Die Fourier-Transformation

Levent Karaca

Wintersemester 2019/2020

1 Der Schwartz-Raum

Definition 1
Eine Funktion f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt, *Schwartz-Funktion* oder *schnell-fallen*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und wenn $\forall k, l \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathrm{x}|^k |\mathrm{f}^{(l)}(\mathrm{x})| < \infty$$

Bemerkung
Der Vektorraum aller Schwartz-Funktionen heißt *Schwartz-Raum* und ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathrm{x}^k \mathrm{f}^{(l)}(\mathrm{x})| < \infty \right\}$$

Beispiel
- Funktionen der Art e^{-ax^2} für a > 0 sind Schwartz-Funktionen.
- Jede Testfunktion, sprich jede beliebig oft differenzierbare Funktion, mit Kompakten Träger ist eine Schwartz-Funktion.

Die Funktion

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ mit a } = \frac{1}{2}$$

ist eine Schwartz-Funktion:

Das jene beispiele, wirklich Schwartz-Fuktionen sind ist als Übung dem Leser überlassen.

Beispiel einer Funktion f $\notin S(\mathbb{R})$
Sei

$$f(x)=e^{-|x|}$$

In diesem Fall ist f(x) $\notin C^{\infty}(\mathbb{R})$ und damit, keine Schwartz-Funktion.

2 Die Fourier Transformation auf S($\mathbb{R}$)

Die Fourier Transformation einer Funktion $f \in S(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Wir verwenden folgende Notation f(x) $\longrightarrow \hat{f}(\xi)$ für $\hat{f}$ ist die Fourier Transformierte von f.

Eigenschaften der Fourier Transformation von Schwartz-Funktionen

(i) f(x+h) $\longrightarrow \hat{f}(\xi)e^{ih\xi}$ für h$\in \mathbb{R}$

(ii) f(x)$e^{-ixh} \longrightarrow \hat{f}(\xi$+h) für h$\in \mathbb{R}$

(iii) f(δx) $\longrightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ für $\delta > 0$

(iv) f$'$(x) $\longrightarrow$ i $\xi\hat{f}(\xi)$

(v) -ixf(x) $\longrightarrow \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

Beweis:
(i) Z.z. f(x+h) $\longrightarrow \hat{f}(\xi)e^{ih\xi}$
Beweis Sei g(x) = f(x+h) dann gilt

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-ix\xi}dx$$

Wähle y=x+h

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i(y+h)\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}e^{ih\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dxe^{ih\xi}$$

$$= \hat{\mathrm{f}}(\xi)\ \mathrm{e}^{ih\xi}$$

$\Rightarrow$ f(x+h) $\longrightarrow$ $\hat{\mathrm{f}}(\xi)e^{ih\xi}$

q.e.d.

(ii)<u>Z.z</u> f(x)e^{-ixh} $\longrightarrow$ $\hat{f}(\xi$+h)

<u>Beweis</u> Sei g(x) = f(x)e^{-ixh} dann gilt

$$\hat{\mathrm{g}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixh}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi+h)}dx$$

$$= \hat{\mathrm{f}}(\xi + h)$$

$\Rightarrow$ f(x)e^{-ixh} $\longrightarrow$ $\hat{\mathrm{f}}$ (ξ+h)

q.e.d.

(iii)<u>Z.z</u> f(δx) $\longrightarrow$ $\delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$

<u>Beweis</u> Wähle:

$$\mathrm{f}(\delta\mathrm{x}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)e^{-ix\xi}dx$$

Wähle y = δx, $dy = \delta dx$

$$\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\delta^{-1}\xi}dy = \frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi\delta^{-1}}dy = \frac{1}{\delta}\hat{\mathrm{f}}(\xi\delta^{-1})$$

$\Rightarrow$ f(x)e^{-ixh} $\longrightarrow$ $\hat{\mathrm{f}}$ (ξ+h)

q.e.d.

(iv)<u>Z.z</u> f$'$(x) $\longrightarrow$ i $\xi\hat{f}(\xi)$

<u>Beweis</u> Wähle:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N} f'(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-N}^{N} - -i\xi\int\limits_{-N}^{N} f(x)e^{-ix\xi}dx)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-N}^{N} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\xi\int\limits_{-N}^{N} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

$$\longrightarrow 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \text{ für N} \to \infty$$

$$= \mathrm{i}\xi\ \hat{\mathrm{f}}(\xi)$$

$\Rightarrow$ f$'$(x) $\longrightarrow$ i ξ $\hat{\mathrm{f}}(\xi)$

q.e.d.

(v)<u>Z.z</u> -ixf(x) $\longrightarrow \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

<u>Beweis</u> Sei $\epsilon > 0$ und h $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (-\hat{ixf})(\xi) \overset{\text{nach(i)}}{=} \frac{1}{h}(e^{ih\xi}-1)\hat{f}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-ix\xi}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ih\xi}-1}{h}f(x)e^{-ix\xi}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-ix\xi}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\frac{e^{ih\xi}-1}{h} + ix)f(x)e^{-ix\xi}dx$

Da $f(x), xf(x) \in S(\mathbb{R})$ wissen wir, dass ein N $>$ 0 existiert so, dass

$\int\limits_{|x|\leq\epsilon} |f(x)|dx \leq \epsilon$ und $\int\limits_{|x|\leq\epsilon} |xf(x)|dx \leq \epsilon$ gilt.

