t,x)u_x(t,x)\varphi(t,x)dx \\
&= u_-(t)^2\varphi(t,\psi(t)) - u_+(t)^2\varphi(t,\psi(t)) \\
&+ 2\int_{-\infty}^{\psi(t)} u_t(t,x)\varphi(t,x)dx + 2\int_{\psi(t)}^\infty u_t(t,x)\varphi(t,x)dx.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}u_-(t))^2\varphi(t,\psi(t)) - \frac{1}{2}u_+(t)^2\varphi(t,\psi(t)) \\
&+ \int_{-\infty}^{\psi(t)} \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + u_t(t,x)\varphi(t,x)\right) dx \\
&+ \int_{\psi(t)}^\infty \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + u_t(t,x)\varphi(t,x)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}u_-(t)^2\varphi(t,\psi(t)) - \frac{1}{2}u_+(t)^2\varphi(t,\psi(t)) \\
&+ \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\psi(t)} u(t,x)\varphi(t,x)dx + \frac{d}{dt}\int_{\psi(t)}^\infty u(t,x)\varphi(t,x)dx \\
&- u_-(t)\varphi(t,\psi(t))\psi'(t) + u_+(t)\varphi(t,\psi(t))\psi'(t).
\end{aligned}$$

Die Integration bezüglich der Zeit $t \geq 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x)\right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(u_-(t)^2 - u_+(t)^2\right)\varphi(t,\psi(t))dt \\
&- \int_0^\infty \left(u_-(t) - u_+(t)\right)\varphi(t,\psi(t))\psi'(t)dt \\
&- \int_{\mathbb{R}} u(0,x)\varphi(0,x)dx.
\end{aligned}$$

Also folgt aus (1.19)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u_-(t)^2 - u_+(t)^2\right)\varphi(t,\psi(t))dt \\
&\quad = \int_0^\infty \left(u_-(t) - u_+(t)\right)\psi'(t)\varphi(t,\psi(t))dt.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Somit ist (2) bewiesen.

(b) selbst! □

Hier ist die erste einfache Folgerung von Lemma 1.8: Eine Funktion $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap C^1((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma)$$

ist genau dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung, wenn $u(t,x)$ eine klassische Lösung der Burgersgleichung in $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma$ ist und $u(0+,x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\psi(0)\}$.

Die zweite Folgerung ist weniger einfach.

SATZ 1.9. *Sei*

$$\gamma := \{(t,x) \mid x = \psi(t), t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}, \quad \psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}),$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

(a) Ist $u(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, *eine schwache beschränkte Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung mit* $u \in C^1\left((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma\right)$ *und es existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$u_\mp(t) := \lim_{x \to \psi(t) \mp 0} u(t,x)$$

auf γ*, so gilt:*

(1) *In* $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma$ *erfüllt* $u(t,x)$ *die Burgersgleichung im klassischen Sinne, d.h.*

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0 \quad \text{für alle} \quad (t,x) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma,$$

und

$$\lim_{t \to 0+} u(t,x) = g(x)$$

für alle $x \neq \psi(0)$.

(2) *Für alle* $t \geq 0$ *erfüllt* $\psi(t)$ *die* Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\psi'(t) = \frac{F(u_-(t)) - F(u_+(t))}{u_-(t) - u_+(t)}, \qquad F(u) := \frac{1}{2}u^2.$$

(b) Umgekehrt, gelten (1) und (2) für eine beschränkte Funktion $u \in C^1\left((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \gamma\right)$ *mit Grenzwerten* $u_\mp(t)$ *auf* γ*, so ist* $u(t,x)$ *eine schwache Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung (1.18).*

BEWEIS. (a) Nach Lemma 1.8 gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u_-(t)^2 - u_+(t)^2\right)\varphi(t,\psi(t))dt \\
&\quad = \int_0^\infty \left(u_-(t) - u_+(t)\right)\psi'(t)\varphi(t,\psi(t))dt.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

BEHAUPTUNG: Sei $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ beliebig. Dann existiert ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ so, dass

$$\alpha(t) = \varphi(t, \psi(t))$$

für alle $t \geq 0$.

BEWEIS. Es genügt die Funktion $\varphi(t,x)$ nur für $t \geq 0$ zu konstruieren. Sei $t_0 > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} \alpha \subset [-t_0, t_0]$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi_\varepsilon(x) = 1$ für alle $|x| < \varepsilon$ und $\chi_\varepsilon(x) = 0$ für alle $|x| > 2\varepsilon$. Wähle ein $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit

$$\sup_{t \in [0,t_0]} |\psi(t) - \psi_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

und setze

$$\varphi(t,x) := \alpha(t)\chi_\varepsilon(x - \psi_\varepsilon(t)), \quad t \geq 0.$$

Dann gilt $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und

$$\varphi(t, \psi(t)) = \alpha(t)\chi_\varepsilon(\psi(t) - \psi_\varepsilon(t)) = \alpha(t).$$

$\boxed{\text{B}}$

Mit der Behauptung folgt aus (1.20), dass

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u_-(t)^2 - u_+(t)^2\right) \alpha(t)dt$$
$$= \int_0^\infty \left(u_-(t) - u_+(t)\right) \psi'(t)\alpha(t)dt$$

für alle $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Nach Lemma A.6 ist somit

$$\frac{1}{2}\left(u_-(t)^2 - u_+(t)^2\right) = \left(u_-(t)) - u_+(t)\right)\psi'(t)$$

für fast alle $t \geq 0$. Da die beiden Seiten steig sind, gilt diese Ungleichung für *alle* $t \geq 0$. □

1.6. Die Entropielösung

Wir haben bereits gesehen, dass Anfangswertaufgaben für die Burgersgleichung im Allgemainen mehrere Lösungen besitzen.

DEFINITION 1.10. *Eine schawache Lösung $u(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, der Anfangswertaufgbe für die Burgersgleichung heißt* Entropielösung, *wenn sie die* Entropiebedingung *erfüllt*

$$u(t, x+z) - u(t,x) \leq \frac{z}{t} \qquad \textit{für alle} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, z > 0. \tag{1.22}$$

SATZ 1.11. *Sei $u(t,x)$ eine Entropielösung der Burgersgleichung. Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine C^1-Kurve*

$$\gamma = \{(t,x) | x = \psi(t)\}, \qquad \psi \in C^1(\mathbb{R}_+).$$

Dann gilt

(a) Für alle $t > 0$ existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von u

$$u_\pm(t) := \lim_{x \to \psi(t) \mp 0} u(t,x).$$

(b) Ist die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt, so gilt

$$\frac{F(u_-(t)) - F(v)}{u_-(t) - v} \geq \psi'(t) \geq \frac{F(u_+(t)) - F(v)}{u_+(t) - v}, \quad F(u) := \frac{1}{2}u^2, \tag{1.23}$$

für alle $t > 0$ und v echt zwischen $u_-(t)$ und $u_+(t)$.

Ungleichung (1.23) wird ebenfalls als Entropiebedingung bezeichnet.

In Beispiel (1) nach Gleichung (1.19) erfüllt nur die Funktion u_2 die Entropiebedingung (1.23) und in Beispiel (2) dort die Funktion u_1 (Übung!).

Beweis. Aus (1.22) folgt, dass die Funktion

$$x \mapsto u(t,x) - \frac{x}{t}$$

für jedes $t > 0$ monoton fallend ist, denn

$$u(t, x+z) - \frac{x+z}{t} - u(t,x) + \frac{x}{t} = u(t,x+z) - u(t,x) - \frac{z}{t} \leq 0.$$

Behauptung. Jede monotone Funktion besitzt die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 nicht stetig. Die Menge $\{f(x) | x < x_0\}$ ist nach oben beschränkt. Sei $A = \sup_{x<x_0} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $A - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \leq A$. Folglich gilt $f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq A$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Dann ist

$$A - f(x) \leq A - f(x_0 - \delta) < A - (A - \varepsilon) = \varepsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, d.h. $f(x_0 - 0) = A$. $\boxed{\text{B}}$

Nach der Behauptung besitzt die Funktion $x \mapsto u(t,x)$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte auf γ mit $u_-(t) \geq u_+(t)$ für alle $t > 0$. Aus der Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{\frac{1}{2}u_-(t)^2 - \frac{1}{2}u_+(t)^2}{u_-(t) - u_+(t)} \\ &= \frac{1}{2}\left(u_-(t) + u_+(t)\right)\end{aligned}$$

folgt nun, dass

$$\frac{1}{2}\left(u_-(t) + v\right) \geq \psi'(t) \geq \frac{1}{2}\left(u_+(t) + v\right)$$

für alle $v \in (u_+(t), u_-(t))$. □

Unter gewißen Voraussetzungen gilt auch die Umkehrung von Satz 1.11: (1.23) impliziert die Entropiebedingung (1.22).

Satz 1.12. *Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann existiert genau eine schwache Lösung der Anfangswertaufgabe für die Burgersgleichung, die die Entropiebedingung erfüllt.*

Die Existenzaussage ist als Satz von Lax-Oleinik bekannt, die Eindeutigkeitsaussage als Satz von Kruzhkov. Wir beschäftigen uns mit der Existenz und werden den folgenden Satz beweisen.

SATZ 1.13. *Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

(a) Sei $t > 0$ beliebig. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es einen eindeutigen Punkt $y(t,x)$ so, dass

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) \right\} = \frac{(x-y(x,t))^2}{2t} + h(y(x,t))$$

mit $h(y) = \int_0^y g(x)dx$.

(b) $x \mapsto y(x,t)$ ist monoton steigend.

(c) Für jedes $t > 0$ und fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) \right\} = \frac{x-y(x,t)}{t}.$$

(d) Die Funktion

$$u(t,x) = \frac{x-y(x,t)}{t}$$

ist eine schawache Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(0,x) = g(x), \end{cases}$$

die die Entropiebedingung (1.22) erfüllt.

BEWEIS. Seien $x_1 \in \mathbb{R}$, $t > 0$ beliebig.

BEHAUPTUNG 1. Es gibt ein $y_1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\} = \frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + h(y_1).$$

BEWEIS. Offenbar gilt

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\} \overset{y=x_1}{\leq} h(x_1).$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion

$$y \mapsto \left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\}$$

und

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\} = +\infty$$

gibt es ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $x_1 \in I$, sodass

$$\left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\} > h(x_1)$$

für alle $y \in \mathbb{R} \setminus I$. Nach dem Satz von Weierstraß gibt es ein $y_1 \in I$ mit

$$\min_{y\in I} \left\{ \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y) \right\} = \frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + h(y_1) \leq h(x_1).$$

B1

BEHAUPTUNG 2. Seien $x_1 < x_2$ beliebig, y_1 wie oben. Dann gilt:

$$\frac{(x_2-y_1)^2}{2t} + h(y_1) < \frac{(x_2-y)^2}{2t} + h(y)$$

für alle $y < y_1$.

BEWEIS. Sei

$$\tau = \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y}.$$

Offenbar ist $0 < \tau < 1$. Es gilt

$$x_2 - y_1 = \tau(x_1 - y_1) + (1-\tau)(x_2 - y)$$

und

$$x_1 - y = (1-\tau)(x_1 - y_1) + \tau(x_2 - y).$$

Folglich ist

$$\frac{(x_2-y_1)^2}{2t} < \tau\frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + (1-\tau)\frac{(x_2-y)^2}{2t}$$

und

$$\frac{(x_1-y)^2}{2t} < (1-\tau)\frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + \tau\frac{(x_2-y)^2}{2t}.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, so erhält man:

$$\frac{(x_2-y_1)^2}{2t} + \frac{(x_1-y)^2}{2t} < \frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + \frac{(x_2-y)^2}{2t}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}&\frac{(x_2-y_1)^2}{2t} + \frac{(x_1-y)^2}{2t} + h(y_1) + h(y)\\ &< \underbrace{\frac{(x_1-y_1)^2}{2t} + h(y_1)}_{\leq \frac{(x_1-y)^2}{2t}+h(y) \quad \text{nach Behauptung 1}} + \frac{(x_2-y)^2}{2t} + h(y),\end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{(x_2-y_1)^2}{2t} + h(y_1) < \frac{(x_2-y)^2}{2t} + h(y).$$

$\boxed{\text{B2}}$

Nach Behauptung 2 nimmt die Funktion $y \mapsto \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y)$ ihr Minumum für $y \geq y_1$ an. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $t > 0$ sei $y(t,x)$ die kleinste Zahl, sodass

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\left\{\frac{(x-y)^2}{2t} + h(y)\right\} = \left(\frac{(x-y)^2}{2t} + h(y)\right)\Bigg|_{y=y(t,x)}.$$

BEHAUPTUNG 3. Die Funktion $x \mapsto y(t,x)$ ist monoton wachsend.

BEWEIS. Sei $x_1 < x_2$. Angenommen, es wäre $y(t,x_1) > y(t,x_2)$. In Behauptung 2 setze $y = y(t,x_2)$, $y_1 = y(t,x_1)$. Folglich liefert $y = y_1$ den kleineren Funktionenwert von $\dfrac{(x_2-y)^2}{2t} + h(y)$ als $y = y(t,x_2)$. Widerspruch!

$\boxed{\text{B3}}$

BEHAUPTUNG 4. Eine monoton wachsende Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

BEWEIS. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $v(x-0) < v(x+0)$ sei α_x eine rationale Zahl mit

$$v(x-0) < \alpha_x < v(x+0).$$

Die Menge $\{\alpha_x \in \mathbb{Q} | x \in \mathbb{R}\}$ ist höchstens abzählbar. $\boxed{\text{B4}}$

BEHAUPTUNG 5. Jede monoton wachsende Funktion ist fast überall differenzierbar. Die Ableitung u' ist messbar. (Ohne Beweis.)

Aus Behauptungen 3 und 5 folgt, dass die Funktion $x \mapsto y(t,x)$ für jedes $t > 0$ fast überall differenzierbar ist. Da die Funktion h differenzierbar ist, ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} x \mapsto w(t,x) &:= \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) \right\} \\ &= \frac{(x-y(t,x))^2}{2t} + h(y(t,x)) \end{aligned}$$

fast überall differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = \frac{x - y(t,x)}{t} \left(1 - \frac{\partial y(t,x)}{\partial x}\right) + \frac{\partial h(y(t,x))}{\partial x}. \tag{1.24}$$

Da der Wert der Funktion $y \mapsto \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y)$ sein Minimum für $y = y(t,x)$ erreicht, nimmt die Funktion

$$z \mapsto \frac{(x-y(t,z))^2}{2t} + h(y(t,z))$$

ihr Minimum für $z = x$ an. Ist die Funktion $z \mapsto y(t,z)$ im Punkt $z = x$ differenzierbar, so gilt

$$-\frac{x-y(t,x)}{t}\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial h(y(t,x))}{\partial x} = 0.$$

Somit folgt aus (1.24)

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = \frac{x-y(t,x)}{t} \tag{1.25}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Als nächstes zeigen wir die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der Variable x. Nach dem Satz von Rademacher (s. Behauptung 9 unten) imliziert das die fast überall Differinzierbarkeit von $x \mapsto w(t,x)$, die wir bereits kennen.

BEHAUPTUNG 6. Für jedes $t > 0$ ist die Funktion $x \mapsto w(t,x)$

$$\begin{aligned} x \mapsto w(t,x) &:= \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) \right\} \\ &= \frac{(x-y(t,x))^2}{2t} + h(y(t,x)) \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine (unabhängige von t) Konstante $L > 0$, sodass

$$|w(t,x) - w(t,x')| \leq L|x - x'| \qquad \text{für alle} \quad x, x' \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Seien $x, x' \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle ein $y \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) = \min_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z) \right\}.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
w(t,x') - w(t,x) &= \underbrace{\min_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x'-z)^2}{2t} + h(z) \right\}}_{\leq \frac{(x'-(x'-x+y))^2}{2t} + h(x'-x+y)} - \frac{(x-y)^2}{2t} - h(y) \\
&\leq h(x'-x+y) - h(y) = \int_y^{x'-x+y} g(z)dz \\
&\leq \left| \int_y^{x'-x+y} g(z)dz \right| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |x'-x|.
\end{aligned}$$

Das Vertauschen von x und x' liefert die Abschätzung

$$w(t,x) - w(t,x') \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |x'-x|,$$

also ist

$$|w(t,x) - w(t,x')| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |x'-x|.$$

$\boxed{\text{B5}}$

Behauptung 7. Sei $0 < s < t$ beliebig. Dann gilt

$$w(t,x) = \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + w(s,y) \right\}.$$

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst, dass

$$w(t,x) \leq \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + w(s,y) \right\}.$$

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle ein $z \in \mathbb{R}$ so, dass

$$w(s,y) = \frac{(y-z)^2}{2s} + h(z).$$

Wir stellen $\frac{x-z}{t}$ als

$$\frac{x-z}{t} = \left(1 - \frac{s}{t}\right) \frac{x-y}{t-s} + \frac{s}{t} \frac{y-z}{s}$$

dar. Bemerke, dass

$$0 < \left(1 - \frac{s}{t}\right), \frac{s}{t} < 1 \qquad \text{und} \qquad \left(1 - \frac{s}{t}\right) + \frac{s}{t} = 1.$$

Wegen der Konvexität der Funktion $w \mapsto w^2/2$ erhalten wir

$$\frac{(x-z)^2}{2t^2} \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right) \frac{(x-y)^2}{2(t-s)^2} + \frac{s}{t} \frac{(y-z)^2}{2s^2}.$$

Aus der Definition der Funktion $w(t,x)$ folgt nun:

$$\begin{aligned} w(t,x) &\le \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z) = t\frac{(x-z)^2}{2t^2} + h(z) \\ &\le (t-s)\frac{(x-y)^2}{2(t-s)^2} + s\frac{(y-z)^2}{2s^2} + h(z) \\ &= \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + \underbrace{\frac{(y-z)^2}{2s} + h(z)}_{=w(s,y)} \\ &= \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + w(s,y). \end{aligned}$$

(2) Nun wähle ein $z \in \mathbb{R}$ so, dass

$$w(t,x) = \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z). \tag{1.26}$$

Setze

$$y := \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right) z.$$

Nach der Definition der Funktion $w(t,x)$ gilt

$$w(s,y) \le \frac{(y-z)^2}{2s} + h(z). \tag{1.27}$$

Dann ist

$$x - y = \left(1-\frac{s}{t}\right)x - \left(1 - \frac{s}{t}\right)z = \frac{t-s}{t}(x-z)$$

und

$$y - z = \frac{s}{t}(x-z).$$

Kombiniert man diese Gleichungen, so erhält man

$$\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}.$$

Unter Verwendung dieses Resultats sowie (1.26) und (1.27) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + w(s,y) &= (t-s)\frac{(x-y)^2}{2(t-s)^2} + w(t,y) \\ &\le (t-s)\frac{(x-z)^2}{2t^2} + \frac{(y-z)^2}{2s} + h(z) \\ &= \frac{(x-z)^2}{2t} - s\underbrace{\frac{(x-z)^2}{2t^2}}_{=\frac{(y-z)^2}{2s^2}} + \frac{(y-z)^2}{2s} + h(z) \\ &= \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z) = w(t,x). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} + w(s,y) \right\} \le w(t,x).$$

$\boxed{\text{B8}}$

BEHAUPTUNG 8. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto w(t,x)$ ist Lipschitz-stetig und genügt $\lim_{t \to 0+} w(t,x) = h(x)$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere ist die Funktion $t \mapsto w(t,x)$ nach dem Satz von Rademacher (Behauptung 9 unten) fast überall differenzierbar.

BEWEIS. Die Wahl $y = x$ in der Definition der Funktion $w(t,x)$,

$$w(t,x) := \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(y) \right\},$$

liefert die Abschätzung $x(t,x) \leq h(x)$. Da die Funktion h Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $L = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ist, gilt die Anschätzung

$$h(y) - h(x) \geq -\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|x-y|.$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} w(t,x) \geq& \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + h(x) - \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|x-y| \right\} \\ =& h(x) + \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} - \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|x-y| \right\} \\ \overset{z=\frac{x-y}{t}}{=}& h(x) - t \underbrace{\max_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|z| - \frac{z^2}{2} \right\}}_{=:C_1>0}. \end{aligned}$$

Also ist $h(x) \geq w(t,x) \geq h(x) - tC_1$ und folglich

$$|w(t,x) - h(x)| \leq tC_1,$$

d.h. $\lim_{t \to 0+} w(t,x) = h(x)$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$.

Seien nun s, t mit $0 < s < t$ beliebig. Nach Bechauptung 5 ist

$$w(s,y) - w(s,x) \geq -L|x-y|$$

für ein $L > 0$. Aus Behauptung 7 folgt $w(t,x) \leq w(s,x)$ und

$$\begin{aligned} w(t,x) \geq& w(s,x) + \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ -L|x-y| + \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} \right\} \\ \overset{z=\frac{x-y}{t}}{=}& w(s,x) - (t-s) \underbrace{\max_{z \in \mathbb{R}} \left\{ L|z| - \frac{z^2}{2} \right\}}_{=:C_2>0}. \end{aligned}$$

Also ist $w(t,x) \geq w(s,x) \geq w(t,x) - (t-s)C_2$ und folglich

$$|w(t,x) - w(s,x)| \leq (t-s)C_2,$$

d.h. $t \mapsto w(t,x)$ ist Lipschitz-stetig. $\boxed{\text{B9}}$

BEHAUPTUNG 9 (SATZ VON RADEMACHER). Eine Lipschitz-stetige Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist fast überall differenzierbar. (Ohne Beweis.)

Nach Behauptungen 6 und 8 ist die Funktion $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig:

$$\begin{aligned}|w(t,x) - w(t',x')| &\leq |w(t,x) - w(t,x')| + |w(t,x') - w(t',x')| \\ &\leq L|x-x'| + C_2|t-t'| \\ &\leq \max\{L, C_2\}(|x-x'| + |t-t'|).\end{aligned}$$

Nach Behauptung 6 ist $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fast überall differenzierbar.

Behauptung 10. Sei $w(t,x)$ in einem Punkt $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung heißt *Hamilton-Jacobi-Gleichung*.

