Die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$

Naomi Tischer

Wintersemester 2019/2020

1 Die Wärmeleitungsgleichung

Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Wärmeleitung.

Gegeben ist eine Funktion $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

heißt Wärmeleitungsgleichung, mit Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$,
wobei f die Verteilung der Anfangstempertur ist.

Wärmeleitungskern

$$H_t(x) = K_\delta(x) \; mit \; \delta = 2t$$
$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \text{ und } \hat{H}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}$$

$H_t(x)$ heißt Wärmeleitungskern. Er erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Dies lässt sich durch Einsetzen leicht überprüfen.
Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch eine Faltung mit dem Wärmeleitungskern.
Um dies zu zeigen betrachten wir die Fouriertransformierte der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \to \frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = -(\xi)^2 \hat{u}(\xi,t)$$

Dies ist bei festem ξ eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variable t.
Somit existiert eine Konstante $A(\xi)$ für die gilt:

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\hat{H}_t(\xi) = A(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}$$

Setzen wir die Fouriertransformierte der Anfangsbedingung $\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$ in die Gleichung ein: $\hat{f}(\xi) = A(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so folgt:

$$\hat{u}(\xi,t) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{H}_t(\xi) \text{ und somit } u(x,t) = (f * H_t)(x)$$

2 Sätze über die Wärmeleitungsgleichung

Satz 1

Sei $f \in S(\mathbb{R})$, $u(x,t) = f * H_t(x)$ für $t > 0$.
Dann gilt:

(i) u ist C^2 für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, und u erfüllt die Wärmeleitungsgleichung

(ii) $u(x,t) \to f(x)$ gleichmäßig in x für $t \to 0$, insbesondere gilt, wenn $u(x,0) = f(x)$, dann ist u stetig auf dem Abschluss der oberen Halbebene $\bar{R}_+ = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$

(iii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx \to 0$ für $t \to 0$

Beweis:

(i) $u(x,t) = f * H_t(x)$ mit $\hat{u}(\xi,t) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{H}_t(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-t\xi^2}$

Nach Anwenden der inversen Fouriertransformation:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-t\xi^2}e^{i\xi x}d\xi$$

und unter den gegebenen Voraussetzungen können wir unter dem Integral differenzieren und erhalten:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\xi^2\hat{f}(\xi)e^{-t\xi^2}e^{i\xi x}d\xi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^2\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Daraus folgt die Behauptung.
Da das Differenzieren nichts an der Endlichkeit des Integrals ändert sieht man leicht, dass u in C^∞ ist.

(ii) Die Behauptung lässt sich direkt aus Folgerung 2 aus dem Kapitel "Die Fourier-Transformation" beweisen.

(iii) Nach der Formel von Plancherel gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,t) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{H}_t(\xi) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 d\xi$$

Wir können abschätzen: $|e^{-t\xi^2} - 1|^2 < 2$

Da $f \in S(\mathbb{R})$ und somit auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, s.d.

$$\int_{|\xi| \geq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 d\xi < \epsilon$$

Für $t \to 0$ können wir den folgenden Ausdruck beliebig klein machen:

$$\sup_{|\xi| \leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 < \frac{\epsilon}{2N}$$

Und erhalten die folgende Abschätzung:

$$\int_{|\xi| \leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 d\xi \;<\; \int_{|\xi| \leq N} \frac{\epsilon}{2N} d\xi \;=\; 2N\frac{\epsilon}{2N} \;=\; \epsilon$$

q.e.d.

Korollar

$u(\cdot, t)$ gehört zu $S(\mathbb{R})$ gleichmäßig in t, d.h für jedes $T > 0$ gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x,t)| \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

<u>Beweis</u>:

Wir beweisen das Korollar indem wir $|u(x,t)|$ abschätzen:

$$|u(x,t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| H_t(y) dy \;=\; \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy \;+\; \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy$$

Mithilfe der Definition von Schwartz-Funktionen und da $\int\limits_{|y|\leq\frac{|x|}{2}} H_t(y)dy \;\leq 1$,

können wir das erste Integral mit $\frac{C_N}{1+|x|^N}$ abschätzen. Es gilt:

$$H_t(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-y^2}{4t}} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-(\frac{|x|}{2})^2}{4t}} \quad \text{und} \quad \int\limits_{|y|\geq\frac{|x|}{2}} |f(x-y)|dy < \infty$$

So lässt sich das zweite Integral durch $\frac{c}{\sqrt{t}}e^{\frac{-cx^2}{t}}$ abschätzen.

$$\Rightarrow |u(x,t)| \leq \frac{C_N}{1+|x|^N} + \frac{c}{\sqrt{t}}e^{\frac{-cx^2}{t}}$$

Für $t \to 0$ fällt $e^{\frac{-cx^2}{t}}$ schneller, als $\frac{c}{\sqrt{t}}$ wächst.
Die Ableitungen von $u(x,t)$ können wir analog abschätzen. Daraus folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz 2

$u(x,t)$ erfülle folgende Bedingungen:

(i) u ist stetig auf dem Abschluss der oberen Halbebene

(ii) u erfüllt die Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$

(iii) u erfüllt die Randbedingung $u(x,0) = 0$

(iv) $u(\cdot,t) \in S(\mathbb{R})$ gleichmäßig in t (wie im Korollar)

$\Rightarrow u = 0$

Beweis:

Für den Beweis betrachten wir $E(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx$. Ist $E(t) = 0$, so ist auch $u(x,t) = 0$ und unsere Aussage ist bewiesen. Da $E(t) \geq 0$ und $E(0) = 0$ reicht es zu zeigen, dass E eine fallende Funktion ist, also $\frac{dE}{dt} \leq 0$. Durch unsere Voraussetzungen und nach partieller Integration erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}} 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}u(x,t)dx = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}u(x,t)dx \overset{p.I.}{=} -2\int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|^2 dx \leq 0$$

q.e.d.