Zunächst zeigen wir, dass

$$|\frac{e^{-ihx}-1}{h} + ix| \leq \frac{\epsilon}{N}(1)$$

für ϵ und N gewählt wie oben gilt.

Wähle:

$g(\xi) = e^{-ix\xi}$ und $g^{'}(\xi) = -ixe^{-ix\xi}$ so gilt

$g(0) = 1$, $g(0+h) = e^{-ixh}$ und $g^{'}(0) = -ix$

Sei $\epsilon > 0$ $\exists h_0 : \forall |h| < h_0$

Dann können wir die folgende Ungleichung beobachten

$$|\frac{g(0+h)-g(0)}{h} - ix| = |\frac{e^{-ihx}-1}{h} + ix| \leq \frac{\epsilon}{N}$$

Mit

$$|\frac{g(0+h)-g(0)}{h}| \to -ix \text{ für } h \to 0$$

Daher können wir annehmen, dass für $|h| < h_0$ gilt

$$|\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (-\hat{ixf})(\xi)|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} |f(x)e^{-ix\xi}|| \frac{e^{-ihx}-1}{h} + ix|dx + C\epsilon \overset{\text{nach}(1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} |f(x)||e^{-ix\xi}| \frac{\epsilon}{N} dx + C\epsilon$$

Da $|e^{-ix\xi}| = 1$ gilt, können wir weiter schreiben

$$= \int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \frac{\epsilon}{N} dx + C\epsilon = (\int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \frac{1}{N} dx + C)\epsilon$$

Wähle $\int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \frac{1}{N} dx + C = C'$. Dann ist

$$(\int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \frac{1}{N} dx + C)\epsilon = C'\epsilon$$

Da $C'\epsilon$ sehr klein wird für N$\in \mathbb{N}$ geht $\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-ixf})(\xi)$ gegen 0, somit existiert der Differentialquotient von $\hat{f}(\xi)$ und es gilt

$$-ixf(x) \longrightarrow \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$$

q.e.d.

Satz 1
Wenn $f \in S(\mathbb{R})$, dann ist auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$

<u>Beweis:</u>
Sei $g \in S(\mathbb{R})$ dann gilt

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi} dx|$$

Im nächsten Schritt ziehen wir den Betrag ins Integral.

$$\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)||e^{-ix\xi}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$$

Weil $g(x) \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Fourier Transformation von Schwartz-Funktionen sind beschränkt.

Nun :
Wähle $f \in S(\mathbb{R})$ so, dass folgendes gelten solle :
$(\frac{d}{dx})^k[(-ix)^l f(x)] \in S(\mathbb{R})$ für alle $k, l \geq 0$
Nach Eigenschaft (v) gilt

$$(-ix)^l f(x) \longrightarrow (\frac{d}{d\xi})^l \hat{f}(\xi)$$

Zunächst definiere $h(x) = (-ix)^l f(x)$
Nach Eigenschaft (iv) gilt

$$(\frac{d}{dx})^k h(x) \longrightarrow (i\xi)^k \hat{h}(\xi)$$

nun betrachte

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |(i\xi)^k (\frac{d}{d\xi})^l \hat{f}(\xi)| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |(\xi)^k (\frac{d}{d\xi})^l \hat{f}(\xi)| \overset{\text{nach besch.}}{<} \infty$$

somit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Im weiteren Verlauf betrachten wir die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

<u>Bemerkung 1</u>
Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dies müssen wir natürlich noch zeigen.

<u>zZ.</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$
<u>Beweis:</u>

Wähle $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$
Da $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ rotationssymmetrisch ist, liegt es nah das Integral mit Polarkoordinaten, statt mit kartesischen Koordinaten zu berechnen.

Es sei $\Omega = \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$ und

$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2, (r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$
Dann ist die Funktionaldeterminante

$$detD\Phi(r,\phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

Das Komplement von $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge, mit $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ ergibt sich also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\Phi(\Omega)} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

Setze Polarkoordinaten ein

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{1}{2}(r^2)}detD\Phi(r,\phi)drd\phi = \int_{\Omega} e^{-\frac{1}{2}(r^2)}rdrd\phi$$

Nach Fubini gilt

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}rdrd\phi = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}r2\pi dr$$

$$2\pi\left[\left(e^{-\frac{r^2}{2}}\right)e^x\right]_0^1 = 2\pi(0-(-1)) = 2\pi$$

$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$ q.e.d.