Beweis. (1) Seien $r > 0$, $q \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach Behauptung 8 ist

$$w(t+r, x+rq) = \min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{(x+rq-y)}{2r} + w(t,y) \right\} \stackrel{y=x}{\leq} r\frac{q^2}{2} + w(t,x).$$

Folglich gilt

$$\frac{w(t+r,x+rq) - w(t,x)}{r} \leq \frac{q^2}{2}.$$

Im Grenzfall $r \to 0$ erhält man

$$q\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} \leq \frac{q^2}{2}.$$

Wählt man nun $q = \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial x}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} \leq 0.$$

(2) Wähle $z \in \mathbb{R}$ so, dass

$$w(t,x) = \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z).$$

Sei $r > 0$ beliebig. Setze $s = t - r$,

$$y = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)z.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass

$$\frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}w(t,x) - w(s,y) &\geq \frac{(x-z)^2}{2t} + h(z) - \frac{(y-z)^2}{2s} - h(z) \\ &= (t-s)\frac{(x-z)^2}{2t^2}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{r}\left(w(t,x) - w\left(t-r, \left(1-\frac{r}{t}\right)x + \frac{r}{t}x\right)\right) \geq \frac{(x-z)^2}{2t^2}.$$

Im Grenzfall $r \to 0$ erhält man

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \frac{x-z}{t}\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} \geq \frac{(x-z)^2}{2t^2}.$$

Wegen

$$\frac{\alpha^2}{2} = \max_{q\in\mathbb{R}}\left(\alpha q - \frac{q^2}{2}\right).$$

folgt aus dem letzten Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)^2 \\
=&\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \max_{q\in\mathbb{R}}\left(q\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{q^2}{2}\right) \\
\overset{q=\frac{x-z}{t}}{\geq}&\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \frac{x-z}{t}\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{(x-z)^2}{2t^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B10}}$

Behauptung 11. Die Funktion $u(t,x) := \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial x}$ erfüllt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u(t,x)^2\varphi_x(t,x)\right) dxdt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(0,x)dx
\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Beweis. Nach Behauptung 10 gilt

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)^2 = 0$$

für fast alle $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Multipliziert man diese Ungleichung mit $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ und integriert bezüglich t und x, so erhält man

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)^2}_{=u(t,x)^2} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} dxdt = 0.$$

Die partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} dxdt &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w(t,x)\frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t \partial x} dxdt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} w(t,x)\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} dx\bigg|_{t=0} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}}_{=u(t,x)} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} dxdt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w(0+,x)}{\partial x}\varphi(0,x)dx.
\end{aligned}$$

Nach Behauptung 8 koneveriert $w(t,x)$ gleichmäßig gegen $h(x)$ füt $t \to 0+$. Da die Funktion h fast überall differenzierbar mit der Ableitung g, gilt

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = g(x)$$

fast überall. $\boxed{\text{B11}}$

BEHAUPTUNG 12. Es gilt:

$$u(t,x+z) - u(t,x) \leq \frac{z}{t}$$

für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$.

BEWEIS. Nach (1.25) und Behauptung 3 gilt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{x - y(t,x)}{t} \overset{z>0}{\geq} \frac{x - y(t,x+z)}{t} \\ &= \frac{x + z - y(t,x+z)}{t} - \frac{z}{t} = u(t,x+z) - \frac{z}{t}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B12}}$

□

KAPITEL 2

Die Laplacegleichung

Die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Laplacegleichung*. Ein $u \in C^2(\Omega)$, welches dieser Gleichung genügt, bezeichnet man als klassische Lösung und nennt eine solche Funktion *harmonisch*. Die zugehörige inhomogene Gleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

heißt *Poissongleichung*.

2.1. Die Fundamentallösung

Wir suchen eine radialsymmetrische (klassische) Lösung der Laplacegleichung, d.h. eine Lösung der Form $u(x) = v(r)$ mit $r := |x|$. Wegen

$$\frac{dr}{dx_i} = \frac{x_i}{r}, \quad x \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r)\frac{x_i}{r}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = v''(r)\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\ &= v''(r) + v'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right) = v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

Also gilt $\Delta u(x) = 0$ mit $u(x) = v(r)$ genau dann, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

erfüllt ist. Mit der Substitution $w = v'$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $w' + \frac{n-1}{r}w = 0$, deren allgemeine Lösung gegeben ist durch $w(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Also ist

$$v(r) = a\int \frac{dr}{r^{n-1}} = \begin{cases} a\log r + c, & n = 2, \\ \frac{a}{2-n}\frac{1}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3, \end{cases}$$

mit $a, c \in \mathbb{R}$.

DEFINITION 2.1. *Die Funktion* $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)V_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{2.2}$$

heißt Fundamentallösung *der Laplacegleichung. Hier ist*

$$V_n := |B_1^n(0)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

das Volumen der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum.

Wie die obige Rechnung zeigt, ist die Fundamentallösung Φ harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

BEMERKUNG: nV_n ist der Oberflächeninhalt der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum, d.h. $nV_n = |\partial B_1^n(0)|$.

SATZ 2.2. *Sei* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. *Definiere*

$$u(x) := -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy = -\Phi * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Dann gilt

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$,
(b) $\Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n$.

BEMERKUNGEN:

(1) Der Satz beinhaltet keine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung der Poissongleichung. Diesen Aspekt werden wir später studieren (vgl. Korollar 2.25).
(2) Das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$$
konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist u in (2.3) wohldefiniert.

BEWEIS. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da f nach Voraussetzung einen kompakten Träger besitzt, finden wir ein $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp} f \subset B_R(x)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} | \Phi(x-y)| \cdot |f(y)| dy \\ &= \int_{B_R(x)} |\Phi(x-y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{B_R(x)} |\Phi(x-y)| dy \\ &\overset{z=x-y}{=} \max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{B_R(0)} |\Phi(z)| dz. \end{aligned}$$

Im Fall $n = 2$ erhalten wir unter Zuhilfenahme von Polarkoordinaten

$$\int_{B_R(0)} |\Phi(z)| dz = \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(0)} |\log |z|| \, dz = \int_0^R r |\log r| dr$$

und der letzte Ausdruck ist endlich, da der Integrand in 0 stetig fortgesetzt werden kann, wie man zum Beispiel mit der Regel von L'Hospital zeigt. Im Fall $n \geq 3$ erhalten wir

$$\int_{B_R(0)} |\Phi(z)| dz = \frac{1}{n(n-2)V_n} \int_{B_R(0)} \frac{dz}{|z|^{n-2}} < \infty,$$

da die Potenz im Nenner kleiner ist als die Raumdimension. □

(3) Da die Fundamentallösung überall außer in einem Punkt und somit fast überall definiert ist, können wir sie dem soeben gesehenen Beweis entsprechend als Element aus $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ auffassen.

(4) Satz 2.2 bleibt richtig unter schwächeren Voraussetzungen an den inhomogenen Term f. Es genügt zu verlangen, dass f kompakten Träger hat und Hölder-stetig ist, d.h. dass für ein $s \in (0,1)$ eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^s, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Auch dann ist die Funktion u aus (2.3) zweimal stetig differenzierbar und genügt der Poissongleichung. Dabei sind die zweiten Ableitungen von u Hölder-stetig mit demselben Exponenten. Unter der noch schwächeren Voraussetzung $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ist (2.3) im Allgemeinen keine klassische Lösung der Poissongleichung, $u \notin C^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis von Satz 2.2. (a) Die Faltung ist kommutativ (Transformationsformel!), d.h. es gilt

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $R > 0$ so gewählt, dass $\operatorname{supp} f \subset B_R(x_0)$, so lassen sich die partiellen Ableitungen des Integranden in $B_\varepsilon(x_0)$ für alle $|\alpha| \leq 2$ abschätzen durch

$$|D_x^\alpha \Phi(y) f(x_0 - y)| \leq \Phi(y) \chi_{B_R(x_0)}(y) \sup_{z \in B_R(x_0)} |D^\alpha f(z)|,$$

sie sind also allesamt durch eine wegen $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $\Phi \in L^1_{\text{loc}}$ integrierbare Funktion majorisiert. Mit majorisierter Konvergenz (vgl. Lemma A.7) folgt nun bereits (a), wobei

$$D^\alpha u(x_0) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) D_x^\alpha f(x_0 - y) dy.$$

(b) Für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist nun

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\
&= -\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$|I_\varepsilon| \leq \sup_{y \in B_\varepsilon(0)} |\Delta_x f(x-y)| \int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| dy \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0,$$

denn der vordere Faktor ist wegen $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und wie in der Bemerkung vorm Beweis gesehen ist Φ über Kugeln um den Ursprung integrierbar. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \underbrace{\Delta_x f(x-y)}_{=\Delta_y f(x-y)} dy \\
&\overset{\text{Green}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \langle \nabla_y \Phi(y), \nabla_y f(x-y) \rangle dy - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \frac{\partial f(x-y)}{\partial \nu(y)} d\sigma(y) \\
&=: K_\varepsilon - L_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Greensche Formel ist hier anwendbar, da wegen $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ effektiv nur über eine Kugel integriert wird, wobei das Integral über den äußeren Rand verschwindet, da f selbst dort verschwindet. Es bezeichnet $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Normalenableitung, d.h.

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial \nu(y)} = \langle \nabla_y f(x-y), \nu(y) \rangle,$$

wobei $\nu(y)$ der Normaleneinheitsvektor ist, der senkrecht auf $\partial B_\varepsilon(0)$ im Punkt y steht und nach außen bzgl. $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ zeigt, d.h. $y + t\nu(y) \notin \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ für alle hinreichend kleinen $t > 0$ (vg. Anhang). In diesem Fall zeigt $\nu(y)$ in Richtung des Ursprungs. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\left| \frac{\partial f(x-y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq |\nabla f(x-y)| \leq C \quad \forall x, y, \in \mathbb{R}^n$$

für ein $C > 0$, denn $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Daher ist

$$\begin{aligned}
|L_\varepsilon| &\leq C \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| d\sigma(y) \\
&= \begin{cases} \frac{C}{2\pi} |\log \varepsilon| \varepsilon |\partial B_\varepsilon(0)| = C\varepsilon |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ \frac{C}{n(n-2)V_n} \varepsilon^{2-n} |\partial B_\varepsilon(0)| = \frac{C}{n(n-2)V_n} \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} n V_n = \frac{C\varepsilon}{n-2}, & n \geq 3, \end{cases}
\end{aligned}$$

insgesamt gilt folglich $L_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$. Nun betrachte

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \langle \nabla_y \Phi(y), \nabla_y f(x-y) \rangle dy \\
&\overset{\text{Green}}{=} -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \underbrace{\Delta \Phi(y)}_{=0} f(x-y) dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Zur Benutzung der Greenschen Formel gilt dasselbe wie oben. Um die normale Ableitung von Φ zu bestimmen, errechnen wir

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi(y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y|} \frac{y}{|y|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{|y|^2}, \quad n = 2, \\
\nabla \Phi(y) &= -\frac{1}{n(n-2)V_n} \frac{n-2}{|y|^{n-1}} \frac{y}{|y|} = -\frac{1}{nV_n} \frac{y}{|y|^n}, \quad n \geq 3,
\end{aligned}$$

also

$$\nabla \Phi(y) = -\frac{1}{nV_n} \frac{y}{|y|^n} \quad \forall n \geq 2. \tag{2.4}$$

Für jeden Punkt $y \in \partial B_\varepsilon(0)$ folgt wegen $\nu(y) = -\frac{y}{|y|}$ nun

$$\frac{\partial \Phi(y)}{\partial \nu(y)} = \left\langle -\frac{1}{nV_n}\frac{y}{|y|^n}, -\frac{y}{|y|} \right\rangle = \frac{1}{nV_n}\frac{|y|^2}{|y|^{n+1}} = \frac{1}{nV_n}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \frac{1}{nV_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)d\sigma(y) \\ &\overset{x-y=z}{=} \frac{1}{nV_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)d\sigma(z) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{Lemma A.8}} f(x). \end{aligned}$$

Unterm Strich haben wir nun gezeigt, dass

$$\Delta u(x) = I_\varepsilon + J_\varepsilon$$

gilt mit $I_\varepsilon \to 0$ und $J_\varepsilon \to f(x)$. Die linke Seite hängt aber von ε nicht ab, weswegen $\Delta u(x) = f(x)$ ist. $\square$

2.2. Distributionen

Unter $C_0^\infty(\Omega)$ verstehen wir die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$.

Definition 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Als* Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\Omega)$ *bezeichnen wir die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ ausgestattet mit der folgenden Konvergenz: Für $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}$ gelte $\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$, falls es ein Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ $\forall j \in \mathbb{N}$ und*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} \left| D^\alpha(\varphi_j(x) - \varphi(x)) \right| = 0$$

(d.h. $D^\alpha\varphi_j \overset{glm.}{\to} D^\alpha\varphi$) für alle Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$.

Offensichtlich ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 2.4. *Die Menge*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K} \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

heißt Raum der Distributionen über Ω. *Ausführlicher: Ein lineares Funktional $T : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ heißt* Distribution, *wenn $T(\varphi_j) \to 0$ für jede Folge $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}$ mit $\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ gilt.*

Offenbar ist $\mathcal{D}'$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, denn

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\varphi) := \lambda_1 T_1(\varphi) + \lambda_2 T_2(\varphi).$$

Beispiel (1). Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d.h.

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

für alle Kompakta $K \subset \Omega$. Betrachte das Funktional

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Das Funktional T_f ist offensichtlich wohldefiniert und linear. Sei $\varphi_j \stackrel{\mathcal{D}}{\to} 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi_j)| &= \left| \int_K f(x)\varphi_j(x)dx \right| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi_j(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi_j(x)| \int_K |f(x)| dx \xrightarrow[j \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Also ist T_f eine Distribution. Distributionen, die eine solche Darstellung besitzen, nennt man *regulär*. Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreibt man manchmal f statt T_f, d.h.

$$f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Beispiel (2). Betrachte

$$\delta : \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \varphi(0).$$

Das Funktional δ ist offensichlich linear. Sei $\varphi_j \stackrel{\mathcal{D}}{\to} 0$ beliebig. Dann gilt

$$|\delta(\varphi_j)| = |\varphi_j(0)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi_j(x)| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0.$$

Also ist δ eine Distribution, die sogenannte δ-Distribution oder δ-„Funktion“ oder Dirac-Distribution.

SATZ 2.5. *Die δ-Distribution ist nicht regulär.*

BEWEIS. Angenommen, es gibt ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\delta(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist die Funktion $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1\varphi(x)$ auch in $\mathcal{D}(\Omega)$. Folglich ist

$$\int_\Omega f(x)x_1\varphi(x)dx = 0\phi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nach Lemma A.6 ist dann $x_1 f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$, also verschwindet f fast überall und wir erhalten

$$\delta(\varphi) = \int_\Omega 0 \cdot \varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Das ist ein Widerspruch. □

Dennoch schreibt man manchmal formal

$$\delta(\varphi) = \int_\Omega \delta(x)\varphi(x)dx,$$

obwohl $\delta(x)$ wie gerade gesehen nicht im Sinne einer Funktion definiert werden kann. Allerdings kann man δ beliebig gut durch reguläre Distributionen approximieren, wie sowohl an späterer Stelle als auch in den Übungen gezeigt wird.

Das Produkt zweier Distributionen, z.B. $\delta \cdot \delta$, ist im Allgemeinen nicht definiert. Im Falle regulärer Distributionen $T_a, T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

und $a \in C^\infty(\Omega)$ erscheint es hingegen ganz natürlich, das Produkt $T_a T_f$ als

$$(T_a T_f)(\varphi) := \int_\Omega a(x) f(x) \varphi(x) dx$$

zu definieren. Offenbar gilt $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und folglich ist $(T_a T_f)(\varphi) = T_f(a\varphi)$. Diese Relation gibt Anlass zur folgenden allgemeineren Definition, in der nur eine der Distributionen regulär sein muss:

Definition 2.6. *Für $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ setzen wir*

$$(T_a T)(\varphi) := T(a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Beispiel. $T_a \delta = a(0)\delta$, denn

$$(a\delta)(\varphi) = \delta(a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)\delta(\varphi).$$

Eine andere Schreibweise dieser Gleichung ist $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

2.2.1. Ableitungen. Sei $f \in C^p(\Omega)$ mit einem $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $|\alpha| \leq p$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (D^\alpha f)(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(D^\alpha \varphi)(x) dx.$$

Dies wird durch folgende Definition konsistent auf Distributionen fortgesetzt.

Definition 2.7. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Das Funktional*

$$(D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

heißt die α-te Ableitung von f.

Lemma 2.8. *$D^\alpha T$ ist eine Distribution. Insbesondere ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. *Linearität:* Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}(D^\alpha T)(\lambda\varphi + \mu\psi) &= (-1)^{|\alpha|} T(\lambda D^\alpha \varphi + \mu D^\alpha \psi) \\ &= \lambda(-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) + \mu(-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \psi) \\ &= \lambda(D^\alpha T)(\varphi) + \mu(D^\alpha T)(\psi).\end{aligned}$$

Stetigkeit: Sei $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ für $k \to \infty$ beliebig. Folglich gilt auch $D^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ und somit

$$(D^\alpha T)(\varphi_k) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

□

Beispiel (1). Es sei $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ nirgends differenzierbar auf dem Träger $\operatorname{supp} f$, z.B.

$$f = \begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} (r!)^{-1} \sin((r!)2t), & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ist, existiert die von f erzeugte reguläre Distribution T_f, welche nach dem Lemma *im distributionellen Sinne* dennoch beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiel (2). Es seien $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$. Betrachte die *Heaviside-Distribution*

$$\theta(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(x)dx.$$

θ ist offensichtlich eine reguläre Distribution, denn

$$\theta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi(x)dx \quad \text{mit} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\left(\frac{d}{dx}\theta\right)(\varphi) = -\theta(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x\to\infty} = \varphi(0),$$

d.h. δ ist die distributionelle Ableitung der Heaviside-Distribution. Weiter gilt

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\theta\right)(\varphi) = \left(\frac{d}{dx}\delta\right)(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0).$$

Beispiel (3). Es seien wieder $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$. Dann definiert

$$(\log|x|)(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi(x)dx$$

eine reguläre Distribution, denn $\log|\cdot|$ ist lokal integrierbar. Ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\log|x|\right)(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\varphi'(x)dx + \int_\varepsilon^\infty \log x\varphi'(x)dx \right. \\ &\qquad \left. + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)dx\right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für die einzelnen Integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \log(-x)\varphi(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x=-\varepsilon} \\ &= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \log\varepsilon\varphi(-\varepsilon), \\ \int_\varepsilon^\infty \log x\, \varphi'(x)dx &= -\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx + \log x\varphi(x)\Big|_{x=\varepsilon}^{x\to\infty} \\ &= -\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx - \log\varepsilon\varphi(\varepsilon), \\ \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log|x|\, \varphi'(x)dx\right| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \big|\log|x|\big|dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\left(\frac{d}{dx}\log|x|\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)).$$

Der hintere Limes ist 0, denn mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$|\log \varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))| \leq |\log \varepsilon| \max_{\xi \in \mathbb{R}} |\varphi'(\xi)| 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Wenn der vordere Limes existiert, bezeichnet man ihn als

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{2.5}$$

und nennt ihn den *Hauptwert* (französisch: valeur principale) des Integrals $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, welches im Allgemeinen selbst *nicht* konvergiert.

Wir untersuchen nun (2.5) auf Konvergenz. Betrachte

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{1 \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Das hintere Integral ist endlich, da der Integrand stetig ist und φ einen kompakten Träger hat. Das vordere Integral zerlegen wir weiter in

$$\int_{1 \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{1 \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{1 \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx =: I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

Um zu zeigen, dass der Grenzwert von I_ε für $\varepsilon \to 0$ existiert, genügt es, das Integral

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

zu betrachten. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist der Integrand auf ganz $[0, 1]$ beschränkt durch $\max_{\xi \in [0,1]} |\varphi'(\xi)|$ und I_ε somit konvergent. Auf der anderen Seite ist der Integrand von J_ε beschränkt auf $\{\varepsilon \leq |x| \leq 1\}$ und darüber hinaus punktsymmetrisch zum Ursprung, also ist $J_\varepsilon = 0$. Der Hauptwert (2.5) existiert also.

Schließlich definieren wir die Distribution

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi) := v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Die obige Rechnung zeigt, dass $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ die distributionelle Ableitung von $\log |x|$ ist.

Proposition 2.9 (Leibnizformel für Distributionen). *Seien $a \in C^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann gilt*

$$D^\alpha(af) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta a D^{\alpha-\beta} f$$

mit geeigneten Konstanten C_α^β.

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.2.2. Integrale. In diesem Teilkapitel sei stets $\Omega = \mathbb{R}$.

DEFINITION 2.10. *Eine Distribution $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt* Stammdistribution *von $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn $g' = f$ gilt. Man schreibt*

$$g(x) = \int f(x)dx.$$

LEMMA 2.11. *$g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist genau dann eine Stammdistribution von $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt*

$$g(\varphi') = -f(\varphi).$$

BEWEIS. $g'(\varphi) = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \;\Leftrightarrow\; -g(\varphi') = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. □

SATZ 2.12. *Jede Distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ besitzt eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Stammdistribution, d.h. für beliebige Stammdistributionen g_1 und g_2 von f existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit*

$$g_1(\varphi) - g_2(\varphi) = c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

BEWEIS. (a) *Existenz:* Betrachte die Testfunktion (Übung!)

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}} \eta(x)dx = 1.$$

Definiere zu $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Funktion

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(\xi) - \eta(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi')d\xi' \right) d\xi. \tag{2.6}$$

BEHAUPTUNG: $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

BEWEIS. Offenbar ist $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (vgl. Lemma A.7). Sei $R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} \varphi \subset (-R, R)$. Offensichtlich gilt

$$\psi(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x < -\max\{R, 1\}.$$

Für alle $x > \max\{R, 1\}$ gilt

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi')d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi)d\xi = 0.$$

Folglich ist $\operatorname{supp} \psi$ kompakt. B

Betrachte das lineare Funktional $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ mit

$$g(\varphi) := -f(\psi) + c_1 \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)d\xi \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{K} \quad \text{beliebig}. \tag{2.7}$$

BEHAUPTUNG: g ist stetig (also $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$).

BEWEIS. Sei $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} 0$. Sei $R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} \varphi_j \subset (-R, R)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann definiert

$$\psi_j(x) := \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi_j(\xi) - \eta(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(\xi')d\xi' \right) d\xi$$

wie oben gesehen für alle $j \in \mathbb{N}$ eine Testfunktion $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \psi_j \subset K := [-\max\{R, 1\}, \max\{R, 1\}]$, $j \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} 0$.

