Die inverse Fourier-Transformation und der Satz von Plancherel

Daniel Böhme

Wintersemester 2019/2020

1 Die inverse Fourier-Transformation

Satz 1(Die Multiplikationsformel)
Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$ *so gilt* :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Beweis: Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ stetig und es gelte $|F(x,y)| \leq \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Dann ist $f_x(y) = F(x,y)$ mit festem x Lebesgue-integrierbar, da mit $\frac{\tilde{A}}{1+y^2}$, $\tilde{A} = \frac{A}{1+x^2}$ eine Lebesgue-integrierbare Majorante gefunden ist. Analog gilt das gleiche für $f_y(x)$. Definiere nun $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_x(y)dy$ und $F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_y(x)dx$. Nun sind die Voraussetzungen für den Satz von Fubini erfüllt und mit diesem folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)dy.$$

Setze nun $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)g(y)e^{-ixy}$, dieses F genügt den Ansprüchen von oben und es folgt $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-ixy}dy = f(x)\hat{g}(x)$, $F_2(y) = \hat{f}(y)g(y)$ und somit erhalten wir die Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

□

Satz 2(Die inverse Fourier-Transformation)
Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *so ist* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Beweis: Zuerst zeigen wir $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi$. Dazu sei

$G_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2\delta}{2}}$ und somit $\widehat{G_\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}} = K_\delta(x)$. Betrachte nun die Multiplikationsformel mit $g(x) = G_\delta(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi.$$

Das rechte Integral geht für $\delta \to 0$ offensichtlich gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi$. Für das linke Integral betrachte $(f * K_\delta)(x)$ mit $x = 0$:
$(f * K_\delta)(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-y) K_\delta(y) dy \overset{(1)}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-y) K_\delta(-y) dy =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x) dx \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} f(0)$ und somit:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Wobei (1) gilt, da K_δ eine gerade Funktion ist. Sei nun $F(y) := f(x+y)$. Es folgt $f(x) = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iy\xi} dy d\xi =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-iy\xi} dy d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$ $\square$

Wir können nun zwei Abbildungen $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \hat{f}(\xi)$ und
$\mathcal{F}^*(g)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{iy\xi} d\xi$ definieren und nach obigem Beweis gilt bereits $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = Id$. Zusätzlich gilt offensichtlich $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^*(f)(-x)$ und somit folgt direkt $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = Id$. Damit kommen wir direkt zu folgendem Korollar:

Korollar 3
Die $Fourier - Transformation$ $\mathcal{F}$ *ist eine bijektive Abbildung auf dem Schwartzraum* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2 Der Satz von Plancherel

Um den Satz von Plancherel zu beweisen benötigen wir noch ein paar Eigenschaften von Faltungen von Schwartz-Funktionen.

Proposition 4
Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$ *so gelten* :

(i) $f * g = g * f$

(ii) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \sqrt{(2\pi)}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Beweis:
(i) Wir rechnen nach: $(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \overset{u=x-y}{=}$

$\int\limits_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = (g * f)(x)$

(ii) Wir müssen zeigen: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |(f * g)^{(l)}(x)| < \infty$ für $k, l \geq 0$. Dazu zeigen wir zuerst $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f(x-y)| \leq A_k(1+|y|)^k$.
Dafür gilt zuerst $\left\{|x|^k|f(x-y)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{|t+y|^k|f(t)| \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$ und somit auch $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f(x-y)| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t+y|^k|f(t)|$. Wir schätzen nun wie folgt ab:

$\sup\limits_{|t|\leq|y|} |t+y|^k|f(t)| \leq \sup\limits_{|t|\leq|y|} |t+y|^k \sup\limits_{|t|\leq|y|} |f(t)| \leq \sup\limits_{|t|\leq|y|} (|t|^k + |y|^k) \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq$
$2^k|y|^k \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = (1)$

$\sup\limits_{|t|\geq|y|} |t+y|^k|f(t)| \leq \sup\limits_{|t|\geq|y|} |t+y|^k \sup\limits_{|t|\geq|y|} |f(t)| \leq \sup\limits_{|t|\geq|y|} (|t|^k + |y|^k) \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq$
$2^k \sup\limits_{|t|\geq|y|} |t|^k \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq 2^k \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t|^k|f(t)| = (2)$.
Es folgt $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|f(x-y)| \leq (1) + (2) \leq$
$2^k(1+|y|^k) \max\left\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|,\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t|^k|f(t)|\right\} \leq A_k(1+|y|)^k$ mit
$A_k = 2^k \max\left\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|,\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t|^k|f(t)|\right\}$, das Maximum existiert hier, da f eine Schwartz-Funktion ist.
Als nächstes zeigen wir: $\frac{d}{dx}(f * g)(x) = (\frac{d}{dx}f * g)(x)$. Betrachte dazu den Differenzenquotienten:
$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y+h)g(y)-f(x-y)g(y)}{h} dy =$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x-y+h)-f(x-y)}{h} g(y)dy = (\frac{d}{dx}f * g)(x)$. Das vertauschen von Integral

und Limes ist gerechtfertigt, da f und g Schwartz-Funktionen sind. Nach Iteration und anwenden von (i) folgt: $\frac{d^l}{dx^l}(f * g)(x) = (f * \frac{d^l}{dx^l}g)(x)$.
Zusammengefasst folgt also:

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |(f * g)^{(l)}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g^{(l)}(y)dy \leq$

$A_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^k g^{(l)}(y)dy < \infty$, wobei das Integral endlich ist, da g eine Schwartz-Funktion ist und somit auch $(1+|y|)^k g^{(l)}(y)$. Somit gilt also $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iii) Wir berechnen: $\widehat{(f * g)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy e^{-ix\xi}dx =$

$\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}dydx =$

$\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}dxg(y)e^{-iy\xi}dy = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Das Vertauschen der Integrationsvariablen ist erlaubt, da die Voraussetzungen für den Satz von Fubini erfüllt sind. $\square$

Wir versehen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nun mit einem hermiteschem Skalarprodukt:

Satz 5

Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so ist $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ ein hermitesches Skalarprodukt mit induzierter Norm $\|f\| = (\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Wir prüfen die Skalarprodukteigenschaften nach: Seien dazu $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

(i) $\langle \lambda(f+g), h\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(f(x)+g(x))\overline{h(x)}dx =$

$\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}dx = \lambda\langle f, h\rangle + \lambda\langle g, h\rangle$

$\langle f, \lambda(g+h)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\lambda(g(x)+h(x))}dx = \overline{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} + f(x)\overline{h(x)}dx =$

$\overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \overline{\lambda}\langle f, h\rangle$

(ii) $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{f(x)\overline{g(x)}}}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{f(x)}g(x)}dx = \overline{\langle g, f\rangle}$

(iii) $\langle f, f\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \geq 0$. Das $\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$ gilt folgt aus der Stetigkeit von f. $\square$

Satz 6(Plancherel)

Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann gilt $\|f\| = \left\|\hat{f}\right\|$.

Beweis: Definiere $f^\flat(x) = \overline{f(-x)}$. Es gilt

$$\widehat{f^\flat}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\flat(x)e^{-ix\xi}dx = \overline{\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-ix\xi}dx}} =$$

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ix\xi}dx} \overset{-x=u}{=} \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du} = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

Definiere jetzt $h(x) = (f * f^\flat)(x)$, damit folgt:

$$h(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-y)f^\flat(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-y)\overline{f(-y)}dy = \|f\|^2 \text{ und}$$

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\widehat{f^\flat}(\xi)d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi = \left\|\hat{f}\right\|^2 \text{ und somit die Behauptung.} \qquad \square$$

3 Erweiterung auf moderat fallende Funktionen

Definition 7

Eine Funktion f heisst moderat fallend, falls gilt :
f ist stetig und es existiert eine Konstante $A \in \mathbb{R}^+$, s.d. $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$.
In Zeichen : f ist moderat fallend $\iff f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig}, \ |f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \right\}$.

Satz 8

Sind $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, so gilt : $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

Beweis: $|(f*g)(x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-y)^2}\frac{1}{1+y^2}dy \overset{z=y-\frac{x}{2}}{=}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2}dz = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2}dz. \text{ Es gilt:}$$

(i) $x \geq 0$: $\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}$ und

(ii) $x < 0$: $\frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}$, da $z \geq 0$ und somit:

$$x \geq 0: \ 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2}dz \leq \frac{2}{1+(\frac{x}{2})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2}dz \overset{u=\frac{x}{2}-z}{=}$$

$$\frac{2}{1+(\frac{x}{2})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{2\pi}{1+(\frac{x}{2})^2} \leq \frac{8\pi}{1+x^2}$$

$$x < 0: \ 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-z)^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2}dz \leq \frac{2}{1+(\frac{x}{2})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}+z)^2}dz \overset{u=\frac{x}{2}+z}{=}$$

$$\frac{2}{1+(\frac{x}{2})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{2\pi}{1+(\frac{x}{2})^2} \leq \frac{8\pi}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow |(f*g)(x)| \leq \frac{8\pi}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \qquad \square$$

Tatsächlich gelten auch alle anderen Sätze dieses Kapitels, falls die involvierten Funktionen und ihre Fourier-Transformierten in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ liegen.

Diese zusätzliche Annahme ist wichtig, da im Gegensatz zum Schwartz-Raum $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ nicht immer gilt.