Satz 2
Sei $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, dann folgt $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$

Beweis :
Definiere eine Funktion F folgendermaßen:

$$F(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}dx$$

mit $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix0}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}1dx = 1$ nach Bemerkung.
Da $f' = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$ folgt

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(-ix)e^{-ix\xi}dx = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}dx = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'e^{-ix\xi}dx$$

Aus der Eigenschaft (iv) folgt
$F'(\xi) = i(i\xi)\hat{f}(\xi) = -\xi\hat{f}(\xi) = -\xi F(\xi)$

Nun wählen wir eine Funktion $G(\xi)$ wie folgt

$G(\xi) = F(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ untersuchen wir zunächst die Ableitung von G
$G'(\xi) = F'(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}} + F(\xi)\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} = -\xi F(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}} + F(\xi)\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} = 0$
Daher ist G konstant. Da sogar $F(0) = 1$ können wir folgern, dass G konstant 1 ist $\forall \xi$
$\Rightarrow F(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \hat{f}(\xi) = f(\xi)$

q.e.d.

Definition 2
Wir nennen eine Funktionsfolge $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ *Guter Kern* wenn gilt
a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)|dx = 1$
b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)|dx \leq M$ für $M \in [0, \infty]$
c) $\forall \lambda > 0$ gilt $\int\limits_{|x|>\lambda} |K_\delta(x)|dx \to 0$ wenn $\delta \to 0$

Folgerung 1
Wenn $\delta > 0$ und $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{x^2}{2\delta}}$ dann gilt $\hat{K_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta\xi^2}{2}}$

Beweis:
Behauptung folgt aus Satz 2 und der Eigenschaft der F.T. (iii)

q.e.d.

Satz 3
Die Funktion $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{x^2}{2\delta}}$ ist ein Guter Kern für $\delta \to 0$

Beweis:
(a)
Folgt aus Bemerkung 1 und einer Substitution und ist dann Klar.
(b)
Da (a) gilt und $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{x^2}{2\delta}} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist (b) klar.
(c)
Wieder mit Substitution.
Wähle $y = \frac{x}{\sqrt{\delta}}(1)$ und $\forall \lambda > 0$ gilt dann

$$\int\limits_{|x|>\lambda} |K_\delta(x)|dx =^{(1)} \int\limits_{|y|>\frac{\lambda}{\sqrt{\delta}}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \to 0 \text{ für } \delta \to 0$$

Es ist relativ Offensichtlich, dass das Integral für kleiner werdendes δ wachsende Integral Grenzen besitzt, auf dem das Integral folglich Integriert wird. Da $K_\delta \in S(\mathbb{R})$ schnell fallend ist und für $x \to \infty$ gegen 0 geht. Folgt die

Aussage. q.e.d.

Definition 3
Sei $f, g \in S(\mathbb{R})$, dann definieren wir die *Faltung* von f und g folgendermaßen:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

Folgerung 2
Wenn $f \in S(\mathbb{R})$ und K_δ wie oben gewählt, dann gilt

$$(f * K_\delta)(x) \to f$$

gleichmäßig in x für $\delta \to 0$

Beweis:
Zunächst ist zu Zeigen, dass f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
$\forall \epsilon > 0 \exists R > 0$ sodass, $|f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$ für $|x| \geq R$ also gleichmäßig auf $[-\infty, -R) \cup (R, \infty]$. Dies ist klar, da f schnell-fallend ist.
Des weiteren,ist f stetig, nun betrachten wir die gleichmäßige Stetigkeit auf [-R,R] und mit dem $\epsilon > 0$ gewählt wie oben, wissen wir es existiert ein $\lambda > 0$ sd. $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ wenn $|x - y|\lambda$. Daraus und der Tatsache, dass [-R,R] kompakt ist und stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall immer gleichmäßig Stetig sind können wir nun weiter machen.
Mit (a) (def. Guter Kern)

$$(f*K_\delta)(x)-f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_\delta(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)[f(x-t)-f(x)]dt$$

und wenn $K_\delta \geq 0$ dann

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \leq \int\limits_{|t|>\lambda} K_\delta(t)|f(x-t)-f(x)|dt + \int\limits_{|t|\leq\lambda} K_\delta(t)|f(x-t)-f(x)|dt \to 0 \text{ für } \delta \to 0$$

nach (c)(Guter Kern) folgt die Aussage.

q.e.d.

Aufgaben
(i)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne $\hat{f}(\xi)$

Lösung:

$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(e^{-ix\xi} \right) \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi} + \frac{1}{i\xi} e^{i\xi}) =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{1}{i\xi} (-e^{-i\xi} + e^{-i\xi})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{1}{i\xi} (-(\cos(\xi) - i\sin(\xi)) + \cos(\xi) + i\sin(\xi)))$
$= \frac{2\sin(\xi)}{\sqrt{2\pi} i\xi} = \hat{f}(\xi)$ für $\xi \neq 0$

für $\xi = 0$ $\hat{f}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne $\hat{g}(\xi)$

Berechnung wird dem Leser Überlassen.

Lösung:

$$\hat{g}(\xi) = (\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi})^2$$