Da φ_j und alle Ableitungen auf $K \supset (-R, R)$ gleichmäßig gegen Null konvergieren (vgl. Definition 2.3), gilt auch

$$\sup_{x\in K} |\psi_j(x)| \leq \left(\int_K |\varphi_j(\xi)| d\xi + \int_{\mathbb{R}} \eta(\xi) d\xi \int_K |\varphi_j(\xi')| d\xi' \right) \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

und ferner für jedes $k \in \mathbb{N}$ unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi_j(x) \right| &= \sup_{x\in K} \left| \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\varphi_j(x) - \eta(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\xi') d\xi' \right) \right| \\ &\leq \sup_{x\in K} \left| \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \varphi_j(x) \right| + C \int_K |\varphi_j(\xi')| d\xi' \xrightarrow{j\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Damit gilt $\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} 0$.

Da f nach Voraussetzung stetig ist, folgt nun aus $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} 0$ und $\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} 0$

$$g(\varphi_j) = -f(\psi_j) + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\xi) d\xi \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Folglich ist g stetig, also eine Distribution. $\boxed{\text{B}}$

Sei nun ψ die Testfunktion, die man durch (2.6) aus φ' erhält, d.h.

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x} \eta(\xi) d\xi \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\xi) d\xi}_{=0} = \varphi(x).$$

Hiermit gilt

$$g(\varphi') = -f(\psi) + \underbrace{c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) d\xi}_{=0} = -f(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und aus Lemma 2.11 folgt, dass g eine Stammdistribution zu f ist.

(b) *Eindeutigkeit:* Sei $g_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Stammdistribution zu f. Aus (2.6) folgt

$$\begin{aligned} & \varphi(x) &= \psi'(x) + \eta(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi \\ \overset{g_2 \text{ ist linear}}{\Longrightarrow} & g_2(\varphi) &= g_2(\psi') + g_2(\eta) \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi \\ \overset{\text{Lemma } 2.11}{\Longrightarrow} & g_2(\varphi) &= -f(\psi) + \underbrace{g_2(\eta)}_{:=-c_2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (2.7) liefert $g - g_2 = c_1 + c_2 := c$. □

Bemerkung. Aus Satz 2.12 folgt, dass die allgemeine *distributionelle* Lösung der Differentialgleichung

$$u' = f \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

die Form $u = g + c$ hat. Hier ist g eine Stammdistribution von f und c eine Konstante. Insbesondere folgt aus $u' = 0$, dass $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine reguläre Distribution

$$u(\varphi) = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

2.2.3. Fundamentallösung als Distribution. Betrachten wir die allgemeine Form linearer partieller Differentialgleichungen k-ter Ordnung

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{2.8}$$

mit konstanten Koeffizienten a_α.

Definition 2.13. *Eine Distribution $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, welche der Differentialgleichung*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \Phi = -\delta \tag{2.9}$$

genügt, heißt Fundamentallösung.

Gleichung (2.9) definiert die Fundamentallösung nicht eindeutig: Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann ist $\Phi + u$ auch eine Fundamentallösung. Dennoch spricht man häufig von *der* Fundamentallösung, sobald man eine geeignete gefunden hat.

Satz 2.14. *Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann ist die distributionelle Faltung (vgl. Übung)*

$$u(x) := -\int_\Omega \Phi(x-y) f(y) dy$$

eine Lösung von (2.8) in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel (1). Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$. Wir zeigen, dass die Funktion $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|$, die wir im Zusammenhang mit der Laplacegleichung als Fundamentallösung bezeichnet haben, auch im Sinne von Definition 2.13 eine Fundamentallösung von $-\Delta u = f$ ist.

Da $\log|\cdot|$ lokal integrierbar ist, ist Φ eine reguläre Distribution. Wir wissen weiterhin, dass $\log|\cdot| \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und dass $\Delta \log|x| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset B_R(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta \log|x|)(\varphi) &= \log|x|(\Delta\varphi) = \int_{B_R(0)} \log|x| \Delta\varphi(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon < |x| < R} \log|x| \Delta\varphi(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon < |x| < R} (\log|x| \Delta\varphi(x) - \varphi(x) \Delta \log|x|) dx \\
&\overset{\text{Green}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x| = \varepsilon} \left(\log|x| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x| \right) d\sigma(x) \\
&\quad + \underbrace{\int_{|x|=R} \left(\log|x| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x| \right) d\sigma(x)}_{=0},
\end{aligned}$$

wobei man beachte, dass im Integral über die ε-Sphäre der Einheitsnormalenvektor in Richtung des Ursprungs zeigt. In Polarkoordinaten erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \int_0^{2\pi} d\alpha \Big(-\log r \frac{\partial\varphi(r,\alpha)}{\partial r} + \varphi(r,\alpha) \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\log r}_{=\frac{1}{r}} \Big)_{r=\varepsilon} \\
=\ & \underbrace{-\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log\varepsilon \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\partial\varphi(r,\alpha)}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon}}_{=0} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon,\alpha)d\alpha \\
=\ & \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}(\varphi(\varepsilon,\alpha)-\varphi(0))d\alpha + 2\pi\varphi(0) \\
=\ & 2\pi\varphi(0).
\end{aligned}
$$

Damit ist in der Tat $-\Delta\Phi = \delta$. Analog sieht man

$$-\Delta\Phi = \delta \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)V_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Beispiel (2). Betrachte die lineare Transportgleichung

$$u_t(t,x) + \langle b, \nabla u(t,x)\rangle = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

mit konstanten Koeffizienten $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Distribution

$$\Phi(\varphi) = -\big(\theta(t)\delta(x-bt)\big)(\varphi) := -\int_0^\infty \varphi(t,bt)dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

eine Fundamentallösung, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
(\Phi_t + \langle b, \nabla\Phi\rangle)(\varphi) &= -\Phi(\varphi_t + \langle b, \nabla\varphi\rangle) \\
&= \int_0^\infty (\varphi_t(t,bt) + \langle b, \nabla\varphi(t,bt)\rangle)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\varphi(t,bt)dt \ = \ -\varphi(0) \ = \ -\delta(\varphi).
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Distributionentheorie kann man alle distributionellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha u = -\delta, \quad a_\alpha \in \mathbb{R},$$

finden. Dafür benutzt man die Fouriertransformation von Distributionen.

2.3. Mittelwertsatz für harmonische Funktionen

Satz 2.15 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen). *Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, so gilt*

$$u(x) = \frac{1}{nV_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y) = \frac{1}{V_n r^n}\int_{B_r(x)} u(y)dy$$

für jede Kugel $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Jede harmonische Funktion ist also gleich ihrem Mittelwert auf umhüllenden Kugeln bzw. Kugeloberflächen (man beachte: $nV_nr^{n-1} = |\partial B_r(x)|_{n-1}$ und $V_nr^n = |B_r(x)|_n$).

Bemerkung. Aus der Funktionentheorie ist der Mittelwertsatz von Gauß bekannt (hier gilt $n = 2$): Ist $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$, $B_R(a) \subset \mathbb{C}$ holomorph, so ist

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\varphi}\right) d\varphi, \quad 0 < r < R.$$

Beweis. Betrachte zunächst für ein beliebiges $x \in \Omega$ die Funktion

$$F(r) := \frac{1}{nV_nr^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y) \overset{y=x+rs}{=} \frac{1}{nV_n}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rs)d\sigma(s),$$

definiert für alle hinreichend kleinen r. Hierfür gilt mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned} F'(r) &= \frac{1}{nV_n}\int_{\partial B_1(0)} \langle \nabla u(x+rs), s\rangle d\sigma(s) = \frac{1}{nV_n}\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x+rs)d\sigma(s) \\ &\overset{y=x+rs}{=} \frac{1}{nV_nr^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)d\sigma(y) \overset{\text{Green}}{=} \frac{1}{nV_nr^{n-1}}\int_{B_r(x)} \Delta u(y)dy = 0, \end{aligned}$$

also ist F konstant. Daher ist

$$\frac{1}{nV_nr^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{nV_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)d\sigma(y) = u(x),$$

wobei Lemma A.8 benutzt wurde. Somit ist die erste Gleichung bewiesen. Hieraus folgt auch die zweite Gleichung via

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_nr^n}\int_{B_r(x)} u(y)dy &= \frac{1}{V_nr^n}\int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)d\sigma(y)\right) d\rho \\ &\overset{\text{1. Gleichung}}{=} \frac{1}{V_nr^n}\int_0^r \left(nV_n\rho^{n-1}u(x)\right) d\rho \\ &= \frac{nu(x)}{r^n}\int_0^r \rho^{n-1}d\rho = u(x). \end{aligned}$$

□

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 2.15.

Satz 2.16. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und gilt für $u \in C^2(\Omega)$ die Identität*

$$u(x) = \frac{1}{nV_nr^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y)$$

für beliebige Kugeln $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist u harmonisch.

Beweis. Angenommen, $\Delta u(x) \neq 0$ für ein $x \in \Omega$, ohne Einschränkung gelte $\Delta u(x) > 0$. Wegen $\Delta u \in C(\Omega)$ gibt es ein $r > 0$ so, dass $\Delta u(y) > 0$ für alle $y \in B_r(x)$. Betrachten wir wieder die Funktion F aus dem Beweis von Satz 2.15, so folgt daraus

$$F'(\rho) = \frac{1}{nV_n\rho^{n-1}}\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy \;>\; 0 \quad \forall \rho \in (0, r).$$

Also gilt

$$\frac{1}{nV_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)dy = F(\rho) > \lim_{r\to 0} F(r) = u(x).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Daher folgt $\Delta u = 0$ in Ω. □

Bemerkung. *Es gilt auch die folgende Variante der Umkehrung von Satz 2.15: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und gilt für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ die Identität*

$$u(x) = \frac{1}{V_n r^n}\int_{B_r(x)} u(y)dy$$

für beliebige Kugeln $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist u harmonisch.

2.4. Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Satz 2.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch auf Ω.*

(a) *Es gilt $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$, d.h. u nimmt sein Maximum über $\overline{\Omega}$ auf dem Rand an (schwaches Maximumprinzip).*
(b) *Ist Ω ferner zusammenhängend und gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$, so ist u konstant auf $\overline{\Omega}$ (starkes Maximumprinzip).*

Bemerkungen. (1) *Ist u harmonisch, so ist $-u$ ebenfalls harmonisch. Daher gilt mit (a) auch*

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

(2) *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei disjunkte nichtleere in Ω offene Mengen zerlegt werden kann. Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass jede nichtleere in Ω sowohl offene als auch abgeschlossene Menge notwendig ganz Ω ist. (Erinnerung: Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt* offen in Ω, *falls eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $B \cap \Omega = A$, und* abgeschlossen in Ω, *falls $\Omega \setminus A$ offen ist in Ω.)*

Beweis. Zunächst beweisen wir (b), danach folgern wir (a) aus (b). Dazu setze

$$M := \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x), \quad S := \{y \in \Omega \mid u(y) = M\}.$$

Nach Voraussetzung ist $x_0 \in S$, insbesondere ist S also nichtleer. Wir zeigen nun, dass S in Ω sowohl offen als auch abgeschlossen ist, woraus $S = \Omega$ folgt, da Ω nach Annahme zusammenhängend ist. Wegen $u \in C(\overline{\Omega})$ impliziert dies die Behauptung.

Abgeschlossenheit: $\{M\} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist stetig. Damit ist $S = u^{-1}(\{M\})$ in Ω abgeschlossen.

Offenheit: Seien $x \in S$ und $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Angenommen, es gibt ein $y_0 \in B_r(x)$ mit $u(y_0) < M$. Aufgrund der Stetigkeit von u gibt es dann eine offene Umgebung U von y_0 in $B_r(x)$ so, dass $u(y) < M$ für alle $y \in U$. Folglich gilt

$$u(x) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)dy = \frac{1}{V_n r^n} \left(\int_{B_r(x)\setminus U} \underbrace{u(y)}_{\leq M} dy + \int_U \underbrace{u(y)}_{<M} dy \right) < M$$

und somit $x \notin S$, ein Widerspruch. Für alle $y_0 \in B_r(x)$ gilt daher $u(y_0) = M$, also $B_r(x) \subset S$. Somit ist x ein innerer Punkt von S und da x beliebig war, ist S offen.

Damit ist (b) bewiesen.

(a) folgt aus (b), denn eine offene und beschränkte Menge Ω lässt sich darstellen als disjunkte Vereinigung

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i,$$

offener, beschränkter, zusammenhängender Mengen Ω_i, wobei I irgendeine Indexmenge ist. Offenbar gilt stets

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Angenommen,

$$M := \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x),$$

dann existiert ein $y \in \Omega$ mit $u(y) = M$. Es gibt genau ein $i \in I$ mit $y \in \Omega_i$ und mit (b) folgt $u = M$ auf ganz $\overline{\Omega}_i$. Insbesondere ist $u = M$ auf $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ und folglich

$$\max_{x \in \partial\Omega} u(x) \geq M.$$

Das aber ist ein Widerspruch zur Annahme, also gilt auch (a). □

Wir sehen nun eine Anwendung des Maximumprinzips:

Korollar 2.18. *Sei Ω offen und beschränkt. Sind $g \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$, so gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zwei Lösungen des Randwertproblems. Für t'$w := u_1 - u_2$ gilt dann

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und mit Satz 2.17 folgt $w(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega$. Dieselbe Argumentation zeigt auch die umgekehrte Ungleichung und somit letztlich $u_1 = u_2$. □

2.5. Regularität harmonischer Funktionen

SATZ 2.19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Besitzt $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{nV_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y)$$

für jede Kugel $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Ist $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, so besitzt u nach Satz 2.15 die Mittelwerteigenschaft. Mit Satz 2.19 erhalten wir also:

KOROLLAR 2.20. *Ist $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Das folgende Korollar ist eine Verschärfung von Satz 2.16: Anders als dort wird hier nicht gefordert, dass u zweimal stetig differenzierbar ist, sondern lediglich lokal integrierbar.

KOROLLAR 2.21. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfüllt $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{nV_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y)$$

für jede Kugel $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist u harmonisch.

BEWEIS. Da u die Mittelwerteigenschaft erfüllt, ist mit Satz 2.19 $u \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist insbesondere $u \in C^2(\Omega)$ und nach Satz 2.15 ist u harmonisch. □

BEWEIS VON SATZ 2.19. Wir verwenden die aus den Übungen bekannte Methode der Glättung durch Faltung mit dem Friedrichsschen Standardglätter η. Sei $\tilde{\eta} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\eta}(|x|) = \eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(y)u(x-y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \tilde{\eta}\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) u(x-y)dy \\ &\overset{z=-y}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \tilde{\eta}\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) u(x+z)dz \end{aligned}$$

Nach Übergang zu sphärischen Koordinaten (r, s), $r = |z|$, $s \in \partial B_r(0)$, erhalten wir also unter Ausnutzung der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \underbrace{\left(\int_{\partial B_r(0)} u(x+s)d\sigma(s)\right)}_{=nV_n r^{n-1}u(x)} dr \\ &= \frac{nV_n u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^{n-1}dr = u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\, dz = u(x). \end{aligned}$$

Wegen $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ ist damit auch $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Da aber ε beliebig klein gewählt werden kann, ist $u \in C^\infty(\Omega)$. □

Als Nächstes wollen wir Schranken für die Ableitungen harmonischer Funktionen angeben.

Satz 2.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, so gilt*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x))}$$

für jede Kugel $B_r(x) \subset \Omega$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ und jeden Mutliindex α der Ordnung $|\alpha| = k$. Die Konstanten sind gegeben durch

$$C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{V_n}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (0^0 := 1).$$

Hier bezeichnet

$$\|u\|_{L^1(B_r(x))} := \int_{B_r(x)} |u(y)| dy$$

die $L^1(B_r(x))$-Norm von u.

Beweis. Induktion über k. Für $k = 0$ erhalten wir mit dem Mittelwertsatz 2.15 sofort

$$|u(x)| \leq \frac{1}{V_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(y)| dy = \frac{C_0}{r^{n+0}} \|u\|_{L^1(B_r(x))}. \tag{2.10}$$

Aus technischen Gründen betrachten wir noch den Fall $k = 1$ gesondert, bevor wir zum Induktionsschluss kommen, welcher jedoch von der Idee her im Wesentlichen genauso geht. Wegen $|\alpha| = 1$ ist $D^\alpha u = u_{x_i}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $\Delta u_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u$, ist diese Funktion harmonisch und mit dem Mittelwertsatz 2.15 und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &= \left| \frac{1}{V_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(x)} u_{x_i}(y) dy \right| = \left| \frac{2^n}{V_n r^n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} u(y) \nu_i(y) d\sigma(y) \right| \\
&\leq \frac{2^n}{V_n r^n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)| d\sigma(y) \leq \frac{2^n}{V_n r^n} \max_{y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)| \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} n V_n \\
&= \frac{2n}{r} \max_{y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)|.
\end{aligned}$$

Für jedes $y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x)$ ist $B_{\frac{r}{2}}(y) \subset B_r(x) \subset \Omega$, hierfür gilt also wie in (2.10)

$$|u(y)| \leq \frac{1}{V_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \|u\|_{L^1(B_{\frac{r}{2}}(y))} \leq \frac{2^n}{V_n r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x))}$$

und die obige Abschätzung setzt sich fort durch

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{2n}{r} \frac{2^n}{V_n r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x))} = \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))},$$

womit die Behauptung auch für $k = 1$ gezeigt ist.

Es sei also nun $k \geq 2$ und die Aussage des Satzes gelte bereits für alle Multiindizes, deren Ordnung höchstens $k - 1$ ist. Sei $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $|\alpha| = k$. Dann ist $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ für einen geeigneten Multiindex β der Ordnung $k - 1$ und ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt $\Delta D^\alpha u = D^\alpha \Delta u$, also ist $D^\alpha u$ harmonisch. Vollkommen analog zur Rechnung im Falle $k = 1$ erhalten wir dann

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{kn}{r} \max_{y \in \partial B_{\frac{r}{k}}(x)} |D^\beta u(y)|.$$

Nun ist für jedes $y \in \partial B_{\frac{r}{k}}(x)$ auch $B_{\frac{k-1}{k}r}(y) \subset B_r(x) \subset \Omega$ und nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|D^\beta u(y)| \leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_{\frac{k-1}{k}r}(y))} \leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))},$$

womit sich die obige Abschätzung fortsetzt zu

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{kn}{r} \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))} = \frac{knC_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1} r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x))}.$$

Wegen $\frac{k}{k-1} \leq 2$ ist hierbei

$$\begin{aligned}\frac{knC_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}} &= \frac{kn}{\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}} \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{V_n} = \frac{kn(2^{n+1}nk)^{k-1}}{V_n} \left(\frac{k}{k-1}\right)^n \\ &\leq \frac{kn(2^{n+1}nk)^{k-1}}{V_n} 2^{n+1} = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{V_n} = C_k\end{aligned}$$

und der Beweis ist vollendet. □

SATZ 2.23 (Liouville). *Jede beschränkte harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konstant.*

BEWEIS. Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $|\alpha| = 1$. Mit 2.22 erhalten wir

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x)| &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))} = \frac{C_1}{r^{n+1}} \int_{B_r(x)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} V_n r^n \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |u(y)| = \frac{C_1 V_n}{r} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |u(y)| \xrightarrow{r \to \infty} 0.\end{aligned}$$

Damit ist $\nabla u \equiv 0$ und u folglich konstant. □

SATZ 2.24. *Es sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte (klassische) Lösung der Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

die Form

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + c$$

mit einer geeigneten Konstante $c \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Lösung der Poissongleichung. Nach Satz 2.2 ist

$$\tilde{u}(x) := -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$$

ebenfalls eine Lösung der Poissongleichung. Sei $R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(x)| &\leq \max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{B_R(0)} |\Phi(x-y)| dy = \frac{\max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|}{n(n-2)V_n} \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-2}} \\ &= \frac{\max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|}{n(n-2)V_n} \int_{B_R(x)} \frac{dy}{|y|^{n-2}}.\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG: $\int_{B_R(x)} \frac{dy}{|y|^{n-2}} \le \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}} < \infty.$

BEWEIS. Mit

$$M := |B_R(x) \cap B_R(0)^c| = |B_R(x)^c \cap B_R(0)|$$

gilt

$$\int_{B_R(x)\cap B_R(0)^c} \frac{dy}{|y|^{n-2}} \overset{|y|\ge R}{\le} \frac{M}{r^{n-2}} \overset{|y|<R}{\le} \int_{B_R(x)^c\cap B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)} \frac{dy}{|y|^{n-2}} &= \int_{B_R(x)\cap B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}} + \int_{B_R(x)\cap B_R(0)^c} \frac{dy}{|y|^{n-2}}\\ &\le \int_{B_R(x)\cap B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}} + \int_{B_R(x)^c\cap B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}}\\ &= \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|y|^{n-2}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$

Also ist $\tilde{u}$ beschränkt. Die Funktion $w := u - \tilde{u}$ ist folglich ebenfalls beschränkt und harmonisch in $\mathbb{R}^n$, nach dem Satz von Liouville (Satz 2.23) also konstant. Das war zu zeigen. □

Als eine Anwendung von Satz 2.24 erhalten wir die folgende Eindeutigkeitsaussage für die Poissongleichung.

KOROLLAR 2.25. *Es sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 3$. Dann besitzt die Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

genau eine Lösung mit

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Diese ist gegeben durch

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy. \tag{2.11}$$

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, dass (2.11) der Bedingung $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ genügt. Mit $R > 0$ wie im Beweis von Satz 2.24 und mit der dortigen Rechnung erhalten wir für $x \notin B_R(0)$ dann

$$|u(x)| \le C \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-2}} \le C \frac{1}{(\operatorname{dist}(x, B_R(0)))^{n-2}} R^n V_n \xrightarrow{|x|\to\infty} 0.$$

Ist u_1 eine weitere Lösung mit $\lim_{|x|\to\infty} u_1(x) = 0$, so hat diese nach Satz 2.24 die Gestalt $u_1 = u + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Aus der Limesvoraussetzung folgt jedoch $c = 0$ und damit $u = u_1$. □

2.6. Die Harnacksche Ungleichung

SATZ 2.26 (Harnacksche Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zu jeder zusammenhängenden offenen Menge $V \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset \Omega$ gibt es eine Konstante $C_V > 0$ so, dass für jede nichtnegative harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq C_V \inf_{y \in V} u(y). \tag{2.12}$$

BEMERKUNGEN:

(a) Die Harnacksche Ungleichung (2.12) ist äquivalent zu

$$C_V^{-1} u(y) \leq u(x) \leq C_V u(y), \quad x, y \in V.$$

(b) Wir diskutieren den Fall $n = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, um die Aussage des Satzes intuitiv zu verstehen. Hier hat offenbar jede harmonische Funktion die Gestalt $u(x) = ax + b$ und ist genau dann nichtnegativ, wenn $b \geq |a|$. Betrachten wir beispielsweise $V = (-1/2, 1/2)$, so ist

$$\sup_{x \in V} u(x) = b + \frac{|a|}{2}, \quad \inf_{x \in V} u(x) = b - \frac{|a|}{2}$$

und die Harnacksche Ungleichung gilt mit $C_V = 3$, denn

$$b + \frac{|a|}{2} \leq b + \frac{a}{2} + 2(b - |a|) = 3(b - \frac{|a|}{2}).$$

(c) Für $V = \Omega$ gilt die Harnacksche Ungleichung im Allgemeinen nicht: Die Funktion $u(x) = x + 1$ ist harmonisch auf $\Omega = (-1, 1)$ und es gilt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = 2, \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) = 0,$$

eine Konstante $C > 0$ mit $2 \leq C \cdot 0$ existiert jedoch nicht. Die Voraussetzung $\overline{V} \subset \Omega$ in Satz 2.26 darf also nicht weggelassen werden.

BEWEIS VON SATZ 2.26. Sei $r := \frac{1}{4}\mathrm{dist}(V, \partial\Omega) > 0$ und seien $x, y \in V$ mit $|x - y| < r$. Mit dem Mittelwertsatz 2.15 folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{V_n (2r)^n} \int_{B_{2r}(x)} u(z) dz \geq \frac{1}{V_n (2r)^n} \int_{B_r(y)} u(z) dz \\ &= \frac{2^{-n}}{V_n r^n} \int_{B_r(y)} u(z) dz = 2^{-n} u(y), \end{aligned}$$

wobei in der Ungleichung die Nichtnegativität von u ausgenutzt wurde sowie die Tatsache, dass $B_{2r}(x) \supset B_r(y)$. Dieselbe Rechnung funktioniert auch mit vertauschten Rollen von x und y, insgesamt erhalten wir also

$$2^n u(y) \geq u(x) \geq 2^{-n} u(y) \quad \forall x, y \in V \text{ mit } |x - y| < r. \tag{2.13}$$

Um dies einsetzen zu können, zeigen wir zuerst die folgende

BEHAUPTUNG: Es existiert eine endliche Überdeckung von V aus offenen Kugeln $B_r(z_i) \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, N$, mit $B_r(z_i) \cap B_r(z_{i-1}) \neq \varnothing$ für alle $i = 2, \ldots, N$.

Beweis. Da $\overline{V}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung von V mit offenen Kugeln B_k von Radius r. Sind B_k und B_{k-1} disjunkt, so schließen wir mit folgender Konstruktion die Lücken: Da V offen und zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to V$, der die Mittelpunkte dieser Kugeln miteinander verbindet. Da das Intervall $[0,1]$ kompakt ist, ist γ gleichmäßig stetig und folglich existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|\gamma(t) - \gamma(t')| < r$ für alle $t, t' \in [0,1]$ mit $|t - t'| < \delta$. Sei nun $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ mit $t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, \ldots, M$. Dann ist $B_r(\gamma(t_i)) \cap B_r(\gamma(t_{i-1})) \neq \varnothing$ für alle $i = 1, \ldots, M$. Betrachtet man alle Paare B_k, B_{k-1}, so erhält man also mit diesem Verfahren durch Hinzunahme endlich vieler weiterer Kugeln eine endliche Überdeckung von V mit der geforderten Eigenschaft. $\boxed{\text{B}}$

Seien nun $x, y \in V$ beliebig. Es gibt $k, l \in \{1, \ldots, N\}$ mit $x \in B_r(z_k)$, $y \in B_r(z_l)$, wobei ohne Einschränkung $k < l$ sei. Sei $\tilde{z}_j \in B_r(z_j) \cap B_r(z_{j+1})$ für $j = k, \ldots, l-1$. Dann erhalten wir duch sukzessives Anwenden von (2.13)

$$\begin{aligned} u(x) &\geq 2^{-n} u(z_k) \geq 2^{-n} 2^{-n} u(\tilde{z}_k) \geq 2^{-n} 2^{-n} 2^{-n} u(z_{k+1}) \\ &\geq \ldots \geq 2^{-n} 2^{-2(l-k)n} u(z_l) \geq 2^{-2n} 2^{-2(l-k)n} u(y). \end{aligned}$$

Da die gewählte Überdeckung von V endlich ist, gilt $l - k \leq N - 1$, also $2^{-2(l-k)n} \geq 2^{-2(N-1)n}$ und somit

$$u(x) \geq 2^{-2Nn} u(y).$$

Wieder funktioniert dasselbe Argument auch mit vertauschten Rollen von x und y, insgesamt erhalten wir also

$$2^{2Nn} u(y) \geq u(x) \geq 2^{-2Nn} u(y) \quad \forall x, y \in V$$

und somit die Behauptung. $\square$

2.7. Greensche Funktion

Das Ziel dieses Abschnittes ist, das Dirichletproblem für die Poissongleichung

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

zu lösen.

Lemma 2.27. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit $f \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, so gilt

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) - \int_{\Omega} \Phi(x-y) f(y) dy$$

für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Zu beliebigem $x \in \Omega$ wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$. Mit der Voraussetzung $f = \Delta u$ und unter Zuhilfenahme der Greenschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}} \Phi(x-y) f(y) dy \\
&= \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}} \left(\Phi(x-y)\Delta u(y) - u(y) \underbrace{\Delta_y \Phi(x-y)}_{=0} \right) dy \\
&= \int_{\partial(\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)})} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y),
\end{aligned}$$

wobei sich das Vorzeichen im letzten Schritt aus der Orientierung des äußeren Normaleneinheitsvektors ergibt. Wir treffen die Unterteilung

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) \\
= \quad & \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} d\sigma(y) \\
=: \quad & I_\varepsilon - J_\varepsilon
\end{aligned}$$

und berechnen einzeln

$$\begin{aligned}
|I_\varepsilon| &= \left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y) \left\langle \nabla u, \frac{y-x}{|y-x|} \right\rangle d\sigma(y) \right| \\
&\leq \max_{y \in \partial B_\varepsilon(x)} |\Phi(x-y)| \cdot \max_{y \in B_\varepsilon(x)} |\nabla u(y)| n V_n \varepsilon^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &\overset{z=x-y}{=} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-z) \langle \nabla_z \Phi(z), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \\
&\overset{(2.4)}{=} -\frac{1}{nV_n}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-z) d\sigma(z) \\
&\overset{y=x-z}{=} -\frac{1}{nV_n}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) d\sigma(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{Lemma A.8}} -u(x).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) \\
- \underbrace{(I_\varepsilon - J_\varepsilon)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} u(x)}
\end{aligned}$$

und da die linke Seite nicht von ε abhängt, folgt die Behauptung. □

DEFINITION 2.28. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte zu jedem festen $x \in \Omega$ die Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} \Delta_y F_x(y) = 0, & y \in \Omega, \\ F_x(y) = \Phi(x-y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Falls diese eine Lösung $F_x(\,\cdot\,) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzt, so nennt man

$$G : \Omega^2 \setminus \{(x,y) \in \Omega^2 \mid x = y\} \to \mathbb{R}, \quad G(x,y) := \Phi(x-y) - F_x(y)$$

die Greensche Funktion *für Ω.*

Offenbar gilt $G(x,y) = 0$ für alle $y \in \partial\Omega$.

SATZ 2.29. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $f \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega)$, und existiert die Greensche Funktion $G(x,y) = \Phi(x-y) - F_x(y)$ für Ω mit $F_x(\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$, so gilt

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} d\sigma(y) - \int_\Omega f(y) G(x,y) dy.$$

BEWEIS. Da u die Randwertaufgabe löst, gilt mit der Greenschen Formel

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_x(y) f(y) dy &= \int_\Omega \left(F_x(y) \Delta u(y) - u(y) \underbrace{\Delta_y F_x(y)}_{=0} \right) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(F_x(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial F_x(y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - g(y) \frac{\partial F_x(y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die aus Lemma 2.27 bekannte Darstellung von u ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \right) d\sigma(y) - \int_\Omega \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - g(y) \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} + \frac{\partial F_x(y)}{\partial \nu(y)} \right) \right) d\sigma(y) \\ &\qquad - \int_\Omega \left(G(x,y) + F_x(y) \right) f(y) dy \\ &= -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} d\sigma(y) - \int_\Omega f(y) G(x,y) dy. \end{aligned}$$

□

SATZ 2.30 (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Existiert die Greensche Funktion $G(x,y) = \Phi(x -$*

$y) - F_x(y)$ für Ω mit $F_x(\,\cdot\,) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$, so ist sie symmetrisch, d.h. für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt

$$G(x,y) = G(y,x).$$

Beweis. Seien $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ beliebig. Setze $v(z) := G(x,z)$ und $w(z) := G(y,z)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta v(z) = 0 &\qquad \text{für } z \neq x, \\ \Delta w(z) = 0 &\qquad \text{für } z \neq y, \\ v(z) = w(z) = 0 &\qquad \text{für } z \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|x - y| > 2\varepsilon$ und $\overline{B_\varepsilon(x)}$ sowie $\overline{B_\varepsilon(y)}$ komplett in Ω enthalten sind. Setze $V := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)}$. Dann erhalten wir mit der Greenschen Formel

$$\begin{aligned} &\int_V (v(z) \underbrace{\Delta w(z)}_{=0} - w(z) \underbrace{\Delta v(z)}_{=0}) dz \\ &\qquad = \int_{\partial\Omega} \left(\underbrace{v(z)}_{=0} \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - \underbrace{w(z)}_{=0} \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z) \\ &\qquad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z) \\ &\qquad - \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{(2.14)} \quad &\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) - v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z) \\ &\qquad\qquad = \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z). \end{aligned}$$

Die Funktion w ist harmonisch in $B_\varepsilon(x)$ und es gilt $v(z) = G(x,z) = \Phi(x - z) - F_x(z)$. Daher ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) d\sigma(z) \right| &\leq C\varepsilon^{n-1} \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(x)} |v(z)| \\ &\leq C\varepsilon^{n-1} \left(C' + \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(x)} |\Phi(x - z)| \right) \\ &\leq CC'\varepsilon^{n-1} + CC''\varepsilon^{n-1} \cdot \begin{cases} \varepsilon^{2-n}, & \text{für } n \geq 3, \\ |\log \varepsilon|, & \text{für } n = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

für geeignete Konstanten C, C', C''. Dieser Ausdruck konvergiert gegen Null für $\varepsilon \to 0$.

Schließlich betrachte

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}(z)d\sigma(z)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial \Phi(x-z)}{\partial \nu(z)}d\sigma(z) - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial F_x}{\partial \nu}(z)d\sigma(z).$$

Im Beweis von Lemma 2.27 wurde bewiesen, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial \Phi(x-z)}{\partial \nu(z)}d\sigma(z) = -w(x)$$

und außerdem ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial F_x}{\partial \nu}(z)d\sigma(z) = 0,$$

denn $w(z)\frac{\partial F_x}{\partial \nu}(z)$ ist beschränkt. Daher konvergiert die linke Seite von (2.14) für $\varepsilon \to 0$ gegen $-w(x)$ und analog konvergiert die rechte Seite gegen $-v(y)$. Somit erhalten wir

$$G(y,x) = w(x) = v(y) = G(x,y).$$

□

2.8. Die Greensche Funktion für den Halbraum

Sei $\Omega := \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Diese Menge ist nicht beschränkt und die Ergebnisse des vorigen Abschnittes sind daher nicht anwendbar.

Für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Spiegelung am Rand $\partial\mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als

$$\overline{x} := \{x_1,\dots,x_{n-1},-x_n\}.$$

Setzen wir für $x,y \in \mathbb{R}^n_+$

$$F_x(y) := \Phi(y-\overline{x}),$$

so gilt wegen

$$y = \overline{y}, \quad |x-y| = |\overline{x}-\overline{y}| \quad \forall y \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

folglich

$$\Phi(y-\overline{x}) = \Phi(y-x) \quad \forall y \in \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Deshalb erhalten wir

$$\begin{cases} \Delta_y F_x(y) = 0, & y \in \mathbb{R}^n_+, \\ F_x(y) = \Phi(x-y), & y \in \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

d.h. die Greensche Funktion des Halbraumes $\mathbb{R}^n_+$ ist gegeben durch

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - F_x(y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\overline{x}), \quad x,y \in \mathbb{R}^n_+.$$

Man bemerke, dass sie aufgrund von

$$|y-x| = |y-x|, \quad |y-\overline{x}| = |\overline{y}-x| = |x-\overline{y}|$$

symmetrisch ist, auch wenn die Voraussetzungen von Satz 2.30 nicht gegeben sind. Es gilt

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} = \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial y_n} - \frac{\partial \Phi(y-\overline{x})}{\partial y_n} = \frac{1}{nV_n}\left(\frac{y_n-x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n+x_n}{|y-\overline{x}|^n}\right)$$

und für $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ folgt

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} = -\frac{2x_n}{nV_n}\left((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-y_{n-1})^2+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Nun sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ eine beschränkte Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.15}$$

Man kann hoffen (und wir werden es gleich auch zeigen), dass die Formel aus Satz 2.29 auch für die unbeschränkte Menge $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ gilt, d.h. wenn eine Lösung u von (2.15) existiert, kann sie als

$$u(x) = \frac{2x_n}{nV_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{\left((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-y_{n-1})^2+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}}dy. \tag{2.16}$$

dargestellt werden. Diese Darstellungsformel heißt *Poisson-Formel für den Halbraum*. Der Integralkern

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{nV_n}\left((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-y_{n-1})^2+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n_+$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ heißt *Poisson-Kern für den Halbraum*.

Der folgende Satz ist nicht nur ein Analogon zu Satz 2.29 für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$, sondern er liefert auch die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe (2.15).

SATZ 2.31. *Sei $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)$ und sei u gegeben durch die Poisson-Formel für den Halbraum* (2.16). *Dann gelten*

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,
(b) $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$,
(c) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0)$ *für jedes* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

BEMERKUNG. Der Satz macht keine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösungen von (2.15). Man kann aber zeigen, dass (2.16) in dieser Situation die einzige *beschränkte* Lösung ist: Ist $\tilde{u}$ eine weitere beschränkte Lösung, so ist $w := u - \tilde{u}$ eine beschränkte Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Nach dem *Schwarzschen Spiegelungsprinzip* (vgl. Übung) ist die beschränkte Funktion

$$\tilde{w}(x) := \begin{cases} w(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n), & x_n > 0, \\ 0, & x_n = 0, \\ -w(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n), & x_n < 0, \end{cases}$$

harmonisch in $\mathbb{R}^n$ und infolge des Satzes von Liouville 2.23 ist sie konstant. Wegen $\tilde{w}(0) = 0$ ist also $\tilde{w} \equiv 0$ und damit $\tilde{u} = u$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n_+$ beliebig. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

Schritt 1: Als Erstes zeigen wir, dass

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) = 1. \tag{2.17}$$

Dazu betrachte

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) \\
&\qquad = \frac{2x_n}{nV_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma(y)}{((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-y_{n-1})^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \\
&\qquad \overset{z=x-y}{=} \frac{2x_n}{nV_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Im Falle $n=2$ erhalten wir

$$\frac{2x_n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{z^2+x_n^2} \overset{x_n>0}{=} \frac{1}{\pi}\left[x_n\frac{1}{x_n}\arctan\frac{z}{x_n}\right]_{z=-\infty}^{z=\infty} = 1.$$

Sei also nun $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{2x_n}{nV_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}} &\overset{\rho=|z|}{=} \frac{2x_n}{nV_n}(n-1)V_{n-1}\int_0^\infty \frac{\rho^{n-2}d\rho}{(\rho^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \\
&\overset{\substack{x_n>0\\ \rho=x_n r}}{=} \frac{2(n-1)V_{n-1}}{nV_n}\int_0^\infty \frac{r^{n-2}dr}{(r^2+1)^{\frac{n}{2}}},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{r^{n-2}dr}{(r^2+1)^{\frac{n}{2}}} &\overset{s=r^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{s^{n-\frac{3}{2}}}{(s+1)^{\frac{n}{2}}}ds \\
&\overset{t=\frac{s}{s+1}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Identität $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ und der Funktionalgleichung der Gammafunktion rechnet man leicht nach, dass

$$\frac{2(n-1)V_{n-1}}{nV_n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 1.$$

Damit ist (2.17) bewiesen. Wegen

$$|u(x)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}|g(y)|\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}|g(y)|$$

folgt nun hiermit aus der Beschränktheit von g auch die von u.

Schritt 2: Für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ setze $\tilde{y} = (y, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Hiermit gilt

$$\Delta_x K(x,y) = \Delta_x\left(\left.\frac{\partial G(x,\tilde{y})}{\partial y_n}\right|_{y_n=0}\right) = \frac{\partial}{\partial y_n}\Delta_x G(x,\tilde{y})\Big|_{y_n=0}.$$

Aufgrund der Symmetrie von G erhalten wir

$$\Delta_x G(x,\tilde{y}) = \Delta_x G(\tilde{y},x) = \Delta_x \Phi(\tilde{y}-x) - \Delta_x F_{\tilde{y}}(x) = 0$$

und somit schließlich

$$\Delta_x K(x,y) = 0,$$

d.h. die Funktion $\mathbb{R}^n_+ \ni x \mapsto K(x,y)$ ist harmonisch. Ihre partiellen Ableitungen sind lokal durch eine integrierbare Funktion majorisiert (Details als Übung) und da g beschränkt ist, folgt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)\Delta_x K(x,y)d\sigma(y) = 0.$$

Schritt 3: Um noch (c) zu beweisen, wählen wir zu beliebigen $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \text{ mit } |y - x_0| < \delta.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n_+$ mit $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ schließen wir

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)g(y)d\sigma(y) - g(x_0)\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) \right| \\
&= \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)[g(y) - g(x_0)]d\sigma(y) \right| \\
&\leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|d\sigma(y) \\
&\quad + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|d\sigma(y) \\
&=: I + J.
\end{aligned}$$

Für die einzelnen Integrale gilt

$$I \leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)d\sigma(y) \leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) = \varepsilon$$

bzw.

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)\left(|g(y)| + |g(x_0)|\right)d\sigma(y) \\
&\leq 2 \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} |g(y)| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ und $|y - x_0| \geq \delta$ folgt

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

also $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$. Damit ist nun

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)d\sigma(y) &= \frac{2x_n}{nV_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^n} \\
&\leq \frac{2^{n+1}x_n}{nV_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} \frac{d\sigma(y)}{|y-x_0|^n}.
\end{aligned}$$

Sei zunächst $n \geq 3$. In sphärischen Koordinaten (ρ, s) mit $\rho = |y - x_0|$ und $s \in \mathbb{S}^{n-2}$ ausgedrückt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)d\sigma(y) &\leq \frac{2^{n+1}x_n}{nV_n}(n-1)V_{n-1}\int_\delta^\infty \frac{\rho^{n-2}d\rho}{\rho^n} \\
&= 2^{n+1}x_n\frac{(n-1)V_{n-1}}{nV_n}\int_\delta^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} \\
&= \frac{2^{n+1}x_n}{\delta}\frac{(n-1)V_{n-1}}{nV_n} \leq \frac{\varepsilon}{2\sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}|g(y)|}
\end{aligned}$$

für alle hinreichend kleinen $x_n > 0$. Für $n = 2$ erhalten wir mit $z = y - x_0$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)d\sigma(y) &\leq \frac{2^3 x_2}{2V_2}\left(\int_\delta^\infty + \int_{-\infty}^{-\delta}\right)\frac{dz}{z^2} \\
&= \frac{8x_2}{\delta V_2} \leq \frac{\varepsilon}{2\sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}|g(y)|}.
\end{aligned}$$

Damit ist $I + J \leq 2\varepsilon$ für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0. Damit ist auch (c) nachgewiesen und der Beweis abgeschlossen. □

2.9. Die Greensche Funktion für eine Kugel

Zunächst betrachten wir die Einheitskugel um den Ursprung. Durch geeignete Transformation können alle Ergebnisse auf eine beliebige Kugel übertragen werden. Man bemerke, dass die Resultate aus Abschnitt 2.7 in dieser Situation wieder anwendbar sind.

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definieren wir die Inversion an der Kugeloberfläche $\partial B_1(0)$ durch

$$\bar{x} := \frac{x}{|x|^2}.$$

Diese hat offenbar die Eigenschaften

(a) $|\bar{x}| = |x|^{-1}$,
(b) $x \in B_1(0) \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$,
(c) $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)} \Rightarrow \bar{x} \in B_1(0)$,
(d) $x \in \partial B_1(0) \Rightarrow \bar{x} = x$.

Wir wollen für $x \in B_1(0)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta_y F_x(y) = 0, & y \in B_1(0), \\ F_x(y) = \Phi(y - x), & y \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

lösen, um die Greensche Funktion für die Kugel zu bestimmen.

Es sei zunächst $n \geq 3$. Für $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ ist $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ und die Funktion

$$B_1(0) \ni y \mapsto \Phi(y - \bar{x})$$

somit harmonisch. Offenbar ist damit auch

$$B_1(0) \ni y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y - \bar{x}) = \Phi(|x|(y - \bar{x}))$$

harmonisch, außerdem gilt für jedes $y \in \partial B_1(0)$

$$
\begin{aligned}
||x|(y-\overline{x})| &= |x|\left(|y|^2 - 2\langle y,\overline{x}\rangle + |\overline{x}|^2\right)^{1/2} = |x|\left(\underbrace{|y|^2}_{=1} - 2\frac{\langle y,x\rangle}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right)^{1/2} \\
&= \left(|x|^2 - 2\langle y,x\rangle + \underbrace{1}_{=|y|^2}\right)^{1/2} = |x-y|
\end{aligned}
$$

und somit $\Phi(|x|(y-\overline{x})) = \Phi(y-x)$. Setzen wir also

$$
F_x(y) := \begin{cases} \Phi(|x|(y-\overline{x})), & x \in B_1(0)\setminus\{0\}, \\ \Phi(z) \text{ mit } |z|=1, & x = 0, \end{cases}
$$

so ist $G(x,y) := \Phi(x-y) - F_x(y)$ die Greensche Funktion für $B_1(0)$ mit $n \geq 3$.

Analog behandeln wir auch den Fall $n = 2$. Hier ist die Funktion

$$
B_1(0) \ni y \mapsto \Phi(y-\overline{x}) - \frac{1}{2\pi}\log|x| = \Phi(|x|(y-\overline{x}))
$$

harmonisch und dieselbe Rechnung wie oben zeigt

$$
\Phi(y-\overline{x}) - \frac{1}{2\pi}\log|x| = \Phi(y-x) \quad , y \in \partial B_1(0).
$$

Wir setzen also

$$
F_x(y) := \begin{cases} \Phi(y-\overline{x}) - \frac{1}{2\pi}\log|x|, & x \in B_1(0)\setminus\{0\} \\ 0, & x = 0, \end{cases}
$$

und finden $G(x,y) := \Phi(x-y) - F_x(y)$ als die Greensche Funktion für $B_1(0)$ mit $n = 2$.

Ist $g \in C(\partial B_1(0))$ und ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Randwertaufgabe

$$
\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u = g & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases}
$$

so kann man u nach Satz 2.29 darstellen als

$$
u(x) = -\int_{\partial B_1(0)} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}\,d\sigma(y).
$$

Um die Normalenableitung der Greenschen Funktion zu bestimmen, berechnen wir

$$
\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|x|(y-\overline{x}))
$$

und

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) = \frac{1}{nV_n}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^n},
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|x|(y-\overline{x})) &= \frac{1}{nV_n}\frac{|x|\overline{x_i}-|x|y_i}{(|x|\cdot|y-\overline{x}|)^n}|x| \\
&\overset{|x|^2\overline{x_i}=x_i}{=} \frac{1}{nV_n}\frac{x_i-|x|^2y_i}{(|x|\cdot|y-\overline{x}|)^n} \\
&= \frac{1}{nV_n}\frac{x_i-|x|^2y_i}{|x|^n\left(|y|^2-2|x|^{-2}\langle x,y\rangle+|x|^{-2}\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{1}{nV_n}\frac{x_i-|x|^2y_i}{\left(|x|^2-2\langle x,y\rangle+|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{1}{nV_n}\frac{x_i-|x|^2y_i}{|x-y|^n},
\end{aligned}$$

wobei wieder verwendet wurde, dass $|y|^2=1$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)} &= \langle\nabla_y G(x,y),\nu(y)\rangle = \sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y)\frac{y_i}{|y|} \\
&= \frac{1}{|y|}\frac{1}{nV_n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}-\frac{x_i-|x|^2y_i}{|x-y|^n}\right)y_i \\
&= \frac{1}{|y|}\frac{1}{nV_n}\frac{1}{|x-y|^n}\left(\langle x,y\rangle-|y|^2-\langle x,y\rangle+|x|^2|y|^2\right).
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}(x,y)\right|_{|y|=1} = \frac{1}{nV_n}\frac{|x|^2-1}{|x-y|^n}$$

und wir erhalten die *Poisson-Formel für die Einheitskugel*

$$u(x)=\frac{1-|x|^2}{nV_n}\int_{\partial B_1(0)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}d\sigma(y).$$

Der Integralkern

$$K(x,y):=\frac{1-|x|^2}{nV_n}\frac{1}{|x-y|^n},\qquad x\in B_1(0),y\in\partial B_1(0)$$

heißt der *Poisson-Kern für die Einheitskugel*.

Wir wollen nun die Poisson-Formel auf beliebige Kugeln übertragen. Löst u die Randwertaufgabe

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B_r(0),\\ u=g & \text{auf } \partial B_r(0),\end{cases}\tag{2.18}$$

so ist $\tilde{u}(x)=u(rx),x\in B_1(0)$ eine Lösung von

$$\begin{cases}\Delta\tilde{u}=0 & \text{in } B_1(0),\\ \tilde{u}=\tilde{g} & \text{auf } \partial B_1(0),\end{cases}$$

mit $\tilde{g}(x):=g(rx)$. Folglich gilt

$$u(rx)=\frac{1-|x|^2}{nV_n}\int_{\partial B_1(0)}\frac{g(ry)}{|x-y|^n}d\sigma(y)$$

und mit der Transformation $B_1(0) \ni x \mapsto x' := rx \in B_r(0)$ erhalten wir die Poisson-Formel

$$\begin{aligned} u(x') &= \frac{1 - r^{-2}|x'|^2}{nV_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{g(ry)}{|r^{-1}x' - y|^n} d\sigma(y) \\ &\overset{y'=ry}{=} \frac{1 - r^{-2}|x'|^2}{nV_n} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y')}{|r^{-1}x' - r^{-1}y'|^n} r^{-(n-1)} d\sigma(y) \\ &= \frac{r^2 - |x'|^2}{nV_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y')}{|x' - y'|^n} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Somit ist der Poisson-Kern für die Kugel $B_r(0)$ gegeben durch

$$K(x, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{nV_n r} \frac{1}{|x - y|^n}, \quad x \in B_r(0), y \in \partial B_r(0).$$

Zur Herleitung der Poisson-Formel haben wir die Existenz einer Lösung zur Randwertaufgabe (2.18) vorausgesetzt. Dass eine solche tatsächlich existiert, liefert uns der folgende Satz:

SATZ 2.32. *Es sei $g \in C(\partial B_r(0))$ und $u(x)$ sei definiert durch das Poisson-Integral*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{nV_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y).$$

Dann gelten

(a) $u \in C^\infty(B_r(0))$,
(b) $\Delta u = 0$ *in* $B_r(0)$,
(c) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_r(0)}} u(x) = g(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial B_r(0)$.

BEWEIS. Diese Aussage beweist man analog zu Satz 2.31. □

2.10. Fourier-Methode

Hier untersuchen wir im Fall $n = 2$ die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u = g & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

In Polarkoordinaten lautet die Laplace-Gleichung

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad \rho \in (0, 1).$$

Wir machen einen Ansatz mit Trennung der Variablen als $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ und erhalten so

$$\begin{aligned} & \rho^2 R''(\rho)\Phi(\varphi) + \rho R'(\rho)\Phi(\varphi) + R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile sind die Variablen getrennt, die Terme auf beiden Seiten sind folglich konstant. Nennen wir diese Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

(1) $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \quad \rho \in (0, 1)$,

(2) $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$.

Zunächst betrachten wir (2). Die Funktion Φ muss 2π-periodisch sein und aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir dann

$$\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \Phi(\varphi) = a\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + b\cos(\sqrt{\lambda}\varphi).$$

Setze

$$\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} b_0, & k = 0, \\ a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi), & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nun kommen wir zu (1). Zunächst sei $(\sqrt{\lambda} =)k \neq 0$. Mit dem Ansatz $R(\rho) = \rho^\alpha$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho\alpha\rho^{\alpha-1} - k^2\rho^\alpha = 0 \\ \Rightarrow \quad & (\alpha^2 - \alpha + \alpha - k^2)\rho^\alpha = 0 \quad \forall \rho \in (0,1) \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 = k \quad \text{und} \quad \alpha_2 = -k. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann $R_k(\rho) = c_k\rho^k + d_k\rho^{-k}$. Im Falle $k = 0$ wird (1) zu

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0.$$

Mit $V(\rho) := R'(\rho)$ gilt

$$\begin{aligned} \rho^2 V'(\rho) + \rho V(\rho) = 0 \quad & \Rightarrow \quad \frac{V'(\rho)}{V(\rho)} = -\frac{1}{\rho} \;\Rightarrow\; V(\rho) = \frac{d_0}{\rho} \\ & \Rightarrow \quad R'(\rho) = \frac{d_0}{\rho} \;\Rightarrow\; R_0(\rho) = d_0 \log(\rho) + c_0. \end{aligned}$$

Da die von uns gesuchte Funktion in 0 keinen Pol haben kann, ist $d_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und wir erhalten letztlich

$$R_k(\rho) = \begin{cases} c_k\rho^k, & k \in \mathbb{N}, \\ c_0, & k = 0. \end{cases}$$

Damit löst

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\rho)\Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi))$$

die Laplacegleichung, sofern die Reihe konvergiert (hier haben wir $c_k = 1$ gesetzt für alle $k \in \mathbb{N}_0$).

Auf dem Rand des Einheitskreises erhalten wir so

$$u(1, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(1)\Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)).$$

Besitzt g eine absolut konvergente Fourier-Reihe, so ist diese eindeutig und die Koeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}, \\ b_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \quad a_0 = 0. \end{aligned}$$

SATZ 2.33. *Seien $n = 2$ und $g \in C(\partial B_1(0))$. Die Fourier-Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi))$$

von g sei absolut und gleichmäßig konvergent gegen $g(\varphi)$. Dann ist

$$u(\rho, \varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \tag{2.19}$$

harmonisch und es gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_1(0)}} u(x) = g(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \partial B_1(0).$$

BEMERKUNGEN.

(a) Für jedes $\rho \in [0, 1]$ und jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist die Reihe (2.19) absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)| \, .$$

(b) Für den Beweis der gleichmäßigen Konvergen einer Funktionenreihe ist oft das Kriterium von Weierstraß nützlich: Gilt $|f_n(x)| \leq a_n \; \forall x$ und ist $\sum a_n$ ist konvergent, so konvergiert $\sum f_n(x)$ gleichmäßig.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass $u \in C^2(B_1(0))$ ist. Da g stetig ist, gilt mit dem Lemma von Riemann-Lebesgue (s. Anhang)

$$a_k, b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Somit ist

$$C := \max \left(\sup_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k|, \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |b_k| \right) < \infty.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \partial_\varphi \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k \left(|a_k \sin(k\varphi)| + |b_k \cos(k\varphi) \right) \\ &\leq 2C \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{(k+1)\rho^{k+1}}{k\rho^k} \xrightarrow{k \to \infty} \rho < 1$$

folgt mit dem Quotientenkriterium, dass diese Reihe absolut konvergiert für alle $\rho \in [0, 1)$. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß ist dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_\varphi \rho^k (a_k \cos(k\varphi) - b_k \sin(k\varphi))$$

absolut und gleichmäßig konvergent in $(\rho, \varphi) \in B_{1-\varepsilon}(0)$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Somit ist $u(\rho, \varphi)$ bezüglich φ differenzierbar und die Reihe (2.19) lässt sich gliedweise nach φ differenzieren, d.h.

$$\partial_\varphi u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\varphi \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \quad \forall (\rho, \varphi) \in B_{1-\varepsilon}(0).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$\partial_\varphi u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\varphi \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \quad \forall (\rho, \varphi) \in B_1(0).$$

Mit den gleichen Argumenten erhalten wir aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \partial_\rho \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \right| \leq 2C \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = 2C \frac{d}{d\rho} \frac{1}{1-\rho},$$

dass u bezüglich ρ differenzierbar ist mit

$$\partial_\rho u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\rho \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) \quad \forall (\rho, \varphi) \in B_1(0).$$

Analog zum bisherigen Vorgehen kann man die Existenz beliebiger partieller Ableitungen beweisen. Somit ist insbesondere $u \in C^2(B_1(0))$. Durch gliedweises Differenzieren erhalten wir dann

$$\Delta u = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \rho^k (a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)) = 0$$

für alle $(\rho, \varphi) \in B_1(0)$, d.h. u ist harmonisch.

Zu zeigen bleibt die Randbedingung. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \rho^k |a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in (0, 1)$. Die Funktion

$$F_N : \overline{B_1(0)} \ni (\rho, \varphi) \mapsto \sum_{k=0}^{N} (\rho^k - 1)(a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi))$$

ist stetig und verschwindet auf $\partial B_1(0)$. Daher gibt es ein $\rho_0 > 0$ mit

$$|F_N(\rho, \varphi)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \rho \in (\rho_0, 1], \ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Für beliebige $\rho \in (\rho_0, 1)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} |u(\rho, \varphi) - g(\varphi)| \quad &\leq \quad |F_N(\rho, \varphi)| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \rho^k |a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)| \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)| \\ &< \quad 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. $\square$

2.11. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertaufgaben

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $g \in C(\partial\Omega)$. Schreibe $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Man betrachtet die folgenden Randwertaufgaben für die Laplacegleichung:

RWA (1) *Inneres Dirichlet-Problem:* Finde ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

RWA (2) *Äußeres Dirichlet-Problem:* Finde ein $u \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega', \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega'. \end{cases}$$

RWA (3) *Inneres Neumann-Problem:* Sei $\partial\Omega \in C^1$. Finde ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

RWA (4) *Äußeres Neumann-Problem:* Sei $\partial\Omega \in C^1$. Finde ein $u \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega', \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega'. \end{cases}$$

RWA (5) *Inneres Robin-Randwertproblem:* Seien $\partial\Omega \in C^1$ und $\alpha \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u + \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

RWA (6) *Äußeres Robin-Randwertproblem:* Seien und $\partial\Omega \in C^1$ und $\alpha \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega', \\ u + \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega'. \end{cases}$$

Man benutzt auch die folgende Terminologie:

$$\begin{aligned} \text{Dirichlet} &= \text{1. RWA} \\ \text{Neumann} &= \text{2. RWA} \\ \text{Robin} &= \text{3. RWA.} \end{aligned}$$

Unsere bisherigen Ergebnisse zu diesen Randwertaufgaben fassen sich wie folgt zusammen:

- zu (1): Eindeutigkeit (Korollar 2.18), Existenz für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ (Satz 2.33).
- zu (2): Existenz für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ (Übungsaufgabe).

- zu (3): Notwendige Existenzbedingung
$$\int_{\partial\Omega} g(x)d\sigma(x) = 0 \quad \text{(Übungsaufgabe).}$$
- zu (4) bis (6): Nichts.

Wir können die Liste leicht um eine Eindeutigkeitsaussage erweitern.

SATZ 2.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^1-Rand. Dann existiert bis auf eine additive Konstante höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Neumann RWA (3).*

BEWEIS. Sind $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ Lösungen der RWA (3), so löst $w := u_1 - u_2$ die RWA
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Mit der Greenschen Formel erhalten wir daraus
$$\int_\Omega |\nabla w| dx = \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla w \rangle dx = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma(x) - \int_\Omega w \Delta w dx = 0$$
und es folgt $|\nabla w| \equiv 0$. Damit ist w lokal konstant und somit auch in ganz Ω konstant, denn Ω ist nach Annahme zusammenhängend. Daher ist $u_1 = u_2 + \text{konst.}$ □

2.12. Das Perronverfahren

DEFINITION 2.35. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, falls*
$$u(x) \leq \frac{1}{nV_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y)$$
für alle $r > 0$ und $x \in \Omega$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

BEMERKUNG. Ist $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch, so gilt $\Delta u \geq 0$ (Übungsaufgabe!).

SATZ 2.36. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch. Dann gilt*
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

BEWEIS. Übungsaufgabe. □

Sei $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere
$$S_g := \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \text{ subharmonisch in } \Omega \text{ und } u \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Diese Menge ist nicht leer: Ist $c := \min_{x \in \partial\Omega} g(x)$, so ist die konstante Funktion $u \equiv c$ subharmonisch und es gilt $u \leq g$. Somit ist $u \in S_g$.

Unter dem Perronverfahren versteht man das folgende Ergebnis:

LEMMA 2.37. *Die Funktion*
$$u(x) := \sup_{v \in S_g} v(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$
ist harmonisch in Ω.

Den Beweis hierfür werden wir an einer späteren Stelle führen (s. Abschnitt 2.14). Zunächst wollen wir zeigen, dass

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x\in\Omega}} u(x) = g(y) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

LEMMA 2.38. *Seien u wie in Lemma 2.37 und*

$$T_g := \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid -v \text{ ist subharmonisch in } \Omega \text{ und } v \geq g \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Dann gilt $u \leq w$ auf $\overline{\Omega}$ für alle $w \in T_g$.

BEWEIS. Zu beliebigen $v \in S_g, w \in T_g$ betrachte $\xi := v - w$. Dann ist ξ subharmonisch in Ω und aus $\xi|_{\partial\Omega} \leq g - g = 0$ folgt mit Satz 2.36, dass $\xi \leq 0$ und damit $v \leq w$ auf ganz $\overline{\Omega}$. Folglich ist

$$u(x) = \sup_{v\in S_g} v(x) \leq w(x)$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$. □

DEFINITION 2.39. *Eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genügt der* äußeren Kugelbedingung, *falls für alle $x \in \partial\Omega$ eine Kugel $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ existiert mit $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{x\}$.*

LEMMA 2.40. *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge, die der äußeren Kugelbedingung genügt, $g \in C(\partial\Omega)$ und*

$$u(x) := \sup_{v\in S_g} v(x).$$

Dann gilt $u \in C(\overline{\Omega})$ und

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x\in\Omega}} u(x) = g(y) \quad \forall y \in \partial\Omega. \tag{2.20}$$

BEWEIS. Nach Lemma 2.37 ist $u \in C(\Omega)$, zu zeigen ist also nur noch (2.20). Seien dazu $y \in \partial\Omega$ und $B_R(x_0)$ hierzu eine äußere Kugel, d.h. $\overline{\Omega} \cap \overline{B_R(x_0)} = \{y\}$. Betrachte die Funktion

$$H(x) := \begin{cases} R^{2-n} - |x-x_0|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \log \dfrac{|x-x_0|}{R}, & n = 2. \end{cases}$$

Wir halten fest:

(a) H ist harmonisch in einer Umgebung von Ω.
(b) $H > 0$ auf $\partial\Omega \setminus \{y\}$ und $H(y) = 0$.

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ wählen wir nun ein $\delta \in (0,1)$ mit

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \forall x \in \overline{B_\delta(y)} \cap \partial\Omega.$$

BEHAUPTUNG. Es gibt ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon + C_\varepsilon H(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Ist $|x - y| \leq \delta$, so gilt

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \overset{\text{(b)}}{\leq} \varepsilon + C_\varepsilon H(x)$$

für jedes $C_\varepsilon > 0$. Sei also noch $|x-y| > \delta$ mit $x \in \partial\Omega$. dann ist

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x)| + |g(y)| \leq 2\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \frac{H(x)}{H_\delta}$$

mit

$$H_\delta := \min_{\substack{x\in\partial\Omega \\ |x-y|\geq\delta}} H(x) \overset{\text{(b)}}{>} 0.$$

Folglich gilt

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon + C_\varepsilon H(x) \quad \text{mit } C_\varepsilon := \frac{2\|g\|_{L^\infty(\partial(\Omega))}}{H_\delta}$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\boxed{\text{B}}$

Es folgt nun

$$g(y) - \varepsilon - C_\varepsilon H(x) \leq g(x) \leq g(y) + \varepsilon + C_\varepsilon H(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Daher und wegen (a) ist

$$g(y) - \varepsilon - C_\varepsilon H(\cdot) \in S_g \tag{2.21}$$

und

$$g(y) + \varepsilon + C_\varepsilon H(\cdot) \in T_g. \tag{2.22}$$

Nach Definition von u ist wegen (2.21) dann

$$g(y) - \varepsilon - C_\varepsilon H(x) \leq u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

und Lemma 2.38 zusammen mit (2.22) impliziert

$$u(x) \leq g(y) + \varepsilon + C_\varepsilon H(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir

$$|u(x) - g(y)| \ \leq \ \varepsilon + C_\varepsilon H(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Da ε beliebig klein sein darf und H stetig ist und in y verschwindet, folgt hieraus

$$|u(x) - g(y)| \xrightarrow{x\to y} 0.$$

□

Als unmittelbare Konsequenz aus den Lemmata 2.37 und 2.40 erhalten wir im folgenden Satz die Existenzaussage, die Eindeutigkeit wurde bereits in Korollar 2.18 gezeigt.

SATZ 2.41. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge, die die äußere Kugelbedingung erfüll, und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega, \\ u = g & \textit{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2.13. Nichtexistenz klassischer Lösungen

Wir bezeichnen Punkte im $\mathbb{R}^3$ als (x,z) mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$ und betrachten die Funktion

$$v(x,z) = \int_0^1 \frac{sds}{\sqrt{|x|^2 + (s-z)^2}} \geq 0. \tag{2.23}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial z} &= -\int_0^1 \frac{(z-s)sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 3\int_0^1 \frac{(z-s)^2 sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{5/2}} - \int_0^1 \frac{sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla_x v(x,z) &= -\int_0^1 \frac{|x|sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}} \frac{x}{|x|} = -x\int_0^1 \frac{sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}}, \\
\Delta_x v(x,z) &= -2\int_0^1 \frac{sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}} + 3\int_0^1 \frac{|x|^2 sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\Delta v = -3\int_0^1 \frac{sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{3/2}} + 3\int_0^1 \frac{\left(|x|^2+(z-s)^2\right) sds}{(|x|^2+(s-z)^2)^{5/2}} = 0 \tag{2.24}$$

für alle $(x,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ z \in [0,1]\}$.

Das Integral in (2.23) kann in geschlossener Form ausgerechnet werden, dazu schreibe

$$\begin{aligned}
v(x,z) = &\underbrace{\sqrt{|x|^2+(1-z)^2} - \sqrt{|x|^2+|z|^2}}_{=:v_1} \\
&\underbrace{+ z\log\left|\left[(1-z)+\sqrt{|x|^2+(1-z)^2}\right]\cdot\left[z+\sqrt{|x|^2+z^2}\right]\right|}_{=:v_2} \\
&\underbrace{-2z\log|x|}_{=:v_3}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,z)\to 0} v_1(x,z) &= 1, \\
\lim_{(x,z)\to 0} v_2(x,z) &= 0, \\
\lim_{\substack{(x,z)\to 0 \\ |x|=e^{-\frac{\gamma}{2z}} \\ z>0,\gamma>0}} v_3(x,z) &= \lim_{z\to 0}\left(-2z\frac{-\gamma}{2z}\right) = \gamma,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

und daher

$$\lim_{\substack{(x,z)\to 0 \\ |x|=e^{-\frac{\gamma}{2z}} \\ z>0,\gamma>0}} v(x,z) = 1+\gamma,$$

d.h. v ist nicht stetig im Punkte $(0,0) \in \mathbb{R}^3$.

Nun seien $c > 0$ beliebig und

$$\Omega := \{(x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid v(x,z) < 1 + c\} \cap B_1(0).$$

Dieses Ω erfüllt nicht die äußere Kugelbedingung, denn es gibt keine Kugel $B \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ mit $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{(0,0)\}$.

Sei nun

$$g(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \partial\Omega \setminus B_1(0), \\ 1 + c, & x \in \partial\Omega \cap B_1(0). \end{cases}$$

Offenbar ist $g \in C(\partial\Omega)$.

Behauptung: Das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.26}$$

besitzt keine klassische Lösung, d.h. es gibt kein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, das (2.26) genügt.

Beweis. Nach (2.24) ist v harmonisch in Ω. Ferner gilt $v(x) = g(x)$ für alle $x \in \partial\Omega \setminus \{(0,0)\}$. Da $(0,0) \in \partial\Omega$ ist, ist jedoch $v \notin C(\overline{\Omega})$. Somit ist v keine klassische Lösung von (2.26).

Angenommen, u ist eine klassische Lösung von (2.26). Dann ist $u \in C(\overline{\Omega})$ und folglich ist $|u(x,z)|$ beschränkt. Weiterhin wissen wir, dass $0 \leq v(x,z) \leq 1 + c$ für alle $(x,z) \in \Omega$ gilt, und daher

$$\exists\, c_\Omega > 0 \text{ mit } |u(x,z) - v(x,z)| \leq c_\Omega \quad \forall (x,z) \in \Omega. \tag{2.27}$$

Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig. Betrachte

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \cap \{(x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |(x,z)| > \varepsilon\}.$$

Die Funktionen u und v sind harmonisch in Ω_ε und stetig in $\overline{\Omega_\varepsilon}$. Bertachte die Funktionen

$$w_\varepsilon^\pm(x,z) := c_\Omega \frac{\varepsilon}{|(x,z)|} \pm (u - v).$$

Sie sind harmonisch in Ω_ε. Es gilt

$$w_\varepsilon^\pm(x,z) = c_\Omega \frac{\varepsilon}{|(x,z)|} > 0 \quad \forall (x,z) \in \partial U_\varepsilon \setminus \partial B_\varepsilon(0).$$

Sei nun $(x,z) \in \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial B_\varepsilon(0)$ beliebig. Dann ist

$$w_\varepsilon^\pm = c_\Omega \pm (u - v) \overset{(2.27)}{\geq} 0.$$

Aus dem Maximumprinzip folgt $w_\varepsilon^\pm(x,z) \geq 0$ für $(x,z) \in \Omega_\varepsilon$ und somit

$$\begin{aligned} & c_\Omega \frac{\varepsilon}{|(x,y)|} \pm (u - v) \geq 0 \quad \forall (x,z) \in \Omega_\varepsilon \\ \Rightarrow\quad & c_\Omega \frac{\varepsilon}{|(x,y)|} \geq u - v \geq -c_\Omega \frac{\varepsilon}{|(x,y)|} \quad \forall (x,z) \in \Omega_\varepsilon \\ \Rightarrow\quad & |u - v| \leq \frac{c_\Omega \varepsilon}{|(x,y)|} \quad \forall (x,z) \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nun wähle $(x,z) \in \Omega$ beliebig (Bemerke: $0 \notin \Omega$). Dann ist

$$|u(x,z) - v(x,z)| \leq \frac{c\varepsilon}{|(x,y)|}$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Folglich ist $u = v$, jedoch ist v wie gezeigt keine klassische Lösung von (2.26). $\square$

2.14. Beweis von Lemma 2.37

LEMMA 2.42. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch. Für beliebige Kugeln $B_r(y)$ mit $\overline{B_r(y)} \subset \Omega$ setze*

$$u^{(y,r)}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus B_r(y), \\ \dfrac{r^2 - |x-y|^2}{nV_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(y)} \frac{u(z)}{|x-z|^n} d\sigma(z), & x \in B_r(y). \end{cases}$$

Dann gelten

(a) *$u \leq u^{(y,r)}$ in Ω,*
(b) *$u^{(y,r)}$ ist subharmonisch in Ω.*

BEMERKUNG. Die Funktion $u^{(y,r)}$ ist harmonisch in $B_r(y)$ und stetig in Ω, denn sie ist die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_r(y), \\ v = u & \text{auf } \partial B_r(y). \end{cases}$$

BEWEIS VON LEMMA 2.42. (a) $u - u^{(y,r)}$ ist subharmonisch in $B_r(y)$. Aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (Satz 2.36) folgt

$$u(x) - u^{(y,r)}(x) \leq \max_{z \in \partial B_r(y)} \left(u(z) - u^{(y,r)}(z) \right) = 0, \quad x \in B_r(y)$$

und somit $u \leq u^{(y,r)}$ in Ω.

(b) Angenommen, $u^{(y,r)}$ ist nicht subharmonisch. Dann gibt es ein $x_0 \in \Omega$ und ein $R > 0$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ und

$$u^{(y,r)}(x_0) > \frac{1}{nV_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u^{(y,r)}(z) d\sigma(z). \tag{2.28}$$

BEHAUPTUNG: $x_0 \in B_r(y)$.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Angenommen, $x_0 \in \Omega \setminus B_r(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{nV_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u^{(y,r)}(z) d\sigma(z) &\overset{(a)}{\geq} \frac{1}{nV_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(z) d\sigma(z) \\ &\geq u(x_0) \ = \ u^{(y,r)}(x_0), \end{aligned}$$

doch dies steht im Widerspruch zu (2.28). $\boxed{\text{B}}$

Betrachte

$$w(x) = \begin{cases} u^{(y,r)}(x), & x \in \Omega \setminus B_R(x_0), \\ \dfrac{R^2 - |x-x_0|^2}{nV_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u^{(y,r)}(z)}{|x-z|^n} d\sigma(z), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (a) ist
(2.29)

$$w(x) \geq \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus B_R(x_0), \\ \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{nV_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(z)}{|x - z|^n} d\sigma(z), & x \in B_R(x_0) \end{cases} = u^{(x_0,R)}(x)$$

für alle $x \in \Omega$.

Da w harmonisch in $B_R(x_0)$ ist, erhält man aus (2.28) die Ungleichung

$$u^{(y,r)}(x_0) > \frac{1}{nV_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} w(z) d\sigma(z) = w(x_0). \tag{2.30}$$

Der Rand der Schnittmenge $B_R(x_0) \cap B_r(y)$ lässt sich schreiben als Vereinigung

$$\partial(B_R(x_0) \cap B_r(y)) = \left(\partial B_R(x_0) \cap \overline{B_r(y)}\right) \cup \left(\partial B_r(y) \cap \overline{B_R(x_0)}\right) =: R_1 \cup R_2.$$

Die Funktion $u^{(y,r)} - w$ ist harmonisch in $B_r(y) \cap B_R(x_0) \neq \varnothing$ und $u^{(y,r)} - w = 0$ auf R_1. Mit dem Maximumprinzip erhalten wir aus (2.30) die Existenz eines Punktes $x_1 \in R_2$ mit $u^{(y,r)}(x_1) > w(x_1)$. Da $u^{(y,r)} = u$ auf $\partial B_r(y)$ ist, gilt

$$u(x_1) > w(x_1) \overset{(2.29)}{\geq} u^{(x_0,R)}(x_1).$$

Das jedoch ist ein Widerspruch zu (a). □

Bemerkung. In (2.30) wurde die folgende Variante des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen benutzt: Sei $w \in C^2(B_R(x_0)) \cap C(\overline{B_R(x_0)})$ harmonisch in $B_R(x_0)$. Dann gilt

$$\frac{1}{nV_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} w(z) d\sigma(z) = w(x_0).$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $R > 1$. Nach Satz 2.15 gilt für $\rho < R$

$$w(x_0) = \frac{1}{nV_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} w(z) d\sigma(z) = \frac{1}{nV_n} \int_{\partial B_1(x_0)} w(\rho s) d\sigma(s).$$

Da u in $\overline{B_R(x_0)}$ gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\lim_{\rho \to R} w(\rho s) = w(Rs)$$

gleichmäßig in $s \in \partial B_1(x_0)$ und wir erhalten

$$\lim_{\rho \to R} \int_{\partial B_1(x_0)} w(\rho s) d\sigma(s) = \int_{\partial B_1(x_0)} w(Rs) d\sigma(s) = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} w(z) d\sigma(z).$$

□

Lemma 2.43 (Konvergenzsatz von Harnack). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ eine monoton steigende Folge von harmonischen Funktionen, d.h. $u_{j+1}(x) \geq u_j(x)$ für alle $x \in \Omega$. Es gebe ein $y \in \Omega$ so, dass die Folge $(u_j(y))_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann konvergiert $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

LEMMA 2.44. *Seien $v_1, \dots, v_N \in C(\Omega)$ subharmonisch. Dann ist die Funktion*

$$v(x) := \max_{i=1,\dots,N} v_i(x)$$

ebenfalls subharmonisch.

BEWEIS. Übungsaufgabe. □

BEWEIS VON LEMMA 2.37. Es ist zu zeigen, dass

$$u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x)$$

harmonisch in Ω ist. Infolge des Maximumprinzips gilt

$$u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} g(y) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Zu einem festen $y \in \Omega$ können wir nach Definition von u eine Folge $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in S_g wählen mit

$$\lim_{j\to\infty} v_j(y) = u(y). \tag{2.31}$$

Nach Lemma 2.44 ist $\tilde{v}_j(x) := \max_{k=1,\dots,j} v_k(x)$ subharmonisch, außerdem ist die Folge $(\tilde{v}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ offenbar monoton steigend und

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{v}_j(y) = u(y) \tag{2.32}$$

wegen $v_j(y) \leq u(y)$ und (2.31).

Sei $r > 0$ mit $\overline{B_r(y)} \subset \Omega$. Betrachte

$$\tilde{v}_j^{(y,r)}(x) := \begin{cases} \tilde{v}_j(x), & x \in \overline{\Omega} \setminus B_r(y) \\ \dfrac{r^2 - |x-y|^2}{nV_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(y)} \frac{\tilde{v}_j(z)}{|x-z|^n} d\sigma(z), & x \in B_r(y). \end{cases}$$

Die Folge $(\tilde{v}_j^{(y,r)})_{j \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend und beschränkt. Nach Lemma 2.42 ist $\tilde{v}_j(x) \leq \tilde{v}_j^{(y,r)}(x)$ für alle $x \in \Omega$, außerdem ist $\tilde{v}_j^{(y,r)}$ subharmonisch in Ω und harmonisch in $B_r(y)$. Weiter gilt

$$\tilde{v}_j^{(y,r)} \in S_g \;\Rightarrow\; u(x) \geq \tilde{v}_j^{(y,r)}(x) \geq \tilde{v}_j(x),$$

und wegen (2.32) ist

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{v}_j^{(y,r)}(y) = u(y).$$

Aus Lemma 2.43 folgt nun, dass

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{v}_j^{(y,r)}(x) =: \tilde{u}(x) \quad \forall x \in B_r(y)$$

punktweise existiert und dass $\tilde{u} : B_r(y) \to \mathbb{R}$ harmonisch ist. Außerdem ist $\tilde{u}(y) = u(y)$.

BEHAUPTUNG: $\tilde{u}(x) = u(x)$ für alle $x \in B_r(y)$.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Sei $x_0 \in B_r(y)$ mit $x_0 \neq y$ beliebig. Sei $(v_j')_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S_g mit

$$\lim_{j\to\infty} v_j'(x_0) = u(x_0). \tag{2.33}$$

Setze $\hat{v}_j(x) := \max\{\tilde{v}_j(x), v_1'(x), \dots, v_j'(x)\}$ für alle $x \in \Omega$. Da $\hat{v}_j \in S_g$ ist, gilt für alle $x \in \Omega$ die Ungleichung $\hat{v}_j(x) \leq u(x)$. Aus (2.33) folgt, dass

$$\lim_{j\to\infty} \hat{v}_j(x_0) = u(x_0)$$

ist.

Betrachte

$$\hat{v}_j^{(y,r)}(x) := \begin{cases} \hat{v}_j(x), & x \in \overline{\Omega} \setminus B_r(y) \\ \dfrac{r^2 - |x-y|^2}{nV_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(y)} \frac{\hat{v}_j(z)}{|x-z|^n} d\sigma(z), & x \in B_r(y). \end{cases}$$

Die Folge $(\hat{v}_j^{(y,r)})_{j\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und beschränkt. Nach Lemma 2.42 ist $\hat{v}_j(x) \leq \hat{v}_j^{(y,r)}(x)$ für alle $x \in \Omega$, außerdem ist $\hat{v}_j^{(y,r)}$ subharmonisch in Ω und harmonisch in $B_r(y)$. Weiterhin gilt

$$\hat{v}_j^{(y,r)} \in S_g \;\Rightarrow\; u(x) \geq \hat{v}_j^{(y,r)}(x) \geq \hat{v}_j(x).$$

Mit (2.33) folgt daraus, dass

$$\lim_{j\to\infty} \hat{v}_j^{(y,r)}(x_0) = u(x_0).$$

Mit Lemma 2.43 folgt schließlich, dass

$$\lim_{j\to\infty} \hat{v}_j^{(y,r)}(x) =: \hat{u}(x) \quad \forall x \in B_r(y)$$

punktweise existiert, dass $\hat{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $\hat{u} : B_r(y) \to \mathbb{R}$ harmonisch ist. Außerdem gilt $\hat{u}(x) \leq u(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\hat{u}(x_0) = u(x_0)$.

Es gilt

$$\hat{v}_j(x) \geq \tilde{v}_j(x) \;\Rightarrow\; \hat{v}_j^{(y,r)}(x) \geq \tilde{v}_j^{(y,r)}(x) \;\Rightarrow\; \hat{u}(x) \geq \tilde{u}(x) \quad \forall x \in B_r(y),$$

und daher ist

$$w(x) := \hat{u}(x) - \tilde{u}(x) \geq 0 \quad \text{in } B_r(y).$$

Mit $\hat{v}_j^{(y,r)}(x) \leq u(x)$ ist aber

$$u(y) = \tilde{u}(y) \leq \hat{u}(y) \leq u(y),$$

und daher $w(y) = 0$. Aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (vgl. Satz 2.17) folgt dann, dass $w(x) = 0$ in $B_r(y)$ ist. $\boxed{\text{B}}$

Da $y \in \Omega$ beliebig war und $\tilde{u} : B_r(y) \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, folgt mit der soeben gezeigten Behauptung, dass u harmonisch ist in Ω. □

KAPITEL 3

Schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen

3.1. Elliptische Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g. \tag{3.1}$$

Der Einfachheit halber seien die Koeffizienten $a, \ldots, f$ konstant. Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch mit reellen Einträgen und besitzt daher zwei reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 ($\lambda_1 = \lambda_2$ ist möglich) mit Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{d.h. } M \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \ i = 1, 2.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ ist und die Eigenräume senkrecht zueinander sind, d.h.

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0.$$

Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal, d.h. es gilt

$$U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setze $u(x, y) = v(x', y')$ mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dann ist $\nabla u(x, y) = U \nabla v(x', y')$. Somit erhalten wir

$$au_{xx} + 2bu_{x,y} + cu_{yy} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) M \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) u}_{= \nabla u} \tag{3.2}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \right) U^T M U \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \right) v. \tag{3.3}$$

Weiterhin ist

$$MU = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$U^T MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

In Gleichung (3.2) eingesetzt liefert das

$$au_{xx} + 2bu_{x,y} + cu_{yy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix} v = \lambda_1 v_{x'x'} + \lambda_2 v_{y'y'}$$

und die partielle Differentialgleichung (3.1) erscheint in der Form

$$\lambda_1 v_{x'x'} + \lambda_2 v_{y'y'} + (\alpha_1 d + \beta_1 e) v_{x'} + (\alpha_2 d + \beta_2 e) v_{y'} + fv = g.$$

Hier unterscheidet man die drei wichtigsten Fälle:

(1) $\det M > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0$
Die PDGL heißt *elliptisch*, z.B. $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(2) $\det M < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0$
Die PDGL heißt *hyperbolisch*, z.B. die Wellengleichung $u_{xx} - u_{yy} = 0$ oder $u_{xy} = 0$.

(3) $\det M = 0$, aber entweder $\lambda_1 = 0$ und $\alpha_1 d + \beta_1 e \neq 0$ oder $\lambda_2 = 0$ und $\alpha_2 d + \beta_2 e \neq 0$
Die PDGL heißt *parabolisch*, z.B. die Wärmeleitungsgleichung $u_x = u_{yy}$.

Sei nun $n \geq 2$ beliebig und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1. *Der Differentialausdruck*

$$Lu(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x)$$

heißt (gleichmäßig) elliptisch, *wenn ein $\theta > 0$ existiert mit*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Omega$$

oder äquivalent alle Eigenwerte von $(a_{i,j}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ von unten beschränkt sind durch θ (man sagt auch „von Null weg beschränkt“).

Das einfachste Beispiel eines elliptischen Differentialoperators ist $L = -\Delta$. Hier ist $a_{i,j} \equiv 1$, $i, j = 1, \ldots, n$ und man kann $\theta = 1$ wählen.

Definition 3.2. *Sei L elliptisch. Dann heißt die Evolutionsgleichung $u_t + Lu = 0$* parabolisch *und die Evolutionsgleichung $u_{tt} + Lu = 0$ heißt* hyperbolisch.

3.2. Sobolev-Räume

3.2.1. Banach- und Hilberträume. Wir erinnern uns an die folgenden Begriffe und ihre Eigenschaften, welche aus der Linearen Algebra bekannt sind:

Ein Vektorraum B über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt *Banachraum*, wenn er mit einer Norm $\|\cdot\|$ ausgestattet und bezüglich dieser vollständig ist. Ein Banachraum $\mathcal{H}$ über $\mathbb{R}$ heißt (reeller) *Hilbertraum*, wenn die Norm hierbei von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ induziert wird, d.h. $\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{\mathcal{H}}}$ für alle $u \in \mathcal{H}$. Nicht jeder Banachraum ist auch ein Hilbertraum, betrachte z.B. $C([0,1])$ mit $\|u\| = \max\{|u(x)| \mid x \in [0,1]\}$. In Hilberträumen gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}, \quad u, v \in \mathcal{H},$$

wobei genau dann Gleichheit eintritt, wenn u und v linear abhängig sind.

Wir erinnern uns an einige aus der Analysis III bekannte Beispiele. Im Folgenden ist stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Der Raum $L^p(\Omega)$ der Äquivalenzklassen von zur p-ten Potenz über Ω Lebesgue-integrierbaren Funktionen, $p \in [1, \infty)$. Formal definieren wir diesen also als den Faktorraum

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}^p(\Omega)$$

mit

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$
$$\mathcal{N}^p(\Omega) := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid u = 0 \text{ fast überall in } \Omega\}$$

und

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum und im Falle $p = 2$ sogar ein Hilbertraum, denn die Norm wird dann induziert von dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

(2) Der Raum $L^\infty(\Omega)$ der wesentlich beschränkten messbaren Funktionen auf Ω. Formal erhalten wir diesen als

$$L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}^\infty(\Omega).$$

mit

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \operatorname*{ess-sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\},$$
$$\mathcal{N}^\infty(\Omega) := \{u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \mid u = 0 \text{ fast überall in } \Omega\}$$

und

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess-sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Auch $L^\infty(\Omega)$ ist ein Banachraum.

(3) Es gilt die Hölder-Ungleichung, d.h. für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\frac{1}{\infty} := 0$) ist $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(4) Analog können wir so auch vektorwertige Funktionen betrachten. Hierbei ist

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{u = (u_1, \dots, u_m) \,|\, u_1, \dots, u_m \in L^p(\Omega)\},$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)} := \left(\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

und wieder erhalten wir im Falle $p = 2$ sogar einen Hilbertraum mit

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)} := \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \langle u, v\rangle dx.$$

3.2.2. Sobolev-Räume. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$, $u \in L^p(\Omega)$ und $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ ein Multiindex. Ist die Distribution $D^\alpha u$ regulär, so heißt $D^\alpha u$ die *schwache Ableitung* von u. Für $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ stimmt die schwache Ableitung $D^\alpha u$ mit der klassischen Ableitung überein. Im Gegensatz zur klassischen Ableitung folgt aus der Existenz einer schwachen Ableitung jedoch nicht die Existenz der schwachen Ableitungen niedrigerer Ordnung (Übungsaufgabe!).

Definition 3.3. *Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$ definieren wir den* Sobolev-Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,|\, \text{für } |\alpha| \leq k \text{ existiert die schwache Ableitung } D^\alpha u \text{ und sie liegt in } L^p(\Omega)\}.$$

Für $p = 2$ schreibt man auch $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Definition 3.4. *Wir definieren die* Sobolev-Norm *als*

$$\|u\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess-sup}\, |D^\alpha u(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Für $p = 2$ schreibt man auch $\|\cdot\|_k := \|\cdot\|_{k,2}$.

In der Übung wird gezeigt, dass $W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_{k,p}$ ein Banachraum ist.

Behauptung. Der Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}.$$

Beweis. Symmetrie und Bilinearität folgen unmittelbar daraus, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ein Skalarprodukt ist und Differentiation linear ist. Ist $\langle u, u\rangle_k = 0$, so folgt auch

$$\langle u, u\rangle_{L^2} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \underbrace{\langle D^\alpha u, D^\alpha u\rangle_{L^2}}_{\geq 0} = 0,$$

also ist $\langle u, u\rangle_{L^2} = 0$ und damit auch $u = 0$ fast überall in Ω. So ist mit der Definitheit auch die letzte Eigenschaft eines Skalarproduktes nachgewiesen. Offensichtlich induziert $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_k}$ auch die Sobolev-Norm und mit dieser ist $H^k(\Omega)$ in der Tat vollständig. $\square$

Bemerkung. Offenbar ist

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}^2.$$

Insbesondere folgt aus Konvergenz $u_j \to u$ in $H^1(\Omega)$ auch $u_j \to u$ in $L^2(\Omega)$ sowie $\nabla u_j \to \nabla u$ in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

3.2.3. Sobolev-Räume $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Um schwache Lösungen zu Randwertproblemen zu finden, benötigen wir Sobolev-Funktionen, die auf dem Rand $\partial\Omega$ bestimmte Werte annehmen. In den meisten Situationen ist $\partial\Omega$ jedoch eine Nullmenge und im Sinne einer Äquivalenzklasse von Funktionen ist eine Vorgabe wie z.B. $u|_{\partial\Omega} = 0$ folglich ohne Bedeutung. Abhilfe schafft die in diesem Abschnitt beschriebene Begriffsbildung, welche durch den folgenden Satz motiviert wird.

Satz 3.5. *Seien $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so liegt $C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Mit anderen Worten existiert zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ eine Funktionenfolge $(u_j)_j \subset C^\infty(\Omega)$ mit $u_j \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{k,p} = 0.$$

Definition 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann setzen wir*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}},$$

d.h. $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{k,p}$. Für $p = 2$ schreiben wir $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Bemerkungen.

(1) $W_0^{k,p}(\Omega)$ (ausgestattet mit der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{k,p}$) ist per Definition ein abgeschlossener Teilraum von $W^{k,p}(\Omega)$ und als solcher ein Banachraum.

(2) In einem gewissen Sinne gilt hiermit in der Tat

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) \mid D^\alpha u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \ \forall |\alpha| \le k-1\}.$$

Um diese Eigenschaft zu präzisieren, braucht man den sogenannten Spuroperator, der eine Verallgemeinerung der Restriktionsabbildung $f \mapsto f|_{\partial\Omega}$ darstellt. In diesem Sinne ist $H_0^1(\Omega)$ die Menge aller Funktionen aus $H^1(\Omega)$, deren Spur auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet. Mit Hilfe des Spuroperators lassen sich auch Sobolev-Funktionen mit allgemeineren Randbedingungen festlegen, dies übersteigt jedoch den Umfang dieser Vorlesung.

(3) $W_0^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ ist möglich, z.B. ist $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
(4) Ist allerdings $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist $W^{k,p}(\Omega) \neq W_0^{k,p}(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty]$.
(5) Ist $W^{k,p}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$, so ist $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ eine Nullmenge (Satz von Lions).

3.3. Schwache Lösungen elliptischer Randwertaufgaben

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Differentialausdruck

$$\begin{aligned} Lu(x) &:= -\sum_{i,j=1}^n \left(a_{i,j}(x) u_{x_i}(x)\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x)u(x) \\ &= -\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n \left(b_i(x) - \sum_{j=1}^n (a_{i,j}(x))_{x_j} \right) u_{x_i}(x) + c(x)u(x) \end{aligned}$$

mit $a_{i,j}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Sei L gleichmäßig elliptisch, d.h. es gebe ein $\theta > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega.$$

Betrachte die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei zunächst alle Koeffizienten $a_{i,j}, b_i, c$ von L glatt seien. Ist u eine klassische Lösung, so erhalten wir für jedes $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega v(x) f(x) dx &= \int_\Omega v(x) Lu(x) dx \\ &= -\int_\Omega v(x) \operatorname{div}\left(A(x) \nabla u(x)\right) dx + \int_\Omega v(x) \langle b(x), \nabla u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx \\ &\quad + \int_\Omega v(x) c(x) u(x) dx. \end{aligned}$$

Hier ist $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ die matrixwertige Funktion mit $(A(x))_{j,i} = a_{i,j}(x)$ und $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die vektorwertige Funktion mit $(b(x))_i = b_i(x)$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_\Omega v(x) \operatorname{div}\left(A(x) \nabla u(x)\right) dx \overset{v \in C_0^\infty(\Omega)}{=} -\int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x) \nabla u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \int_\Omega v(x) f(x) dx &= \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x) \nabla u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx \\ &\quad + \int_\Omega v(x) \langle b(x), \nabla u(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Omega v(x) c(x) u(x) dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

Definition 3.7. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ heißt* Bilinearform, *wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ gilt*
(a) $B[\alpha u_1 + \beta u_2, v] = \alpha B[u_1, v] + \beta B[u_2, v]$,
(b) $B[u, \alpha v_1 + \beta v_2] = \alpha B[u, v_1] + \beta B[u, v_2]$.

Betrachte für alle $v, u \in H_0^1(\Omega)$ die Bilinearform

$$
\begin{aligned}
(3.5)\quad B[v,u] \;:=\; & \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x)\nabla u(x)\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx \\
& + \int_\Omega v(x)\, \langle b(x), \nabla u(x)\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Omega v(x)c(x)u(x)dx
\end{aligned}
$$

Gleichung (3.4) motiviert die folgende Definition.

Definition 3.8. *Sei $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt* schwache Lösung *der Randwertaufgabe*

$$
(3.6)\qquad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}
$$

wenn $B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Im nächsten Abschnitt studieren wir die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösungen dieser Randwertaufgabe.

3.4. Satz von Lax-Milgram, Poincaré-Ungleichung

Satz 3.9 (Satz von Lax-Milgram). *Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Es gebe Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit*

(a) $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\|, \quad u, v \in \mathcal{H},$ *(Beschränktheit)*
(b) $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u], \quad u \in \mathcal{H}.$ *(Koerzivität)*

Dann gibt es zu jedem stetigen linearen Funktional $l : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ genau ein $u \in \mathcal{H}$ mit $B[u,v] = l(v)$ für alle $v \in \mathcal{H}$.

Bemerkung. Für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ ist die Abbildung $H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle v, f\rangle_{L^2(\Omega)}$ ein stetiges lineares Funktional: Die Linearität ist hierbei offensichtlich, die Beschränktheit und damit die Stetigkeit folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, denn

$$
|\langle v, f\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_1 \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Wir wollen nun den Satz von Lax-Milgram auf $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ und die Bilinearform (3.5) anwenden, um die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösungen der Randwertaufgabe (3.6) zu zeigen.

Lemma 3.10. *Seien $a_{i,j}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist die Bilinearform (3.5) beschränkt.*

Beweis. 1.) Für das erste Integral in (3.5) gilt

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x)\nabla u(x)\rangle\, dx \right| &= \left| \langle \nabla v, A\nabla u\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \right| \\
&\leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \cdot \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v\|_1 \cdot \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Weiter ist

$$
\|A\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)\rangle\, dx = \int_\Omega |A(x)\nabla u(x)|^2 dx.
$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$|T\alpha| \leq \|T\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \cdot |\alpha| \quad \text{mit} \quad \|T\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} = \sup_{\beta\neq 0} \frac{|T\beta|}{|\beta|}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |A(x)\nabla u(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega \|A(x)\|^2_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \\
&\leq \text{ess-sup}\, \|A(x)\|^2_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \\
&\leq \text{ess-sup}\, \|A(x)\|^2_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \|u\|_1^2.
\end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}
|(A(x)\alpha)_i| &= |\langle \text{i-te Zeile von } A(x), \alpha\rangle| \leq |\text{i-te Zeile von } A(x)| \cdot |\alpha| \\
&\leq a\sqrt{n}|\alpha|
\end{aligned}$$

mit $a := \max_{1\leq i,j\leq n} \text{ess-sup}\, |a_{i,j}(x)|$. Damit ist

$$|A(x)\alpha| \leq \sqrt{n\left(a\sqrt{n}|\alpha|\right)^2} = na|\alpha|$$

Folglich ist

$$\|A(x)\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \leq na$$

und somit insgesamt

$$\left| \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x)\nabla u(x)\rangle \, dx \right| \leq na\|v\|_1\|u\|_1.$$

2.) Für das zweite Integral gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega v(x)\langle b(x), \nabla u(x)\rangle dx \right| &\leq \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |v(x)| \cdot |\nabla u(x)| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_1 \|u\|_1.
\end{aligned}$$

3.) Für das dritte Integral gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega v(x)c(x)u(x)dx \right| &\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_1 \|u\|_1.
\end{aligned}$$

4.) Kombinieren wir alle Teilergebnisse, so erhalten wir

$$|B[v,u]| \leq \left(na + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|v\|_1 \|u\|_1$$

und somit die Behauptung. □

LEMMA 3.11. *Es gibt* $\alpha, \beta > 0$ *mit*

$$\alpha \|u\|_1^2 \leq B[u,u] + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

BEWEIS. Da L gleichmäßig elliptisch ist, gilt

$$\begin{aligned}
\theta \int_\Omega |\nabla u|_{\mathbb{R}^n}^2 dx &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x) u_{x_i}(x) u_{x_j}(x) dx \\
&= B[u,u] - \int_\Omega u(x) \langle b(x), \nabla u(x) \rangle dx - \int_\Omega c(x) u(x)^2 dx \\
&\leq B[u,u] + \int_\Omega |u(x) \langle b(x), \nabla u(x) \rangle| \, dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Mit der elementaren Ungleichung $ab \leq a^2 + b^2$ ist auch

$$ab = (a\sqrt{\varepsilon})(\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}) \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Hiermit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x) \langle b(x), \nabla u(x) \rangle| \, dx &\leq \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u(x)| \cdot |\nabla u(x)| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{|u(x)|^2}{\varepsilon} + \varepsilon |\nabla u(x)|^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Wählen wir ε so klein, dass

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2},$$

so ist

$$\theta \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq B[u,u] + \frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \beta' \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit

$$\beta' := \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty} \right) + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0,$$

also schießlich

$$\frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq B[u,u] + \beta' \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\theta \|u\|_1^2 \leq B[u,u] + \beta \int_\Omega |u(x)|^2 dx, \quad \beta := \beta' + \frac{\theta}{2} > 0.$$

□

SATZ 3.12. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt. Dann gibt es ein* $\beta > 0$ *so, dass für jedes* $\mu \geq \beta$ *und jedes* $f \in L^2(\Omega)$ *genau eine schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *der Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

existiert.

BEWEIS. Setze $B_1[v,u] = B[v,u] + \mu\langle v,u\rangle_{L^2(\Omega)}$, $v,u \in H_0^1(\Omega)$. Mit Lemma 3.10 folgt dann

$$\begin{aligned} |B_1[v,u]| &\leq |B[v,u]| + \mu|\langle v,u\rangle_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq C\|v\|_1\|u\|_1 + \mu\|v\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (C+\mu)\|v\|_1\|u\|_1, \end{aligned}$$

d.h. B_1 ist beschränkt. Aufgrund von Lemma 3.11 ist

$$B_1[u,u] = B[u,u] + \mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq B[u,u] + \beta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha\|u\|_1^2,$$

d.h. B_1 ist auch koerziv. Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es daher genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $B_1[v,u] = \langle v,f\rangle_{L^2}$. □

BEMERKUNG. Der Satz macht keine Aussage über schwache Lösungen der Poissongleichung $\Delta u = f$. Dafür bräuchte man eine Variante des Satzes mit $\mu = 0$, im Allgemeinen gilt er in dieser Situation allerdings nicht: Es ist möglich, dass die Randwertaufgabe dann entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen besitzt. Unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen kann man die eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe aber auch für $\mu = 0$ beweisen.

3.4.1. Poincaré-Ungleichung.

SATZ 3.13 (Poincaré-Ungleichung). *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und in einem Würfel der Kantenlänge s enthalten, so gilt*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq s\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

BEWEIS. 1.) Zeige die Poincaré-Ungleichung für $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ohne Einschränkung sei $\Omega \subset W := (0,s)^n$. Setze

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in W \setminus \Omega, \end{cases}$$

offensichtlich ist dann $\tilde{u} \in C_0^\infty(W)$. Für feste $x_2,\dots,x_n \in (0,s)$ betrachte die Funktion $v(x_1) := \tilde{u}(x_1,\dots,x_n)$. Dann ist $v(0) = 0$ und für $x_1 > 0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} |v(x_1)| = |v(x_1) - v(0)| &= \left|\int_0^{x_1} v'(t)dt\right| \leq \int_0^s |v'(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^s dt\right)^{1/2}\left(\int_0^s |v'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{s}\left(\int_0^s |v'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int_0^s |v(x_1)|^2 dx_1 \leq s \sup_{x_1\in[0,s]} |v(x_1)|^2 \leq s^2\int_0^s |v'(t)|^2 dt.$$

Dies bedeutet

$$\int_0^s |\tilde{u}(x_1,\dots,x_n)|^2 dx_1 \leq s^2\int_0^s |\tilde{u}_{x_1}(x_1,\dots,x_n)|^2 dx_1,$$

woraus wir

$$\int_W |\tilde{u}(x)|^2 \leq s^2 \int_W |\tilde{u}_{x_1}(x)|^2 dx \leq s^2 \int_W |\tilde{u}_{x_1}(x)|^2 dx + s^2 \sum_{j=2}^{n} \int_W |\tilde{u}_{x_j}(x)|^2 dx$$
$$= s^2 \|\nabla \tilde{u}\|^2_{L^2(W;\mathbb{R}^n)}$$

erhalten. Da $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \Omega$ ist, folgt also

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq s^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}.$$

2.) Sei nun $u \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, gibt es eine Folge $(u_j)_j$ mit $u_j \to u$. Damit ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} + \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} + s\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} + s\|\nabla u_j - \nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} + s\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

und im Limes erhalten wir die Behauptung. □

BEMERKUNGEN:

(a) Man sieht leicht, dass

$$|||u||| := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

eine Norm auf $H_0^1(\Omega)$ ist. Tatsächlich sind die Normen $|||\cdot|||$ und $\|\cdot\|_1$ sogar äquivalent, denn während trivialerweise $|||u||| \leq \|u\|_1$ gilt, erhalten wir mit der Poincaré-Ungleichung auch

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq (s^2+1)\, |||\, u \,|||^2 .$$

(b) Eine Variante der Poincaré-Ungleichung für Sobolev-Funktionen aus $H^1(\Omega)$ lautet

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

3.4.2. Schwache Lösungen der Poissongleichung. Es sei

$$Lu := -\Delta u + cu$$

mit einer nichtnegativen Funktion $c \in L^\infty(\Omega)$. Dies ist in der bisherigen Situation als der Spezialfall enthalten, in dem A die Einheitsmatrix ist und $b = 0$.

Ohne Einschränkung sei $\Omega \subset (0,s)^n$ mit $s \geq 1$. Nun ist

$$B[u,u] = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \int_\Omega \underbrace{c(x)|u(x)|^2}_{\geq 0} dx \overset{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{1}{s^2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

und daher

$$B[u,u] = \frac{1}{2}B[u,u] + \frac{1}{2}B[u,u] \geq \frac{1}{2s^2}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} \overset{s\geq 1}{\geq} \frac{1}{2s^2}\|u\|_1^2.$$

Also ist B koerziv, beschränkt ist B ohnehin bereits wegen Lemma 3.10 und mit dem Satz von Lax-Milgram erhalten wir hieraus das folgende Ergebnis:

SATZ 3.14. *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt die Randwertaufgabe*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung.

KAPITEL 4

Die Wärmeleitungsgleichung

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

bzw. die Wärmeleitungsgleichung in inhomogener Form

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

4.1. Die Fundamentallösung

SATZ 4.1. *Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch*

$$\Phi(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0, \end{cases}$$

d.h. im distributionellen Sinne gilt $\Phi_t - \Delta_x \Phi = \delta$.

BEWEIS. 1.) Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_t(t,x) &= \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) \Phi(t,x), \\ \Phi_{x_j}(t,x) &= -\frac{x_j}{2t} \Phi(t,x), \\ \Phi_{x_j x_j}(t,x) &= \left(\frac{x_j^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \Phi(t,x) \end{aligned}$$

und somit $\Phi_t(t,x) - \Delta_x \Phi(t,x) = 0$, das heißt Φ ist eine klassische Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

2.) Für $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_j|^2}{4t}} dx_j \\ &\overset{\xi_j = \frac{x_j}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi_j} d\xi_j = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2} d\xi \right)^n = 1. \end{aligned}$$

Wegen des Satzes von Fubini ist also $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und wir können Φ via

$$\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \; \Phi(t,x) \varphi(t,x)$$

als reguläre Distribution auffassen.

3.) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}
(\Phi_t - \Delta\Phi)(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \Phi(t,x)(\varphi_t(t,x) + \Delta_x \varphi(t,x)) \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \Phi(t,x)(\varphi_t(t,x) + \Delta_x \varphi(t,x)) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^n} dx\ \Phi(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) \\
&\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \underbrace{(\Phi_t(t,x) - \Delta_x \Phi(t,x))}_{=0} \varphi(t,x) \Bigg] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \Phi(\varepsilon,x)\varphi(0,x) \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \Phi(\varepsilon,x)(\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(0,x)).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Hierbei gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x) \left(\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(0,x)\right) dx \right| \overset{\text{MWS}}{\leq} C\varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x) dx}_{=1} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Zeigen wir nun noch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)\varphi(0,x) dx = \varphi(0,0),$$

so folgt die Behauptung. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)\varphi(0,x)dx - \varphi(0,0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)(\varphi(0,x) - \varphi(0,0))dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)|\varphi(0,x) - \varphi(0,0)|dx \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)|\langle \nabla_x \varphi(0,x)|_{x=\xi}, x\rangle|dx \\
&\leq C' \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,x)|x|dx \\
&= \frac{C'}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} |x| dx \\
&= \frac{C' n V_n}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} r^n dr \\
&\overset{r=2\rho\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{C' n V_n (2\sqrt{\varepsilon})^{n+1}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^n d\rho \\
&= C'' \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Fasst man $T_t := \Phi(t, \cdot\,)$ für festes $t > 0$ als Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ auf, so zeigt die letzte Rechnung, dass man auf diese Weise eine reguläre Approximation der Deltadistribution erhält.

SATZ 4.2. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für die Funktion*

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y) dy, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

gilt dann

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$,
(b) $u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$,
(c) $\lim\limits_{\substack{(t,x) \to (0,x_0) \\ t>0}} u(t,x) = g(x_0) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

BEWEIS. 1.) Die Abbildung $(t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ liegt in $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Außerdem sind für jedes $\delta > 0$ die Ableitungen auf $[\delta, \infty) \times \mathbb{R}^n$ majorisiert durch eine integrierbare Funktion, da es sich im Wesentlichen um Polynome multipliziert mit der Fundamentallösung handelt (die Details seien dem Leser überlassen). Da g ferner beschränkt ist, erhält man hieraus $u \in C^\infty((\delta, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ für alle $\delta > 0$, also letztlich $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, wobei

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\Phi_t(t,x) - \Delta_x \Phi(t,x))}_{=0} g(y) dy = 0.$$

2.) Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so, dass

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{falls } |y - x_0| < \delta.$$

Für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ betrachte

$$\begin{aligned} |u(t,x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)(g(y) - g(x_0)) dy \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &=: I + J. \end{aligned}$$

Für diese beiden Integrale erhalten wir

$$I \leq \varepsilon \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y) dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) dy = \varepsilon$$

bzw.

$$J \leq 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y) dy \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

Hier gilt

$$\begin{aligned} |y - x_0| &= |y - x + x - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \\ &< |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|, \end{aligned}$$

also $|y-x| \geq \frac{1}{2}|y-x_0|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \\ &\overset{z=y-x_0}{=} \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|z|^2}{16t}} dz \\ &= \frac{C'}{t^{\frac{n}{2}}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \\ &\overset{r=4\rho\sqrt{t}}{=} \frac{C'' t^{\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-\rho^2} \rho^{n-1} d\rho \xrightarrow{t\to 0} 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $I + J \leq 2\varepsilon$ für alle hinreichend kleinen $t > 0$. □

Mit $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$ sowie $D_x^\alpha u$, $|\alpha| \leq 2$ existieren und stetig sind. Es sei $C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ die Menge aller Funktionen aus $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, deren Träger kompakt in $\mathbb{R}^{n+1}$ (!) ist. $\lim_{t\to 0} u(t,x) = 0$ braucht also für $u \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ nicht zu gelten.

SATZ 4.3. *Sei $f \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ beschränkt und sei u gegeben durch*

$$u(t,x) := \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(t-s, x-y) f(s,y).$$

Dann gilt

(a) $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$,
(b) $u_t - \Delta_x u = f$ *in* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$,
(c) $\lim\limits_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = 0$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Der Beweis verläuft im Wesentlichen genauso wie bei der Poissongleichung.

KOROLLAR 4.4. *Seien $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,\cdot) = g & \text{auf } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wird gelöst von

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(t-s, x-y) f(s,y).$$

4.2. Mittelwertsatz und Maximumprinzip

Zunächst führen wir einige Begriffe und Notationen ein. Zu $T > 0$ sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt heißt $\Omega_T := (0,T) \times \Omega$ *parabolischer Zylinder* und eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung darin heißt *kalorische Funktion*. Der Rand des parabolischen Zylinders ist

$$\partial\Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup \{T\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega,$$

die Teilmenge

$$\Gamma_T = \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega$$

bezeichnet man als den *parabolischen Rand* von Ω_T. Zu $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ definieren wir die sogenannte *Wärmekugel* (engl. heat ball)

$$E(t,x,r) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; \Phi(t-s, x-y) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Wie man an der Gestalt der Fundamentallösung abliest, ist $E(t,x,r)$ beschränkt. Einige weitere hilfreiche Eigenschaften fasst das folgende Lemma zusammen.

Lemma 4.5. *(a) Für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ gilt*

$$E(t,x,r) \subset \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right) \times \mathbb{R}^n.$$

(b) Für alle $(t,x) \in \overline{\Omega_T} \setminus \Gamma_T$ und hinreichend kleine $r > 0$ gilt

$$E(t,x,r) \subset \Omega_T.$$

(c) Für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ gilt

$$\iint\limits_{E(t,x,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} ds dy = 4r^n.$$

Beweis. (a) Für $(s,y) \in E(t,x,r)$ ist nach Definition

$$t - s > 0, \quad \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n}$$

und folglich gilt

$$\frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \geq \frac{1}{r^n} \;\Rightarrow\; 0 < 4\pi(t-s) \leq r^2 \;\Rightarrow\; t > s \geq t - \frac{r^2}{4\pi}.$$

(b) Bemerke, dass $\overline{\Omega_T} \setminus \Gamma_T = (0,T] \times \Omega$. Sei $r < 1$. Wegen (a) ist $(s,y) \in E(t,x,r)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
& s \in \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right), \quad -\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} \geq \log r + \frac{n}{2} \log \left[4\pi(t-s) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & s \in \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right), \quad |x-y|^2 \leq -4(t-s) \log r - 2n(t-s) \log \left[4\pi(t-s) \right] \\
\Rightarrow \quad & s \in \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right), \quad |x-y|^2 \leq -\frac{r^2}{\pi} \log r - 4n \frac{r^2}{4\pi} \log r \xrightarrow{r \to 0} 0,
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde

$$t - s \leq \frac{r^2}{4\pi} \;\Rightarrow\; 4\pi(t-s) \leq r^2 < 1.$$

Wählt man nun ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ und dann r so klein, dass

$$-\frac{r^2}{\pi} \log r - 4n \frac{r^2}{4\pi} \log r < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{r^2}{4\pi} < t,$$

so ist $E(t,x,r) \subset \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t\right) \times B_\varepsilon(x) \subset (0,T) \times \Omega = \Omega_T$.
(c) Wegen $\Phi(r^2\tau, rz) = \frac{1}{r^n}\Phi(\tau, z)$ erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{E(t,x,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} ds dy &= \iint\limits_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} ds dy \\
&\overset{\substack{y=rz \\ s=r^2\tau}}{=} \iint\limits_{E(0,0,1)} r^n r^2 \frac{|rz|^2}{(r^2\tau)^2} d\tau dz \\
&= r^n \iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{\tau^2} d\tau dz
\end{aligned}$$

wobei $E(1) := E(0,0,1)$. Nach (a) und der Rechnung in (b) ist $(\tau, z) \in E(1)$ genau dann, wenn

$$\tau \in \left[-\frac{1}{4\pi}, 0\right) \quad \text{sowie} \quad |z|^2 \leq 2n\tau \log(-4\pi\tau).$$

Mit $A(\tau) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z|^2 \leq 2n\tau\log(-4\pi\tau)\}$ ist dann wegen des Satzes von Fubini

$$\iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{\tau^2} d\tau dz = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{1}{\tau^2}\left(\int_{A(\tau)} |z|^2 dz\right) d\tau.$$

Wir berechnen erst

$$\begin{aligned}
\int_{A(\tau)} |z|^2 dz &\overset{\zeta=|z|}{=} nV_n \int_0^{\sqrt{2n\tau\log(-4\pi\tau)}} \zeta^{n+1} d\zeta \\
&= \frac{nV_n}{n+2}\left(\sqrt{2n\tau\log(-4\pi\tau)}\right)^{n+2} \\
&= \frac{nV_n(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}\left(\tau\log(-4\pi\tau)\right)^{\frac{n}{2}+1}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{\tau} d\tau dz &= \frac{nV_n(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}\int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \tau^{\frac{n}{2}-1}(\log(-4\pi\tau))^{\frac{n}{2}+1} d\tau \\
&\overset{s=-\tau}{=} \frac{nV_n(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}\int_0^{\frac{1}{4\pi}} s^{\frac{n}{2}-1}\underbrace{(-1)^{\frac{n}{2}-1}(\log(4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}_{=(-\log(4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}} ds \\
&\overset{\sigma=4\pi s}{=} \frac{nV_n}{n+2}\frac{(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^1 \sigma^{\frac{n}{2}-1}(-\log\sigma)^{\frac{n}{2}+1} d\sigma.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sigma^{\frac{n}{2}-1}(-\log\sigma)^{\frac{n}{2}+1}d\sigma &\overset{y=-\log\sigma}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}y}y^{\frac{n}{2}+1}dy \\
&\overset{z=\frac{n}{2}y}{=} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}\int_0^\infty e^{-z}z^{\frac{n}{2}+1}dz \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)
\end{aligned}$$

und unter Verwendung von $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ rechnet man leicht nach, dass

$$\frac{nV_n}{n+2}\frac{(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}-1}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = 4$$

gilt. Damit folgt die Behauptung. □

SATZ 4.6. *(Mittelwertsatz) Es sei $u \in C^{1,2}(\Omega_T)$ eine kalorische Funktion. Dann ist*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n}\iint\limits_{E(t,x,r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dsdy$$

für jedes $E(t,x,r) \subset \Omega_T$.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $(t,x) = (0,0)$, für $E(0,0,r)$ schreiben wir kurz $E(r)$, $r > 0$. Wie im Beweis von Lemma 4.5 ist

$$\varphi(r) := \frac{1}{r^n}\iint\limits_{E(r)} u(s,y)\frac{|y|^2}{s^2}dsdy \overset{\substack{y=rz\\ s=r^2\tau}}{=} \iint\limits_{E(1)} u(r^2\tau, rz)\frac{|z|^2}{\tau^2}d\tau dz.$$

Wir berechnen mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \iint\limits_{E(1)}\left(\sum_{i=1}^n u_{y_i}z_i\frac{|z|^2}{\tau^2} + 2ru_s\frac{|z|^2}{\tau}\right)d\tau dz \\
&\overset{\substack{y=rz\\ s=r^2\tau}}{=} \frac{1}{r^{n+2}}\iint\limits_{E(r)}\left(r\sum_{i=1}^n u_{y_i}y_i\frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s\frac{|y|^2}{s}\right)dsdy \\
&= \frac{1}{r^{n+1}}\iint\limits_{E(r)}\left(\frac{|y|^2}{s^2}\sum_{i=1}^n u_{y_i}y_i + 2u_s\frac{|y|^2}{s}\right)dsdy \quad =: \; I + J.
\end{aligned}$$

Betrachte

$$\psi(s,y,r) := \log\left(r^n\Phi(-s,y)\right) = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r$$

mit $s < 0$. Diese Funktion verschwindet auf dem Rand von $E(r)$, denn

$$\psi(s,y,r) = 0 \;\Leftrightarrow\; r^n\Phi(-s,y) = 1 \;\Leftrightarrow\; \Phi(-s,y) = \frac{1}{r^n} \;\Leftrightarrow\; (s,y) \in \partial E(r).$$

Außerdem gilt

$$\frac{|y|^2}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{s} = 2\sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i}(s,y,r),$$

also erhält man

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \frac{|y|^2}{s} dsdy = \frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i}(s,y,r) dsdy \\ &\overset{\substack{\text{part.}\\ \text{Int.}}}{=} -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \psi(s,y,r) dsdy - \frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \psi(s,y,r) \sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i dsdy. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \psi(s,y,r) dsdy + \frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \psi_s(s,y,r) \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy \\ &= -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \psi(s,y,r) dsdy + \frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy \\ &= -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} u_s \psi(s,y,r) dsdy - \frac{2n}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy \\ &\quad \underbrace{- \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy}_{=I}. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi'(r) = I + J$ ist daher

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \underbrace{u_s}_{=\Delta_y u} \psi(s,y,r) dsdy - \frac{2n}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy \\ &\overset{\substack{\text{part.}\\ \text{Int.}}}{=} \frac{4n}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(s,y) \underbrace{\psi_{y_i}(s,y,r)}_{=\frac{y_i}{2s}} dsdy - \frac{2n}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dsdy \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. φ ist konstant. Zusammen mit Lemma 4.5 ist dann mit majorisierter Konvergenz

$$\varphi(r) = \lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{E(1)} u(\rho^2 \tau, \rho z) \frac{|z|^2}{\tau^2} d\tau dz = u(0,0) \iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{\tau^2} d\tau dz = 4u(0,0)$$

und der Beweis somit vollendet. □

SATZ 4.7. *(Maximumprinzip) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ eine kalorische Funktion.*

(a) *Es gilt $\max\limits_{(t,x) \in \overline{\Omega_T}} u(t,x) = \max\limits_{(t,x) \in \Gamma_T} u(t,x)$ (schwaches Maximumprinzip).*

(b) *Ist Ω zusammenhängend und gibt es ein $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega_T} \setminus \Gamma_T$ mit*

$$u(t_0, x_0) = \max_{(t,x)\in\overline{\Omega_T}} u(t, x),$$

so ist u konstant in $\overline{\Omega_T}$ (starkes Maximumprinzip).

Beweis. Wir zeigen die allgemeinere Aussage (b), daraus folgert man (a) ganz genauso wie beim Maximumprinzip für harmonische Funktionen.
(b) Es gebe ein $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega_T} \setminus \Gamma_T$ mit $u(t_0, x_0) = M := u(t_0, x_0) = \max_{(t,x)\in\overline{\Omega_T}} u(t, x)$. Nach Lemma 4.5 ist $E(t_0, x_0, r) \subset \Omega_T$ für hinreichend kleine $r > 0$ und mit dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} M = u(t_0, x_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(t_0,x_0,r)} u(s, y) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dsdy \\ &\leq M \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(t_0,x_0,r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dsdy = M, \end{aligned}$$

d.h. $u \equiv M$ auf $E(t_0, x_0, r)$. Sei nun $(s_0, y_0) \in \Gamma_T$ mit $s_0 \leq t_0$. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg L von (t_0, x_0) nach (s_0, y_0) in $\overline{\Omega_T}$. Setze

$$\tau_0 := \inf\{s \geq s_0 \mid u(t, x) = M \ \forall (t, x) \in L \text{ mit } s \leq t \leq t_0\}.$$

Da L abgeschlossen und $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist das Infimum sogar ein Minimum. Wir zeigen nun $\tau_0 = s_0$, dann folgt die Behauptung. Angenommen, $\tau_0 > s_0$. Dann ist $u(\tau_0, z_0) = M$ für ein $(\tau_0, z_0) \in L \cap \Omega_T$. Dann aber folgt genau wie oben, dass $u = M$ auf $E(\tau_0, z_0, \tilde{r})$ für alle hinreichend kleinen $\tilde{r} > 0$. Es gilt

$$E(\tau_0, z_0, \tilde{r}) \supset L \cup (\Omega \times \{\tau_0 - \sigma \leq t \leq \tau_0\})$$

für ein $\sigma > 0$. Damit ist $u(t, x) = M \ \forall (t, x) \in L$ mit $\tau_0 - \sigma \leq t \leq \tau_0$, was jedoch der Definition von τ_0 widerspricht. □

4.3. Eindeutigkeit der Lösungen

Satz 4.8. *Seien Ω offen und beschränkt und $T > 0$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ der Anfangsrandwertaufgabe*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \textit{in } \Omega_T, \\ u = g & \textit{auf } \Gamma_T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Beweis. Sind u_1, u_2 zwei Lösungen von (4.2), so löst $w := u_1 - u_2$ die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{in } \Omega_T, \\ w = 0 & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Mit dem Maximumprinzip folgt also $w \leq 0$ und somit $u_1 \leq u_2$ in Ω_T. Analog erhält man durch Betrachtung von $-w$ die umgekehrte Ungleichung. □

SATZ 4.9. *Es sei* $u \in C^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ferner genüge u der Wachstumsbedingung

$$u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [0,T]$$

für geeignete Konstanten $A, a \geq 0$. *Dann gilt*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} g(y).$$

BEWEIS. 1.) Zu festen $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ und $y \in \mathbb{R}^n$ betrachte die Funktion

$$v(t,x) := u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}.$$

Diese löst die homogene Wärmeleitungsgleichung in $(0,T) \times \mathbb{R}^n$, denn es gelten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \\ &\qquad = \left(\frac{n}{2}\frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}+2}}\right) \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)} &= \frac{x-y}{2(T+\varepsilon-t)} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}, \\ \Delta_x \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)} &= \operatorname{div} \nabla_x \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)} \\ &= \left(\frac{n}{2(T+\varepsilon-t)} + \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)^2}\right) \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $r > 0$ setze nun $\Omega := B_r(y)$. Dann ist $v \in C(\overline{\Omega_T}) \cap C^{1,2}(\Omega_T)$ eine kalorische Funktion und mit dem Maximumprinzip erhalten wir

$$\max_{(t,x) \in \Omega_T} v(t,x) = \max_{(t,x) \in \Gamma_T} v(t,x). \tag{4.3}$$

2.) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da μ positiv ist, gilt

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)} \leq u(0,x) = g(x) \tag{4.4}$$

Für jedes $x \in \partial B_r(y), 0 \leq t \leq T$, erhalten wir

$$\begin{aligned} v(t,x) &= u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)} \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Zunächst sei $T > 0$ so klein, dass $4aT < 1$ ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $4a(T+\varepsilon) < 1$ und folglich ist $\gamma := \frac{1}{4(T+\varepsilon)} - a > 0$. Hiermit ist

$$v(t,x) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \quad \forall x \in \partial B_r(y).$$

Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} = -\infty$$

und insbesondere ist

$$Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z)$$

für alle hinreichend großen $r > 0$. Für ebensolche gilt dann insgesamt

$$v(t,x) \ \leq \ \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z) \quad \forall x \in \partial B_r(y),\ \forall t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

3.) Aus den Gleichungen (4.4) und (4.5) folgt

$$\max_{(t,x)\in\Gamma_T} v(t,x) \ \leq \ \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z),$$

und mit Gleichung (4.3) schließlich

$$\max_{(t,x)\in\overline{\Omega_T}} v(t,x) \ \leq \ \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z).$$

Also ist

$$u(t,y) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} = v(t,y) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z) \quad \forall t \in [0,T]$$

und somit

$$u(t,y) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} g(z) \quad \forall t \in [0,T].$$

4.) Zuletzt entledigen wir uns noch der im zweiten Schritt gemachten Zusatzbedingung an T. Seien also nun $T > 0$ beliebig und $a \geq 0$ so, dass $4aT \geq 1$. Betrachte die Intervalle $[0,T_1], [T_1, 2T_1], \ldots, [kT_1, T]$ mit $T_1 = \frac{1}{8a}$ und $k < \frac{T}{T_1}, k \in \mathbb{N}$. Damit ist $4aT_1 < \frac{1}{2} < 1$. Benennt man nun die Zeit $t' = t - T_1 \in [0, T_1]$ usw., so können wir den Satz auch für große T auf die Schritte 1 bis 3 zurückführen. □

Bemerkung. Genügt die Lösung der Anfangswertaufgabe der unteren Schranke

$$u(t,x) \ \geq \ -Ae^{-a|x|^2} \quad \forall t \in [0,T],$$

so gilt

$$\inf_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n} u(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} g(y).$$

Korollar 4.10. *(Eindeutigkeitssatz) Seien $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u = g & \text{auf } \{0\}\times\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}^n) \cap C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, die der Wachstumsbedingung

$$|u(t,x)| \leq Ae^{-a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [0,T]$$

mit Konstanten $a, A \geq 0$ genügt.

BEWEIS. Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so löst $w := u_1 - u_2$ die Gleichung

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \\ w = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

und genügt der Wachstumsbedingung $w(t,x) \leq 2Ae^{a|x|^2}$. Mit Satz 4.9 folgt dann $w \leq 0$ und damit $u_1 \leq u_2$. Analog erhält man durch Betrachtung von $-w3$ die andere Ungleichungen. $\square$

BEHAUPTUNG. Die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

besitzt unendlich viele Lösungen.

BEWEIS. Zu beliebigem $\alpha > 1$ setze

$$h(t) := \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und

$$u(t,x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Aus der elementaren Theorie der Potenzreihen folgt $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k} = 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man für jedes $\alpha > 1$ eine Lösung, also unendlich viele. $\square$

4.4. Schwache Lösungen

Betrachte

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \Omega_T, \\ u = u_0 & \text{in } \{0\} \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g & \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

mit $c \in L^\infty(\Omega_T), f \in L^2(\Omega_T), g \in L^2((0,T) \times \partial\Omega), \alpha \in L^\infty((0,T) \times \partial\Omega), \alpha \geq 0$. Definiere

$$H^{0,1}(\Omega_T) := \left\{ u \in L^2(\Omega_T) \middle| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_T) \ \forall i = 1, \ldots, n \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{0,1} := \left(\int_0^T dt \int_\Omega dx \ (u^2 + |\nabla u|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\left(H^{0,1}(\Omega_T), \|\cdot\|_{0,1}\right)$ ist ein Hilbertraum. Ebenso ist

$$H^{1,1}(\Omega_T) := \left\{ u \in L^2(\Omega_T) \middle| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_T)\ \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{1,1} := \left(\int_0^T dt \int_\Omega dx\ (u^2 + |\nabla u|^2 + u_t^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein Hilbertraum.
Multipliziere die Gleichung (4.6) mit einer Funktion $v \in H^{1,1}(\Omega_T)$ mit $v(T, \cdot) = 0$ und integriere über Ω_T:

$$\underbrace{\int_{\Omega_T} v u_t dt dx}_{=:I_1} - \underbrace{\int_{\Omega_T} v \nabla u dt dx}_{=:I_2} + \int_{\Omega_T} c v u dt dx \ = \ \int_{\Omega_T} f v dt dx.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} I_1 &\overset{\substack{\text{part. Int.}\\ \text{bzgl. } t}}{=} \int_\Omega (\underbrace{u(T,x)v(T,x)}_{=0} - \underbrace{u(0,x)}_{=u_0(x)} v(0,x)) dx - \int_{\Omega_T} u v_t dt dx, \\ I_2 &= -\int_{\Omega_T} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dt dx + \int_{(0,T)\times\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=g-\alpha u} v dt dx \end{aligned}$$

und damit
(4.7)

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_T} u v_t dt dx + \int_{\Omega_T} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dt dx + \int_{\Omega_T} c u v dt dx + \int_{(0,T)\times\partial\Omega} \alpha u v dt dx \\ = \int_{\Omega_T} f v dt dx + \int_{(0,T)\times\partial\Omega} g v dt dx + \int_\Omega u_0(x) v(0,x) dx. \end{aligned}$$

Definition 4.11. *Eine Funktion $u \in H^{0,1}(\Omega_T)$ heißt* schwache Lösung *der Anfangsrandwertaufgabe, wenn* (4.7) *für alle $v \in H^{1,1}(\Omega_T)$ mit $v(T, x) = 0$ gilt.*

Satz 4.12. *Gleichung* (4.6) *besitzt genau eine schwache Lösung.*

ANHANG A

Ergänzungen

A.1. Der Integralsatz von Gauß und die Greenschen Formeln

DEFINITION A.1. *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *offen und* $p \in \mathbb{N}$. *Der Rand* $\partial\Omega$ *heißt* C^p*-glatt, wenn es zu jedem* $y \in \partial\Omega$ *ein* $r > 0$ *und eine Funktion* $\phi \in C^p(B_r(y))$ *gibt mit*

$$\Omega \cap B_r(y) = \{x \in B_r(y) \,|\, \phi(x) < 0,\ \nabla\phi(x) \neq 0\}.$$

Nach dem Satz von der inversen Funktion ist

$$\partial\Omega \cap B_r(y) = \{x \in B_r(y) \,|\, \phi(x) = 0, \quad \nabla\phi(x) \neq 0\}.$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Oft verwendet man auch die folgende äquivalente Charakterisierung der Glattheit.

LEMMA A.2. *Der Rand* $\partial\Omega$ *ist genau dann* C^p*-glatt, wenn es zu jedem* $y \in \partial\Omega$ *ein* $r > 0$ *und eine Funktion* $\varphi \in C^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *gibt so, dass in geeigneten Koordinaten* (x_1, v) *gilt* $(0, \varphi(0)) = y$ *und*

$$\Omega \cap B_r(y) = \{(x_1, v) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 < \varphi(v), v \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cap B_r(y),$$

d.h. Ω *lässt sich lokal als Subgraph einer Funktion* φ *darstellen. Dabei lässt sich der Rand* $\partial\Omega$ *lokal als Graph der Funktion* φ *darstellen.*

LEMMA A.3. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* C^1*-Rand. Dann gibt es zu jedem* $x \in \partial\Omega$ *genau einen Vektor* $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ *mit*

(1) $\nu(x) \perp T_x(\partial\Omega)$ *(Tangentialraum) und* $|\nu(x)| = 1$,
(2) $x + t\nu(x) \notin \Omega$ *für* $t > 0$ *hinreichend klein.*

Das Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \nu(x)$, *ist stetig und heißt* äußere Normale von Ω.

SATZ A.4. *(Gaußscher Integralsatz) Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit* C^1*-Rand. Für jedes* $u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{div} u \in L^1(\Omega)$ *gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u dx = \int_{\partial\Omega} \langle u(y), \nu(y)\rangle d\sigma(y).$$

KOROLLAR A.5. *(Greensche Formeln) Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit* C^1*-Rand. Für alle* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *mit* $\Delta u, \Delta v \in L^1(\Omega)$ *gelten*

(1) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$

(2) $\displaystyle\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx = -\int_\Omega u\Delta v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u\, d\sigma,$

(3) $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} u - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma.$

Bemerkungen. *(1) Formel (2) ist eine natürliche Verallgemeinerung der partiellen Integration*

$$\int_a^b u'v'dx = -\int_a^b uv''dx + uv'\big|_a^b .$$

(2) Die Voraussetzungen von Satz A.5 sind insbesondere für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ erfüllt.

A.2. Einige nützliche Resultate aus der Analysis

Lemma A.6. *(Fundamentallemma der Variationsrechnung) Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

so gilt $f = 0$ fast überall.

Lemma A.7. *(Parameterabhängige Integrale) Es seien m und n zwei natürliche Zahlen. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere messbare Menge in $\mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, sei für jedes feste $x \in U$ über Ω integrierbar. Wir betrachten die Funktion*

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \int_\Omega f(x, y)\mathrm{d}y.$$

Dann gilt:

(1) *Ist die Abbildung $U \ni x \mapsto f(x, y)$ für fast alle $y \in \Omega$ stetig im Punkt x_0 und existieren ein $\varepsilon > 0$ sowie ein $F \in L^1(\Omega)$ mit $|f(x, y)| \leq F(y)$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ und fast alle $y \in \Omega$, so ist g stetig in x_0.*

(2) *Seien $x_0 \in U$, $\varepsilon > 0$ und $j \in \{1, ..., m\}$ gegeben, so dass die Abbildung $U \ni x \mapsto f(x, y)$ für fast alle $y \in \Omega$ nach der j-ten Komponente partiell differenzierbar in $B_\varepsilon(x_0)$ ist. Zudem existiere ein $F \in L^1(\Omega)$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\right| \leq F(y)$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ und fast alle $y \in \Omega$. Dann ist g in $B_\varepsilon(x_0)$ nach der j-ten Komponente partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\mathrm{d}y \quad \text{für alle } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

(3) *Seien nun $U = \mathbb{R}^m$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Ist $f \in C_0^k(\mathbb{R}^{m+n})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $g \in C_0^k(\mathbb{R}^m)$.*

Lemma A.8. *(Mittelwerte stetiger Funktionen) Seien $f \in C(\Omega)$ und $x \in \Omega$. Dann gelten*

$$\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y)d\sigma(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(x)$$

und

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(x).$$

Glättung durch Faltung: Betrachte

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

wobei C so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$. Setze

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Es gilt

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)dx = 1, \quad \operatorname{supp}\eta_\varepsilon = B_\varepsilon(0).$$

Zu $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Ist $\Omega \neq \emptyset$, so ist $\Omega_\varepsilon \neq \emptyset$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann ist

$$f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy$$

für alle $x \in \Omega_\varepsilon$ definiert.

Lemma A.9. *(a)* $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$,
(b) $f_\varepsilon \to f$ *fast überall für* $\varepsilon \to 0$,
(c) Ist $f \in C(\Omega)$, *so konvergiert* $f_\varepsilon \to f$ *lokal gleichmäßig auf* Ω,
(d) Ist $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *so so konvergiert* $f_\varepsilon \to f$ *in* $L^p(K)$ *für alle kompakten* $K \subset \Omega$,
(e) Ist $f \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, *so gilt* $(D^\alpha f)_\varepsilon(x) = D^\alpha f_\varepsilon(x)$ *für alle* $x \in \Omega_\varepsilon$ *und jeden Mutliindex* α *der Ordnung* $|\alpha| = k$.

Fourier-Reihen: Sei $g \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodisch. Die Fourier-Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{c} a_k \\ b_k \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \left\{\begin{array}{c} \sin(k\varphi) \\ \cos(k\varphi) \end{array}\right\} d\varphi, \quad k \in \mathbb{N},$$

der Funktion g besitzen die folgenden Eigenschaften:
(a) $a_k, b_k \to 0$ für $k \to \infty$ (Lemma von Riemann und Lebesgue),
(b) Ist $g \in C^p(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, so gilt $|a_k|, |b_k| \leq C\,k^{-p}$, $k \in \mathbb{N}$,
(c) Ist $g \in C^{p+q}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, (d.h. $g \in C^p(\mathbb{R})$ und $|g^{(p)}(\varphi + h) - g^{(p)}(\varphi)| \leq L\,h^q$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $h > 0$), so gilt $|a_k|, |b_k| \leq C\,k^{-p-q}$.